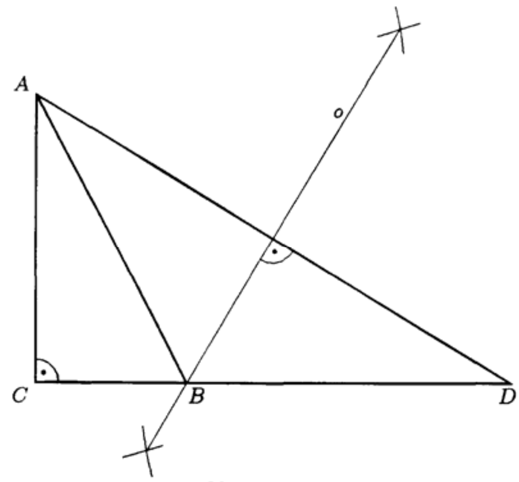
Úloha 1
Je dán pravoúhlý trojúhelník *ACD* s pravým úhlem při vrcholu *C,* |*AC*| = 7,5 cm, |*CD*| = 12,5 cm. Na přímce *CD* určete bod *B* tak, aby |*AB*| = |*BD*|



Obr. 1

Řešení: Úlohu vyřešíme nejprve geometrickou konstrukcí.

a) Z *rozboru* vidíme, že bod *B* je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku *ABD* se základnou *AD*, přitom bod *B* má ležet na přímce *CD.*

Konstrukce a její zápis:

1. $\Delta ACD, |\prec ACD| = 90^0$, |*AC*| = 7,5 cm, |*CD*| = 12,5 cm
2. *o*, osa *AD*
3. *B*, *B* = *o* $\cap \leftrightarrow$*CD*

b) Polohu bodu B můžeme určit také výpočtem délky úsečky BC. Označíme |*BC*| = *x* cm, pak |*AB*| = |*BD*| = (12,5 – x) cm. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB, platí

$$7{,}5^2 + x^2 = (12{,}5 - x)^2 \quad (1)$$

Tato rovnice „se tváří kvadraticky“, snadno se však přesvědčíme, že je lineární. Jejím řešením dostaneme, že *x* = 4. Vzdálenost |*BC*| = 4 cm. Výsledek ověříme měřením v provedené konstrukci.

Řešme obdobu úlohy 1. pro |*AC*| = 9,0 cm, |*CD*| = 6,0 cm a napíšeme-li mechanicky obdobu rovnice (1), dostaneme rovnici

$$9^2 + x^2 = (6 - x)^2$$
$$X = -3{,}75$$

Z geometrické konstrukce ihned vidíme, co tento výsledek znamená. Bod *B* leží na opačné polopřímce k $\rightarrow$ *CD,* |*BC*| = 3,8 cm. Žáci sami přijdou na podmínku, kdy tento případ (při obecné formulaci úlohy 1 bez konkrétních dat o délce úseček) nastane, |AC|>|CD|.

Obdobu úlohy 1 lze užít jako samostatnou frontální práci (s možností vzájemné kooperace) pro dvě skupiny žáků A a B při vyučování (po předchozím rozboru problému nebo vyřešením vzorové úlohy pod vedením učitele). Pokud žáci rýsují do sešitu nebo na papíry formátu A4, lze užít těchto vstupních dat (výsledky výpočtu jsou uvedeny v závorkách):

A – a) |*AB*| = 6,0 cm, |*CD*| = 10,0 cm, (|*BC*| = 3,2 cm)
b) |*AB*| = 10,0 cm, |*CD*| = 5,0 cm, (|*BC*| = 7,5 cm)

B – a) |*AC*| = 8,0 cm, |*CD*| = 12,0 cm, (|*BC*| = 3,3 cm)
b) |*AC*| = 12,0 cm, |*CD*| = 6,0 cm, (|*BC*| = 9,0 cm)

Podstata úlohy 1 je skryta v následujícím příkladu.

Úloha 2

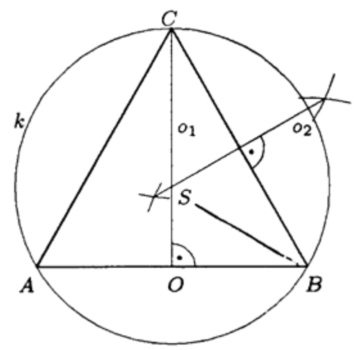
Je dán rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB*, |*AB*| = 8 cm, a výškou v_c = 7 cm.

a) Sestrojte kružnici opsanou trojúhelníku *ABC*.
b) Vypočítejte poloměr kružnice opsané trojúhelníku *ABC*.

