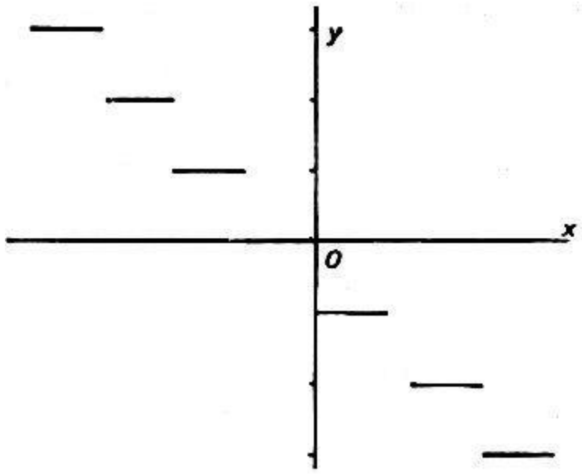
Večerníček řeší problém profesora Ypsilona[1]

„A nyní již u obrazovky vítám vás, milé děti!", usmála se hlasatelka a profesor Ypsilon zvedl oči od svých poznámek, v nichž se pokouší najít rovnici, jež pro každé dané celé kladné číslo *n* má v množině všech reálných čísel právě *n* kořenů. Zamyšleně začíná sledovat, jak z vesmírných dálav přilétá Večerníček, uklání se a začíná vystupovat po improvizovaném schodišti (znázorněném a doplněném o souřadnicovou soustavu):



Profesorova tvář se rozjasňuje, a brzy i volání *„Heuréka!"* se nese jeho pracovnou. Našel snad profesor Ypsilon řešení svého problému na Večerníčkových schodech?

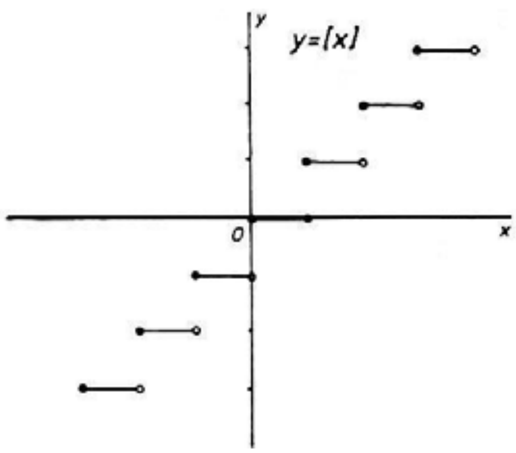
Připomeňme si nejprve, že celou částí reálného čísla x (značíme ji $[x]$) rozumíme to celé číslo, které je ze všech celých čísel, nejvýše rovných číslu x, největší. Je tedy např.:

$[\sqrt{2}] = 1$; $[3] = 3$; $[0{,}5] = 0$; $[-\pi] = -4$; $[-\frac{1}{2}] = -1$

Sestrojme na základě této definice graf funkce $y = [x]$; jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel, oborem funkčních hodnot množina všech čísel celých. Funkční hodnoty pro všechna x ze zvolených intervalů jsou uvedeny v následující tabulce:

y	<-3;-2)	<-2;-1)	<-1;0)	<0;1)	<1;2)	<2;3)	<3;4)
$[x]$	-3	-2	-1	0	1	2	3

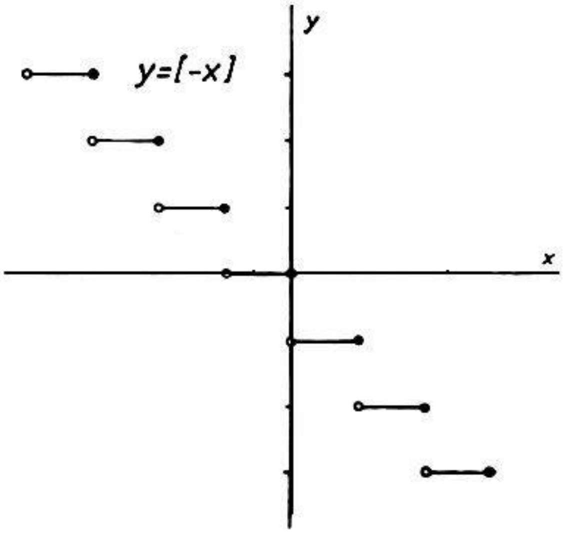
Graf funkce $y = [x]$ se tedy skládá z úseček, které připomínají stupně schodiště:



