Profesor Ypsilon patamatematizuje reálnou situaci

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.

„*Patamatematizace je jeden ze způsobů*“, vysvětloval profesor Ypsilon sklíčeným pacientům očekávajícím lékařský zákrok v čekárně dentistově, „*jak překlenout situace, které hrozí frustrací, tj. porušením stavu psychické rovnováhy. K patamatematizaci se obvykle uchylujeme v případech, kdy je nám s postupem času stále patrnější, že situace, ve které se nacházíme, hodlá vyvrcholit způsobem katastrofickým. Podstata metody spočívá v tom, že dané reálné situaci umožníme, aby se vyřešila sama, bez nás. Dosáhneme toho tak, že provedeme tzv. patamatematický autotransfér, čili samopřenos - přeneseme se do situace, kterou si sami rychle vytvoříme tak, aby její řešitelnost byla nadějnější než* u situace *původní.*“

Jakým způsobem provedl profesor Ypsilon patamatematizaci reálné situace z čekárny zubního lékaře? Vyzval přítomné, aby provedli autotransfer do světa matematiky a pokusili se vyřešit problém, v němž sice lidský chrup opět hraje podstatnou roli, není už ale činitelem frustračním:
Existují aspoň dva obyvatelé hlavního města Prahy, kteří mají stejný chrup?
Uvědomme si, že lidský chrup obsahuje nejvýše 32 zubů, a domluvme se na tom, že slovy „dvě osoby mají stejný chrup“ budeme rozumět to, že jejich chrupy se shodují nejen v počtu, ale i v rozmístění jednotlivých zubů; přitom nám půjde pouze o zuby, které nejsou umělé. Pro úplnost se ještě umluvme, že v případě, kdy nebude jasné, zda to, co se v ústní dutině dané osoby nachází, zub je či není, bude rozhodovat stomatolog, kterého předem vybereme. Při této příležitosti si připomeňme, že zubní lékařství přiřazuje jednotlivým zubům trvalého chrupu čísla podle následujícího schématu:

8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8
8 7 6 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 6 7 8;

zuby se stejnými čísly se přitom odlišují udáním polohy vpravo nebo vlevo a nahoře nebo dole. Zuby s čísly l a 2 se nazývají řezáky, s číslem 3 špičáky, s čísly 4, 5 zuby třenové a konečně zuby s čísly 6, 7, 8 se nazývají stoličky.

Pro naše potřeby si však zuby v úplném chrupu budeme myslet očíslovány po řadě čísly l až 32 třeba tak, že v uvedeném schématu začneme s číslováním vlevo nahoře, projdeme horní řádek a podobně očíslujeme i zuby v řádku dolním. Toto označení by pro zubolékařskou praxi nebylo příliš výhodné - tak např. pro špičáky bychom měli čtyři různá čísla, a to 6, 11, 22 a 27. Tento způsob nám však umožní vzájemně jednoznačně přiřadit chrupu libovolné osoby uspořádanou 32tici složenou z jedniček a nul podle toho, zda na odpovídajících místech daného chrupu zub je či není. Tak např. chrupu, v němž chybějí pouze zuby s čísly 2, 3, 16, 20 a 31, přiřadíme uspořádanou 32tici

[10011111111111101110111111111101],

zatímco uspořádané 32tici

[01100000000000010001000000000010]

je přiřazen chrup, který obsahuje pouze zuby s čísly 2, 3, 16, 20 a 31. Podobně jsou na sebe zobrazeny bezzubý chrup s uspořádanou 32ticí skládající se ze samých nul a úplný chrup s uspořádanou 32ticí obsahující pouze jedničky.

