Dělitelnost v úlohách matematických soutěží

Příklad 1 (59. ročník MO, C-I-5)

Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší.

Řešení.

a) Předpokládejme nejprve, že nuly jsou na třetím a druhém místě zprava. Hledané číslo x má pak tvar $x = 1\,000a + b$, kde a je přirozené číslo (stejně jako v dalších případech) a b nenulová číslice. Podmínku zadání $1\,000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z nějž plyne, že b je násobek pěti. Vyhovuje tak jen $b = 5$ a $a = 4$, tedy $x = 4\,005$.

b) Má-li hledané číslo x nuly na čtvrtém a třetím místě zprava, je $x = 10\,000a + b$, kde b je dvojmístné číslo. Podmínku zadání $10\,000a + b = 89(100a + b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z nějž plyne, že b je lichý násobek čísla 25 (připomínáme, že x, a tedy ani b není dělitelné deseti). Odtud $b = 25$, $a = 2$ nebo $b = 75$, $a = 6$, tedy $x \in \{20\,025,\ 60\,075\}$.

c) Má-li hledané číslo x nuly na pátém a čtvrtém místě zprava, je $x = 100\,000a + b$, kde b je trojmístné číslo. Podmínku zadání $100\,000a + b = 89(1\,000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z nějž plyne, že b je lichý násobek čísla 125. Vyhovují pouze $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, tedy $x \in \{100\,125,\ 300\,375,\ 500\,625,\ 700\,875\}$.

d) Z předchozích případů vidíme, že pro hledané číslo x tvaru $x = 10^{n+2}a + b$, kde b je n-místné číslo, dostáváme podmínku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$ neboli $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkud pro $n \geq 4$ dostáváme podmínku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podle níž je b násobkem deseti. Žádné další x, které by vyhovovalo zadání, tedy neexistuje.

Závěr: Hledaná čísla jsou 4 005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625 a 700 875.

Příklad 2 (59. ročník MO, B-II-4)

Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 větší než původní číslo n. Určete všechna taková n.

Řešení.

Označíme-li a, b, c, d prvočísla, jejichž součinem je číslo n, platí rovnost

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = abcd + 2\,886.$$

Kdyby byla všechna čísla a, b, c, d lichá, bylo by na levé straně této rovnosti sudé číslo, kdežto na pravé straně číslo liché. Proto je některé z prvočísel a, b, c, d (například a) rovno dvěma. Dosazením dostaneme

$$3(b + 1)(c + 1)(d + 1) = 2bcd + 2\,886.$$

Protože čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ i $2\,886$ jsou dělitelná třemi, musí být dělitelné třemi i $2bcd$. Proto je některé z prvočísel b, c, d (například b) rovno třem. Dosazením dostaneme

$$12(c+1)(d+1) = 6cd + 2\,886,$$

po vydělení šesti

$$2(c+1)(d+1) = cd + 481$$

a po dalších úpravách

$$cd + 2c + 2d = 479,$$

$$(c+2)(d+2) = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23.$$

Předpokládáme-li $c \leq d$, máme vzhledem k nerovnosti $c+2 > 3$ dvě možnosti:
1. $c+2=7$, $d+2=69$, odtud $c=5$, $d=67$.
2. $c+2=21$, $d+2=23$, odtud $c=19$, $d=21$, což nevyhovuje, neboť 21 není prvočíslo.

Závěr: Jediné vyhovující n je tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2\,010$.

Příklad 3 (59. ročník MO, B-I-2)

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.

Řešení.

Počet kladných dělitelů čísla, jehož rozklad na prvočinitele má tvar

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

je $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_r+1)$. Proto číslo, které má přesně $6 = 3 \cdot 2$ kladných dělitelů, musí mít jeden z tvarů p^5 nebo p^2q, kde p a q jsou prvočísla.

Uvažujme nejdříve možnost p^5. Toto číslo má dělitele 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5; zřejmě

$$1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5.$$

Dva nejmenší dělitelé jsou jednomístní a další dva dvojmístní. Větší z nich, tedy p^3, ale není druhou mocninou přirozeného čísla.

Hledané číslo má tedy tvar p^2q a jeho dělitelé jsou 1, p, p^2, q, pq, p^2q. Je-li $p > q$, potom

$$1 < q < p < pq < p^2 < p^2q.$$

Dva dvojmístní dělitelé by byli p a pq, ale pq není druhou mocninou přirozeného čísla. Musí tedy být $p < q$. Ze všech šesti dělitelů jsou druhými mocninami přirozeného čísla jen 1 a p^2. Proto je p^2 větší ze dvou dvojmístných dělitelů a odtud vyplývá

$$1 < p < q < p^2 < pq < p^2q.$$

Dělitelé 1 a p jsou jednomístní, q a p^2 jsou dvojmístní, pq aspoň trojmístný a p^2q čtyřmístný. Odtud vyplývá $p \in \{5,\ 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2q < 10\,000$.
Pro $p = 5$ dostáváme $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, těmto podmínkám žádné prvočíslo q nevyhovuje.
Pro $p = 7$ dostáváme $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; těmto podmínkám vyhovují $q \in \{23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47\}$.