Řešení a) - *Rozbor.*

Pro střed *S* kružnice opsané trojúhelníku *ABC* platí |*AS*| = |*BS*| |*CS*|, takže bod *S* leží na ose o_1 strany *AB* a zároveň na ose o_2 strany *BC*.

Konstrukce a její zápis:



Obr. 2

1. o_1, o_2
2. $S = o_1 \cap o_2$
3. $k(S,|AS|)$

Řešení b):

Trojúhelník *BSO*, kde *O* je střed strany *AB*, je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *O*, |*BS*| = |*AS*| = *x* cm, |*BO*| = 4,0 cm, |*OS*| = (7 – *x*) cm. Podle Pythagorovy věty dostaneme

$$x^2 = 4^2 + (7 - x)^2$$
$$x = 65 : 14 = 4{,}6$$

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku *ABC* je přibližně 4,6 cm. Výsledek ověříme měřením v řešení a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci:

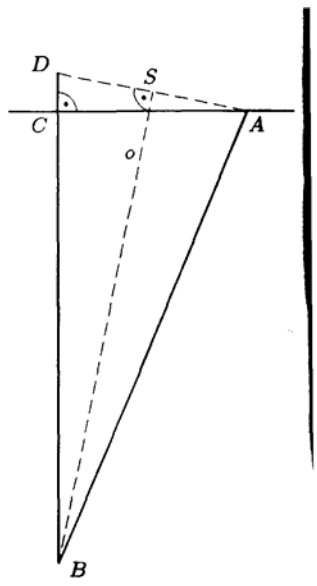
A:– a) $|AB| = 6{,}0$ cm, $v_c = 12{,}0$ cm, ($r = 6{,}4$ cm)
b) $|AB| = 10{,}0$ cm, $v_c = 4{,}0$ cm, ($r = 5{,}1$ cm)
B:– a) $|AB| = 12{,}0$ cm, $v_c = 8{,}0$ cm, ($r = 6{,}3$ cm)
b) $|AB| = 12{,}0$ cm, $v_c = 3{,}0$ cm, ($r = 7{,}5$ cm)

Úloha 3

Do bazénu s vodou je svisle ponořena tyč, která se dolním koncem opírá o dno bazénu. Délka části tyče nad vodou je 15 cm. Pootočíme-li tyč opřenou o dno bazénu tak, že se horní konec tyče dostane na hladinu, pak vzdálenost horního konce tyče na hladině od původní svislé polohy tyče je 75 cm. Určete hloubku vody v bazénu.

a) *Řešení geometrickou konstrukcí*

Rozbor:



Obr. 3

Úsečka *BD* znázorňuje svislou polohu tyče, přímka AC hladinu, přitom AB je poloha tyče po otočení. Trojúhelník ABD je rovnoramenný se základnou *AD*, proto bod *B* leží na ose úsečky *AD* a na kolmici k přímce *AC*. Konstrukce je provedena v měřítku 1:30, žáci je realizují v měřítku 1:10.

Zápis konstrukce:

1. $\Delta ACD, |\sphericalangle ACD| = 90^0, |AC| = 2{,}5$ cm, $|CD| = 0{,}5$ cm
2. *o*, osa *AD*
3. *B*, $B = o \cap \leftrightarrow DC$

Měřením úsečky *BC* zjistíme, že $|BC| = 6{,}0$ cm. Hloubka vody v bazénu je 6 cm . 30 = 180 cm.

b) Řešení výpočtem:

Vyjdeme ze situace podle obr.3. Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB. Označíme hloubku vody *x* cm, $|BC| = x.$ Délka tyče je $(x+15)$cm. Z trojúhelníku *ABC* dostaneme $x^2 + 75^2 = (x+15)^2$, *x* = 180.

Uvedeme ještě jinou variantu úlohy 3, která je známá z oblasti rekreační matematiky jako stará indická úloha.

Úloha 4

Květ lotosu ční nad hladinou jezera půl stopy. Vítr jej odnesl na hladinu tak, že je dvě stopy od místa, kde rostl. Určete hloubku jezera. (Stopa je asi 30 cm.)

