Profesor Ypsilon na krosu Patamatikovem

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.

Na patamatikovské návsi bylo ve výroční den narození zakladatele patamatematiky, mistra Patamatika, neobyčejně rušno již od samého kuropění: prapory vlály, hudba hrála a množina osob proudících k Patamatikově rodné chaloupce byla konečná jen taktak. Zde se totiž nacházela startovní kancelář běhu Patamatikovem, na kterém se každoročně scházejí ctitelé patamatematiky a sportu z blízkého i vzdáleného okolí. V tomto přespolním běhu nestartují závodníci hromadně, ale jednotlivě v půlminutových intervalech, přičemž první běžec vybíhá na trať přesně ve chvíli, kdy hodiny na místní radnici ukazují 7 hodin 57 minut. Tento neobvyklý čas startu připomíná účastníkům krosu, že zakladatel patamatematiky po celou dobu své školní docházky začínal v tomto okamžiku svůj strhující běh do školní budovy vzdálené jeden kilometr a že jen málokdy byl v tomto závodě s časem poražen a obdržel poznámku o pozdním příchodu.

Novinkou letošního ročníku bylo označování přihlášených borců; startovní čísla nebyla tvořena čísly přirozenými, jak je ve sportovních soutěžích zvykem, ale kombinačními čísly $\binom{n}{k}$, kde n, k jsou celá kladná a $n \geq k$ (viz obr.).

Závodníci vybíhali na trať podle svých startovních čísel v pořadí určeném posloupností $\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{3}{1}, \binom{2}{2}, \binom{4}{1}, \binom{3}{2}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}, \binom{6}{1}, \binom{5}{2}, \binom{4}{3}, \binom{7}{1}, \binom{6}{2}, \binom{5}{3}, \binom{4}{4}$ která je utvořena takto: ze dvou kombinačních čísel $\binom{n}{k}$, $\binom{r}{s}$ „jde dříve“ to, jemuž přísluší menší z obou součtů $n + k$, $r + s$; je-li $n + k = r + s$, „jde dříve“ to kombinační číslo, jemuž náleží menší z obou čísel k, s. Je tedy v této posloupnosti např. číslo $\binom{55}{30}$ před číslem $\binom{60}{35}$, neboť je $65 + 30 < 60 + 36$, ale číslo $\binom{75}{10}$ je před číslem $\binom{55}{30}$, protože při rovnosti $75 + 10 = 55 + 30$ je $10 < 30$. Na základě všech výše uvedených údajů si každý účastník běhu vypočetl, v kolik hodin bude vybíhat na trať, a podle toho si rozvrhl čas na prohlídku patamatikovských památek. Posláním tohoto krosu není totiž jen boj s časem a zápolení o dech, ale i snaha o duchovní povznesení sportsmenů.

Hoříte-li touhou zúčastnit se příštího ročníku, měli byste se již nyní přesvědčit o tom, že tento výpočet zvládnete. Pokuste se proto určit, v kolik hodin na krosu Patamatikovem startoval letos profesor Ypsilon, jestliže měl startovní číslo $\binom{42}{16}$.

Určíme nejprve obecně, kolikátým členem uvažované posloupnosti kombinačních čísel je startovní číslo $\binom{n}{k}$. Za tímto účelem seskupíme členy této posloupnosti do skupin tak, aby každá dvě kombinační čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{r}{s}$ byla v téže skupině právě tehdy, když je $n + k = r + s$:

$$\left[\binom{1}{1}\right], \left[\binom{2}{1}\right], \left[\binom{3}{1}, \binom{2}{2}\right], \left[\binom{4}{1}, \binom{3}{2}\right], \left[\binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}\right], \left[\binom{6}{1}, \binom{5}{2}, \binom{4}{3}\right],$$
$$\left[\binom{7}{1}, \binom{6}{2}, \binom{5}{3}, \binom{4}{4}\right], \ldots$$