Závěr: Na tabuli je napsáno jedno z následujících sedmi čísel: $49 \cdot 23 = 1\,127$, $49 \cdot 29 = 1\,421$, $49 \cdot 31 = 1\,519$, $49 \cdot 37 = 1\,813$, $49 \cdot 41 = 2\,009$, $49 \cdot 43 = 2\,107$, $49 \cdot 47 = 2\,303$.

Příklad 4 (59. ročník MO, B-I-4)

Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.

Řešení.

Označme prostřední z hledaných čísel a. Součet čísel $a - 1\,004$, $a - 1\,003$, …, $a + 1\,003$, $a + 1\,004$ je $2\,009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, přičemž $2\,004 \leq a \leq 8\,995$. Má platit

$$41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$$

pro vhodné přirozené číslo n. Protože

$$2\,009 \cdot 2\,004 \leq n(n+1)(n+2) < (n+1)^3,$$

musí platit $n + 1 > \sqrt[3]{2\,009 \cdot 2\,004}$, a tedy $n \geq 159$. Podobně z nerovností

$$2\,009 \cdot 8\,995 \geq n(n+1)(n+2) > n^3$$

dostáváme $n < \sqrt[3]{2\,009 \cdot 8\,995}$, čili $n \leq 262$.

Součin $n(n+1)(n+2)$ má být dělitelný čísly 41 a 49. Žádný z činitelů n, $n+1$, $n+2$ nemůže být dělitelný oběma čísly 41 i 49, neboť $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Sedmi je dělitelný nanejvýš jeden z činitelů n, $n+1$, $n+2$; proto musí být některý z nich dělitelný číslem 49. Budeme tedy mezi čísly 159, 160, …, 264 hledat taková dvě, jejichž rozdíl je 1 nebo 2, přičemž jedno z nich je dělitelné číslem 41 a druhé číslem 49. Násobky čísla 41 v uvedeném rozsahu jsou 164, 205 a 246, násobky čísla 49 jsou 196 a 245. Vyhovující čísla jsou tedy 245 a 246 a my máme dvě možnosti:
a) $n = 245$, $n + 1 = 246$, $n + 2 = 247$, a tedy

$$a = \frac{245 \cdot 246 \cdot 247}{2\,009} = 7\,410$$

a hledaná čísla jsou 6 406, 6 407, …, 8 414;

b) $n = 244$, $n + 1 = 245$, $n + 2 = 246$, a tedy

$$a = \frac{244 \cdot 245 \cdot 246}{2\,009} = 7\,320$$

a hledaná čísla jsou $6\,316, 6\,317, \ldots, 8\,324$.

Příklad 5 (58. ročník MO, A-I-3)

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

Řešení.

Předpokládejme, že přirozená čísla x, y a prvočíslo p vyhovují rovnici

$$\frac{xy^2}{x+y} = p. \tag{1}$$

Největší společný dělitel čísel x, y označme d. Potom $x = da$ a $y = db$, kde přirozená čísla a, b jsou (již) nesoudělná. Po dosazení do rovnosti (1), odstranění zlomku násobením a po vydělení kladným číslem d dostaneme

$$d^2ab^2 = p(a + b). \tag{2}$$

Čísla a a b jsou nesoudělná, proto jsou taková i čísla b^2, $a + b$ z různých stran rovnosti (2). To ale znamená, že $b^2|p$. Prvočíslo p má pouze dva dělitele: čísla 1 a p, druhé z nich však není druhou mocninou, proto nutně platí $b = 1$. Po dosazení do (2) obdržíme

$$d^2a = p(a + 1). \tag{3}$$

Zopakujme podobnou úvahu jako dříve. Protože a dělí levou stranu rovnosti (3), dělí i její pravou stranu, což vzhledem ke zřejmé nesoudělnosti čísel a, $a+1$ vede k závěru, že $a|p$. Platí proto buď $a = 1$, nebo $a = p$. Oba případy nyní posoudíme odděleně.

Po dosazení $a = 1$ do (3) dostaneme $d^2 = 2p$. Protože p je prvočíslo, číslo $2p$ je druhou mocninou jedině v případě $p = 2$. Potom rovněž platí $d = 2$ a výsledek vede k první vyhovující dvojici $x = da = 2$, $y = db = 2$.

Po dosazení $a = p$ do (3) a vydělení kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$, neboli $p = (d + 1)(d - 1)$. Takový rozklad prvočísla p na dva činitele ($d - 1 < d + 1$) je jediný: $d - 1 = 1$ a $d + 1 = p$. Odtud dostáváme $d = 2$, $p = 3$, takže druhá vyhovující dvojice je $x = da = dp = 6$ a $y = db = 2$.

I když můžeme provést zkoušku obou řešení snadným dosazením do rovnice (1), při našem postupu taková kontrola není nezbytná, neboť jsme rovnici v daném oboru upravovali ekvivalentně.

Závěr: Úloze vyhovují právě dvě dvojice $(x,\ y)$, a to $(2,\ 2)$ a $(6,\ 2)$.