Úlohu lze opět řešit výpočtem nebo geometrickou konstrukcí (užijte měřítko 1:15). Výsledek: Hloubka jezera je $3\frac{3}{4}$ stopy.

Úlohy 3 a 4 jsou zajímavé tím, že ukazují způsob výpočtu hloubky vody z údajů získaných pouze nad vodní hladinou. Povšimněme si, že tyto úlohy lze řešit ještě jiným způsobem výpočtu, totiž užitím vztahu $\Delta ACD \approx \Delta BSD\ (uu)$, kde bod S je střed AD, a výpočtem $|AD|$ (obr.3). Podobně lze ovšem přistoupit k řešení ostatních úloh tohoto typu.

Zobecněnou úlohu 1 lze formulovat takto:

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), jsou-li dány délky $|AC|$ a $|CD| = |AB| + |BC|$. Vypočítejte $|AB|$ a $|BC|$.

Zobecněnou úlohu 3 (příp. 4) lze formulovat takto:
Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem při vrcholu C), je-li dáno $|AC|$ a $|CD| = |AB| - |BC|$. Vypočítejte $|AB|$ a $|BC|$.

Přidáme ještě návrh vstupních dat pro řešení posledně zmíněné úlohy geometrickou konstrukcí i výpočtem pro žákovskou práci.

A: $|AC|$ = 12,0 cm, $|CD| = |AB| - |BC|$ = 8,0 cm

$(|BC| = 5{,}0cm, |AB| = 13{,}0cm)$

B: $|AC|$ = 9,0 cm, $|CD| = |AB| - |BC|$ = 3,0 cm

$(|BC| = 12{,}0cm, |AB| = 15{,}0cm)$

Idea předchozích úloh je skryta v následujících příkladech.

Úloha 5

V kruhové úseči kruhu $K(S,|SV|)$ známe délku tětivy t = $|AB|$ = 8,0 cm a vzdálenost v = $|VS_1|$ = 1,0 cm. (Přímka VS_1 je osou úseče.) Určete poloměr kruhu K a) výpočtem, b) geometrickou konstrukcí.

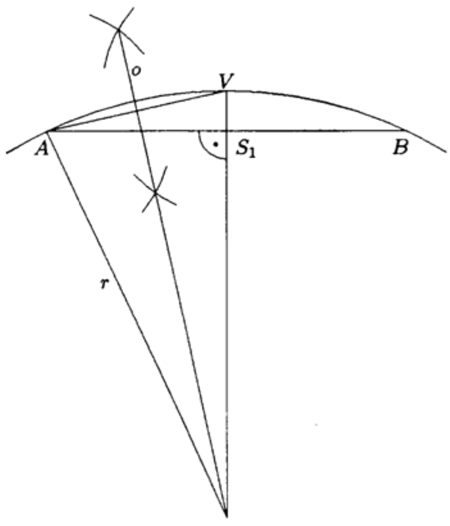
a) *Řešení výpočtem*

$|AS_1| = |BS_1| = \frac{1}{2}t = 4{,}0$ cm, $|VS_1|$ = 1,0 cm. Poloměr $|AS|$ kruhu K vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku AS_1S, $|AS| = x$ cm, $|SS_1| = (x-1)$ cm. Užitím Pythagorovy věty dostaneme rovnici $x^2 = 4^2 + (x-1)^2$, odkud x = 8,5.

Poloměr r kruhu K je 8,5 cm.

b) *Řešení geometrickou konstrukcí* provedeme tak, že sestrojíme střed S kruhu K jako průsečík osy úsečky AV a přímky VS_1 (obr.4). Měřením ověříme výsledek, který jsme dostali výpočtem.

obr.4



Obr. 4

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci:

A) t = 12,0 cm, v = 2,0 cm, (r = 10,0 cm)

B) t = 10,0 cm, v = 3,0 cm, (r = 5,7 cm)

V úlohách 6 , 7 a 9, 10 řešení vynecháme.

Úloha 6

Je dána kružnice $k(S,r)$, úsečka SA a polopřímka SX kolmá k úsečce SA.

a) Sestrojte kružnici se středem na polopřímce SX, která se dotýká kružnice k a prochází bodem A.

b) Vypočítejte poloměr r' kružnice z úlohy a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci.