Z existence tohoto prostého zobrazení množiny všech chrupů na množinu všech uspořádaných 32tic složených z nul nebo jedniček vyplývá, že obě množiny mají stejný počet prvků. K určení počtu všech lidských chrupů lišících se počtem zubů nebo jejich rozmístěním tedy stačí určit počet všech uspořádaných 32tic obsahujících pouze nuly nebo jedničky. Tento počet však určíme snadno: protože pro každý člen uspořádané 32tice máme právě dvě možnosti - buď 0, anebo l - , je celkový počet uvedených uspořádaných 32tic roven 2.2.2. ....2.2 = 2^{32} .

32krát

Z tohoto výsledku vyplývá, že počet 2^{32} osob ještě neskýtá záruku, že jsou mezi nimi aspoň dvě se stejným chrupem; abychom měli jistotu, že v jisté skupině aspoň dvě takovéto osoby existují, musela by obsahovat alespoň $2^{32} + 1$ jedinců.

K tomu, abychom mohli odpovědět na problém profesora Ypsilona, musíme ještě porovnat současný počet obyvatel Prahy s číslem 2^{32}. Vzhledem k tomu, že platí

$$2^{32} = 4 \,.\, 2^{30} = 4 \,.\, (2^{10})^3 = 4 \,.\, 1024^3 > 4 \,.\, 1000^3 = 4 \,.\, 10^9$$

a že stávající počet obyvatel Prahy je menší než čtyři miliardy, dostáváme tento výsledek: Současný počet obyvatel Prahy není dostačující k tomu, abychom měli jistotu, že aspoň dva z nich mají stejný chrup.

Většině z vás je nepochybně známo, že v závěrečné fázi tohoto řešení byl použit *Dirichletův princip* (zvaný též principem přihrádkovým), který říká:

Rozmístíme-li n + l předmětů do n přihrádek, pak aspoň v jedné přihrádce budou aspoň dva předměty.

Skutečně, připravíme-li si 2^{32} přihrádek pro všechny možno druhy chrupů a rozmisťujeme-li do nich $2^{32} + 1$ osob podle složení jejich zubů, pak aspoň v jedné přihrádce budou aspoň dvě osoby, a to právě ty, které mají stejný chrup.

Porovnejme získaný výsledek s výsledkem jiného příkladu, se kterým se už někteří z vás patrně v rámci užití Dirichletova principu také jistě setkali. Jde o to, zda existují aspoň dva obyvatelé Prahy, kteří mají stejný počet vlasů; přitom jo známo, že žádný člověk jich nemá více než 500 000.

Utvoříme-li si 500 001 přihrádek pro osoby, které mají 0, l, 2, 3, ..., 499 999, 500 000 vlasů, potom při rozmístění 500 002 nebo více osob budou aspoň v jedné přihrádce aspoň dvě osoby. A protože počet obyvatel Prahy splňuje podmínku, že je větší než 500 001, je pravda, že aspoň dva Pražané se stejným počtem vlasů existují.

Srovnáním výsledků obou příkladů docházíme k závěru, který je na první pohled překvapivý: Zatímco existence aspoň dvou Pražanů s týmž počtem vlasů je zaručena, dva obyvatelé Prahy se stejným chrupem existovat nemusí!

Všimněte si závěrem, že nemusí existovat ani dva českoslovenští občané se stejným chrupem, a dokonce ani takoví dva obyvatelé Číny, nejlidnatější země světa! Ještě v roce 1978, kdy počet obyvatel světa činil 4188 miliónů (viz Ilustrovaný encyklopedický slovník, heslo „obyvatelstvo“), bylo možné že žádní dva lidé na světě nemají stejný chrup, neboť je

$$4\,188 \,.\, 10^6 < 2^{32}.$$

Jistotu, že alespoň dva pozemšťané jsou stejného chrupu, máme teprve od roku 1979, kdy počet obyvatel zeměkoule překročil hranici danou číslem 2^{32}. Přesto však vám profesor Ypsilon doporučuje, abyste svému chrupu věnovali náležitou péči; získané výsledky totiž nevylučují, že jde o unikát, že stejný chrup už na celém světě neexistuje!