V první skupině je tedy pouze číslo $\binom{1}{1}$, ve druhé, jen číslo $\binom{2}{1}$, třetí jenom kombinační čísla $\binom{3}{1}$ a $\binom{2}{2}$, ve čtvrté pouze kombinační čísla $\binom{4}{1}$ a $\binom{3}{2}$ atd. Všimneme-li si, že na prvním místě m-té skupiny je kombinační číslo $\binom{m}{1}$, snadno určíme, v kolikáté skupině je číslo $\binom{n}{k}$. Vzhledem k tomu, že číslo $\binom{n}{k}$ patří do téže skupiny jako číslo $\binom{n+k-1}{1}$ a protože toto kombinační číslo je na prvním místě této skupiny,

je číslo $\binom{n}{k}$ v ($n + k$ - 1)-ní skupině.

Pořadové číslo členu $\binom{n}{k}$ dané posloupnosti - označíme je $p(n, k)$ - dostaneme zřejmě tak, že sečteme počty členů všech skupin, které jsou před skupinou obsahující číslo $\binom{n}{k}$, a k tomuto součtu přičteme ještě číslo k, neboť $\binom{n}{k}$ je ve své skupině na k-tém místě. Je tedy např.:

$$p(5, 1) = (1 + 1 + 2 + 2) + 1 = 7,$$
$$p(5, 2) = (1 + 1 + 2 + 2 + 3) + 2 = 11,$$
$$p(5, 3) = (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3) + 3 = 15.$$

Zavedeme-li pro počet členů m-té skupiny označení p_m, dostáváme pro pořadové číslo $p(n, k)$ členu $\binom{n}{k}$ v uvažované posloupnosti tento vztah:

$$p(n, k) = (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n+k-2}) + k.$$

Porovnáváním počtu členů jednotlivých skupin se můžete přesvědčit, že pro m sudé je $p_m = \frac{m}{2}$, zatímco pro m liché je $p_m = \frac{m+1}{2}$. Vztah pro $p(n, k)$ lze tedy ještě upravit v závislosti na tom, zda $n + k$ je číslo sudé nebo liché:

jestliže $n + k$ je sudé číslo, platí:

$$p(n,k) = \left(1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + \frac{n+k-2}{2} + \frac{n+k-2}{2}\right) + k = \frac{(n+k-2)(n+k)}{4} + k\,;$$

jestliže $n + k$ je liché číslo, platí:

$$p(n,k) = \left(1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + \frac{n+k-3}{2} + \frac{n+k-3}{2} + \frac{n+k-1}{2}\right) + k = \frac{(n+k-1)^2}{4} + k\,.$$

Dostáváme tento výsledek: kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je ve výše uvedené posloupnosti kombinačních čísel na místě $\frac{(n+k-2)(n+k)}{4} + k$ -tém, je-li $n + k$ sudé, a na místě $\frac{(n+k-1)^2}{4} + k$ -tém, je-li $n + k$ liché.

Pro startovní číslo $\binom{42}{16}$ profesora Ypsilona je tedy

$p(42,16) = \frac{(42+16-2)(42+16)}{4} + 16 = 828$, což znamená, že profesor Ypsilon vybíhal na trať patamatikovského krosu jako 828. závodník. Došlo k tomu v okamžiku, kdy od startu prvního závodníka uplynulo $\frac{827}{2}$ minut, tj. 6 hodin 53 minut 30 sekund. Profesor Ypsilon tedy vyběhl na trať, když patamatikovské hodiny ukazovaly 14 hodin 50 minut 30 sekund. Zlí jazykové tvrdí, že pak během několika okamžiků zmizel v hlubokém lese a že byl pátracími četami pořadatelů nalezen až krátce po půlnoci v hájovně Pod smrkem, s jejímž osazenstvem právě diskutoval o vzájemné souvislosti patamatematiky a přespolních běhů.