A – a) r = 3,0 cm, $|SA| = 6{,}0$ cm, (r' =7,5 cm)

b) r = 4,0 cm, $|SA| = 2{,}0$ cm, (r' = 2,5 cm)

B - a) r = 2,0 cm, $|SA| = 6{,}0$ cm, (r' = 10,0 cm)

b) r = 5,0 cm, $|SA| = 3{,}0$ cm, (r' = 3,4 cm)

Úloha 7

Je dána úsečka *CD,* na ose úsečky *CD* bod *E* a kružnice $k(E,r)$. Střed úsečky *CD* je bod *O*.
a) Sestrojte všechny kružnice, které procházejí body *C*, *D* a dotýkají se kružnice *k*.
b) Vypočítejte poloměry kružnic z úlohy a).

Návrh vstupních dat pro žákovskou práci:

A) $|CD|$ = 9,0 cm, $|OE|$ = 8,0 cm, r = 2,5 cm (r_1 = 4,6 cm, r_2 = 6,2 cm)

B) $|CD|$ = 11,0 cm, $|OE|$ = 9,0 cm, r = 3,0 cm (r_1 = 5,5 cm, r_2 = 7,3 cm)

Úloha 8

Je dán rovnoramenný lichoběžník *ABCD, AB//CD,* $|AB| = 9{,}6$ cm, $|CD| = 7{,}2$ cm, s výškou v = 8,4 cm a jeho kružnice opsaná. Vypočítejte poloměr r této kružnice.

Řešení:

Označíme bodem *S* střed kružnice opsané lichoběžníku *ABCD* (obr.5)*, E* je střed *AB, F* střed *CD.* Pak r = $|AS| = |DS|$ a z pravoúhlých trojúhelníků *AES* a *DFS* dostaneme $|AE|^2 + |ES|^2 = |FS|^2 + |FD|^2$.

Označíme-li $|ES| = x$ cm, obdržíme z předchozího vztahu rovnici $4{,}8^2 + x^2 = (8{,}4 - x)^3 + 3{,}6^2$, x = 3,6.

Pro poloměr r kružnice opsané lichoběžníku *ABCD* platí r^2 = $|AE|^2$ + $|ES|^2$, takže r = 6,0 cm.

Výsledek ověřte měřením v konstrukci na lichoběžníku *ABCD*
Návrh vstupních dat pro žákovskou práci:
A:– a) $|AB|$ = 8,0 cm, $|CD|$ = 3,0 cm, v = 6,0 cm (r = 4,4 cm)
b) $|AB|$ = 7,0 cm, $|CD|$ = 4,0 cm, v = 2,0 cm (r = 3,7 cm)
B:– a) $|AB|$ = 6,0 cm, $|CD|$ = 3,0 cm, v = 5,0 cm (r = 3,5 cm)
b) $|AB|$ = 9,0 cm, $|CD|$ = 2,0 cm, v = 2,5 cm (r = 5,2 cm)

Jistou obdobou předcházející úlohy o lichoběžníku je úloha „o ptácích u řeky“ ze středověké matematiky.

Úloha 9

Na obou březích řeky stojí proti sobě dvě palmy. Jedna je vysoká 30 loktů a druhá 20 loktů, vzdálenost mezi palmami je 50 loktů (1 loket je asi 60 cm). Na vrcholcích obou palem sedí dva ptáci. Oba ptáci současně zpozorují v řece rybu přesně proti oběma palmám. Letí k rybě stejnou rychlostí a doletí k ní současně. V jaké vzdálenosti od vyšší palmy se ryba objevila?

Úlohu lze opět řešit početně i geometrickou konstrukcí, výsledek je 20 loktů. Soubor těchto úloh by bylo možno dále rozšiřovat, ale spokojíme se jen s doplněním

Motivace „z reálného světa“ pro úlohu 1. (Takové motivace mohou sehrát zejména v nižších ročnících pedagogicky velmi pozitivní roli.) Můžeme využít např. námět „hledání pokladu“ obvyklý v učebnicích USA a Kanady.

Úloha 10

Na ostrově je ukryt poklad tak, že je stejně vzdálen od dvou významných stromů *A, D* a zároveň je na okraji lesa. Strom *A* je vzdálen od okraje lesa (vzdálenost $|AC|$) 75 kroků, vzdálenost $|CD|$ je 125 kroků. Určete geometrickou konstrukcí i výpočtem polohu pokladu.

Motivaci „hledání pokladu“ lze využít v dalších typech úloh – na průniky množin bodů dané vlastnosti nebo na shodná zobrazení a jejich skládání, to však již přesahuje tématiku tohoto článku.