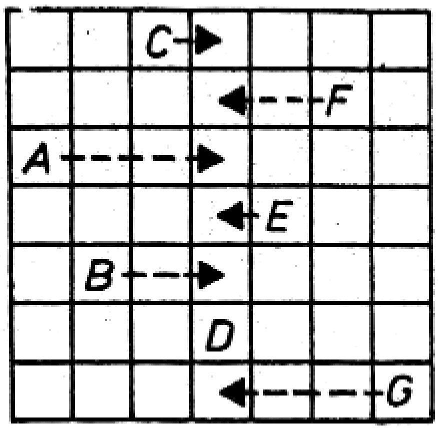
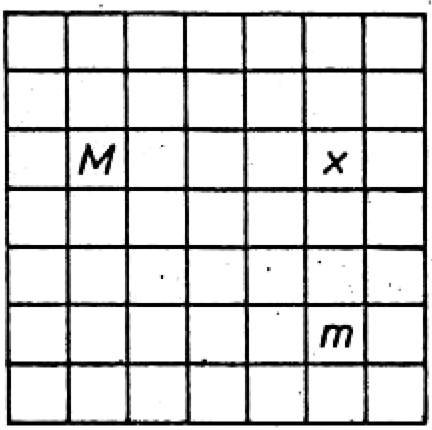
Profesor Ypsilon nad tiketem sportky

Profesor X. Ypsilon chce přivést k pravidelnému provozování sportu své žáky, kteří stále jen leží v matematických knihách a i svůj volný čas praví studiem vědecké literatury tuzemské i zahraniční. Dnes to zkouší úlohami inspirovanými tiketem sportky v naději, že si studenti všimnou seznamu 49 sportů na zadní straně a pro jeden z nich zahoří. Zkusme jeho úlohy řešit také; nepřivedou-li nás k pravidelné sportovní činnosti, alespoň se pocvičíme v matematických úvahách a výpočtech. Připomeňme si, že na tiketu sportky jsou otištěna čísla l, 2,…, 49 v sedmi řádcích a sedmi sloupcích; takovou tabulku si snadno napíšete.

Úloha 1. Na tiketu sportky zvolíme sedm čísel tak, aby v každém řádku i sloupci bylo pravé jedno. Ukážeme, že součty kterýchkoli sedmi čísel s touto vlastností jsou si rovny.

Označme zvolená čísla písmeny *A, B, C, D, E, F, G* a nechť jsou v tomto pořadí umístěna i v jednotlivých sloupcích (*A* je v prvním sloupci, *B* ve druhém atd.) — viz obr. 1





obr. 1 obr. 2

Místo čísel *A, B, C, D, E, F, G* vezměme po řadě čísla *A* + 3, *B* + 2, *C* + l, *D*, *E* — l, *F* — 2, *G* – 3, což jsou čísla vyplňující prostřední sloupec, kam míří šípky. Protože:

{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46} = {*A* + 3, *B* + 2, *C* + l, *D*, *E* - l, *F* - 2, *G* – 3}, platí:

$A + B + C + D + E + F + G = (A + 3) + (B + 2) + (C + 1) + D + (E - 1) + (F - 2) + (G - 3) = 4 + 11 + 18 + 25 + 32 + 39 + 46 = 175.$

Součet sedmi zvolených čísel je tedy roven součtu čísel v prostředním sloupci, takže nezávisí na tom, jak čísla byla zvolena. Lze ukázat (a to už jistě provedete sami), že součet zvolených čísel je též roven součtu čísel ležících na diagonále tiketu, tj. součtu

$1 + 9 + 17 + 25 + 33 + 41 + 49$

Tento výsledek je do jisté míry obecnější, neboť ho lze aplikovat i na čtvercové sítě, v nichž prostřední sloupec neexistuje, např. pro čtvercovou síť s čísly 1, 2, ... , 64.

Úloha 2. V každém ze sedmi řádků tiketu najdeme nejmenší číslo, vybereme z nich největší a označíme je M; dále najdeme největší číslo v každém sloupci, vybereme z nich nejmenší a označíme je m. Snadno zjistíte, že M = m = 43. Jaký je vztah mezi M a m v obecném případe, tj. při libovolném rozmístění čišel 1, 2,…, 49 v nějaké tabulce typu 7x7?

Nechť jsou čísla l, 2,…, 49 umístěna libovolným způsobem a nechť je $M \neq m$. Potom pro číslo x, které leží v průniku řádku, v němž je M, a sloupce, v němž je m (obr. 2), platí jednak $x > M$, neboť M je nejmenší číslo ve svém řádku, jednak $x < m$, neboť m je největší číslo ve svém sloupci. Ze vztahu $M < x < m$ vyplývá $M < m$. Protože jsme však viděli, že může nastat i případ $M = m$, platí pro čísla m, M obecně $M \leq. m$. Je tedy číslo M, které je největší z nejmenších čísel každého řádku, nejvýše rovno číslu m, které je nejmenší z největších čísel každého sloupce. Pokuste se určit možné hodnoty čísel M, m v různých tabulkách, o kterých uvažujeme.

Úloha 3. Sestavme z druhých mocnin „sportkových čísel" součet:

$s = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + 47^2 - 48^2 + 49^2$

a pokusme se jej co nejvýhodněji určit.

Víme-li, že výraz

$$\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

udává součet druhých mocnin prvních n přirozených čísel, můžeme postupovat takto:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 47^2 + 49^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{25} (2k-1)^2 = 4 \sum_{k=1}^{25} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{25} k + 25 = 20\,825 :$$

podobným způsobem vypočteme:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 46^2 + 48^2 = \sum_{k=1}^{24} (2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^{24} k^2 = 19\,600 .$$

Pro hledaný součet s tak máme $s = 20\,825 - 19\,600 = 1225$.

Mnohem elegantnější je však následující postup, v němž vystačíme pouze se vzorcem pro rozdíl druhých mocnin:

$s = (49^2 - 482) + (47^2 - 462) + \ldots + (32 - 22) + l^2 =$
$= (49 - 48)(49 + 48) + (47 - 46)\ (47 + 46) + \ldots + (3 - 2)(3 + 2) + 1 =$
$= 49 + 48 + 47 + 46 + \ldots + 3 + 2 + l = 1225$

Dobrých výsledků lze často dosáhnout jednoduchými prostředky – pravidelným běháním dosáhneme více než pravidelnými návštěvami toho nejlepšího lékaře!