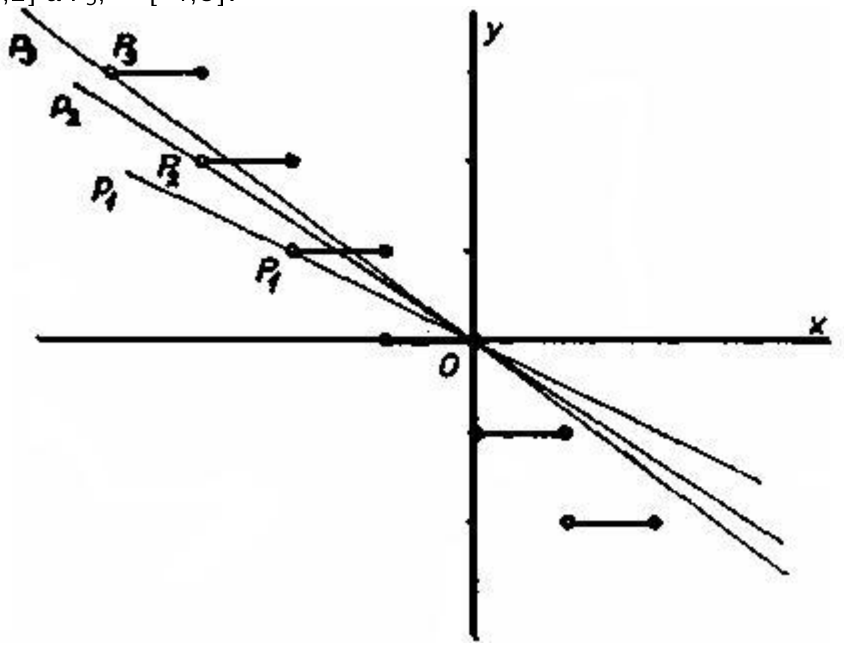
[1] Článek byl uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních, ročník 62, č. 2

Přitom levý koncový bod každé úsečky je bodem grafu dané funkce (znázorněno plným kolečkem), zatímco pravý koncový bod každé úsečky ke grafu této funkce nepatří (znázorněno prázdným kroužkem).

Podobným způsobem lze sestrojit rovněž graf funkce $y = [-x]$. Pro jeho konstrukci však můžeme využít i toho, že grafy funkcí $y = [x]$ a $y = [-x]$ jsou souměrné podle osy *y*. Z následujícího obrázku, na němž je graf funkce $y = [-x]$ znázorněn, je zřejmé, že jde opět o Večerníčkovo schodiště, „vylepšené" pouze určením příslušnosti koncových bodů jednotlivých stupňů k tomuto schodišti.



Ptáte se, jak to vše souvisí s problémem profesora Ypsilona? Všimněte si, kolik společných bodů s grafem funkce $y = [-a]$ mají přímky p_1, p_2 a p_3 procházející počátkem *O* a body $P_1 = [-2,1]$, $P_2 = [-3,2]$ a P_3, $= [-4,3]$.



Z obrázku je vidět, že pro přímku p_1 je to právě jeden bod (počátek *O*), pro přímku p_2 právě dva body a pro přímku p_3 právě tři body.

Jistě si umíte zdůvodnit, že pro každý bod $P_n = [-n-1;\ n]$, kde n je libovolné celé kladné číslo, platí, že přímka OP_n má s grafem funkce $y = [-x]$ právě n společných bodů. Vyjádříme-li ještě přímku OP_n rovnicí

$$y = -\frac{n}{n+1}x$$

dostáváme následující větu:

Pro každé celé číslo n má rovnice

$$-\frac{n}{n+1}x = [-x]$$

právě n kořenů v množině všech reálných čísel.

Je rovněž patrno, že z těchto n kořenů je právě jeden roven nule a že zbývající kořeny mají tu vlastnost, že v každém z intervalů (-2;-1), (-3;-2), (-4;-3),…,(-n;-n+1) leží právě jeden.
A nebyl by to ani profesor Ypsilon, kdyby neudal též způsob praktického využití svého objevu. Spočívá v tom, že si nemusíte zatěžovat paměť letopočty různých historických událostí, neboť si je můžete pomocí příslušné rovnice vypočítat. Chcete vědět, ve kterém roce n. l. čínský hvězdář *Jang Wei-t* zaznamenal výbuch supernovy, jež dala vznik Krabí mlhovině? Nemusíte hledat ani v paměti, ani v encyklopedických slovnících; stačí určit počet kořenů rovnice

$$-\frac{1054}{1055}x = [-x]$$

A protože víme, že tato rovnice má právě 1054 reálných kořenů, došlo k uvedené události v roce 1054 n. l.