Dělitelnost v úlohách matematických soutěží

1. **(MO, 50. ročník, kategorie Z5)**
   Martin šel do obchodu. Na účtence bylo

   18,50
   23,10
   12,00
   32,90
   13,50
   100,00

   Koupil 11 lízátek, 9 žvýkaček, 7 perníků, 3 nanuky a 1 čokoládu. Kolik stály jednotlivé sladkosti?

   Řešení:
   Musíme vyšetřit dělitelnost čísly - 1, 3, 7, 9 a 11.

   - číslo 18,50 je dělitelné jen 1, tedy čokoláda stojí 18,50 Kč,
   - číslo 12,00 je dělitelné jen 3, tedy 3 nanuky stojí 12,00 Kč,
   - číslo 32,90 je dělitelné jen 7, tedy 7 perníků stojí 32,90 Kč,
   - číslo 23,10 je dělitelné 3, 7 a 11, tedy 11 lízátek stojí 23,10 Kč,
   - zbývá 13,50, což je cena 9 žvýkaček.

2. **(MO, 45. ročník, kategorie Z6)**
   Hvězdičky v pětimístném čísle 3*4*8 nahraďte číslicemi tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné 24. Najděte všechny možnosti.

   Řešení:
   Má-li být hledané číslo dělitelné 24, musí být dělitelné 3 a 8.

   - Číslo 3*4*8 je dělitelné 8, právě tehdy když je číslo 4*8 dělitelné 8. V úvahu tedy připadají jen možnosti: 408, 448, 488.
   - Hledané číslo musí být dělitelné 3 a tedy v číslech 3*408, 3*448, 3*488 nahradíme hvězdičku takovou číslicí, aby ciferný součet vzniklého čísla byl dělitelný 3. Všechna řešení jsou: 30408, 33408, 36408, 39408, 32448, 35448, 38448, 31488, 34488, 37488.

3. **(MO, 48. ročník, kategorie Z7)**
   V čísle 71 839 664 518 nahraďte některé číslice čtyřkami tak, aby vzniklo co nejmenší číslo dělitelné 18.

   Řešení:
   Číslo je dělitelné číslem 18, jestliže je dělitelné čísly 9 a 2, tj. musí být sudé a jeho ciferný součet být dělitelný 9. Když nahradíme všechny číslice větší než 4 čtyřkami dostaneme číslo 41 434 444 414. Jeho ciferný součet je 37, musíme tedy přidat 8, 17 nebo 26, aby byl ciferný součet dělitelný 9. Hledané číslo je 41 434 444 548.

4. **(MO, 41. ročník, kategorie Z8)**
Před dané trojmístné číslo napíšeme jeho osminásobek. Vznikne tak šesti nebo sedmimístné číslo (např. pro číslo 103 vznikne číslo 824 103). Ukažte, že ve všech případech je vzniklé číslo dělitelné aspoň třemi různými prvočísly.

Řešení:
Když před číslo x napíšeme jeho osminásobek, dostaneme číslo

$$8 \cdot x \cdot 1\ 000 + x = 8\ 001x$$

Z rozkladu čísla 8 001 na součin prvočísel dostaneme, že $8\ 001 = 3^2 \cdot 7 \cdot 127$. Vzniklé číslo je tedy vždy dělitelné aspoň třemi prvočísly a to 3, 7 a 127.

5. **(MO, 50. ročník, kategorie Z9)**
Najděte největší trojciferné přirozené číslo n, pro které platí: Zbytek po dělení čísla n devíti je o 8 menší než zbytek po dělení čísla n třinácti.

Řešení:
Ze zadání úlohy plyne, že číslo n lze napsat ve dvou tvarech:

$$n = 9k + z \ \text{ a také } \ n = 13l + z + 8,$$

kde přirozená čísla k, l, z splňují podmínky

$$11 \le k \le 111, \quad 8 \le l \le 76, \quad 0 \le z \le 4.$$

Porovnáním obou vyjádření čísla n dostaneme, že $n = 922$.

6. **(Matmix, 1(3), 1997/98, Metodické centrum Bratislava)**
Najděte všechna čtyřmístná čísla končící 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí.

Řešení:
Je zřejmé, že hledané číslo nemůže obsahovat číslice 0, 2, 4, 6 a 5. V tomto čísle se tedy mohou vyskytovat pouze číslice 1, 3, 7 a 9. Vzhledem k tomu, že poslední číslice je 9, vyplývá z podmínek dělitelnosti 9, že součet zbývajících tří číslic musí být dělitelný 9. V úvahu připadají trojice (3,3,3), (1,1,7) a (9,9,9). Úloha má tři řešení: 3339, 7119 a 9999.

7. (Pytagoriáda, 21. ročník, P6, Slovensko)
Určete součet všech trojmístných přirozených čísel dělitelných 3, která lze vytvořit z číslic 2, 3 a 4. Číslice se nemohou opakovat.

Řešení:
Každé trojmístné číslo vytvořené z číslic 2, 3 a 4 (bez opakování) je dělitelné 3. Jsou to čísla 234, 243, 324, 342, 423 a 432. Jejich součet je 1998.

8. (Matematický klokan 2002, kategorie Kadet)
Uvažujte množinu všech čtyřmístných čísel tvořených číslicemi 1, 2, 3 a 4 bez opakování. Kolik je součet všech čísel této množiny?

Řešení:
Hledaná množina má 24 čísel. Každá z číslic se vyskytuje právě 6krát na každém místě. Tedy

- číslice 1: $6 \cdot 1 \cdot 1000 + 6 \cdot 1 \cdot 100 + 6 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 6\ 666$
- číslice 2: $6 \cdot 2 \cdot 1000 + 6 \cdot 2 \cdot 100 + 6 \cdot 2 \cdot 10 + 6 \cdot 2 = 13\ 332$
- číslice 3: $6 \cdot 3 \cdot 1000 + 6 \cdot 3 \cdot 100 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 6 \cdot 3 = 19\ 998$
- číslice 4: $6 \cdot 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 4 \cdot 100 + 6 \cdot 4 \cdot 10 + 6 \cdot 4 = 26\ 664$

Hledaný součet je 66 660.

9. (Jihočeský matematický korespondenční seminář, 1989/1990)
Při otočení listu papíru v jeho rovině o $180°$ se nezmění význam číslic 0, 1, 8 a číslice 6 a 9 přecházejí navzájem jedna na druhou. Zápis ostatních číslic při tomto otočení ztrácí smysl. Kolik existuje sedmimístných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis se nezmění otočením listu papíru o $180°$? Čemu se rovná součet těchto čísel? Kolik je mezi těmito čísly čísel dělitelných 4?

Řešení:

a) Pro volbu první číslice máme 4 možnosti (1, 6, 9, 8), pro volbu druhé a třetí číslice máme 5 možností (navíc ještě 0), pro volbu 4., tj. prostřední číslice máme 3 možnosti (0, 1, 8). Ostatní číslice sedmimístného čísla jsou pak určeny jednoznačně. Celkem tedy máme $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300$ takových čísel.
b) Výsledný součet je 1 959 460 200.
c) Čtyřmi jsou dělitelná čísla končící na dvojčíslí 08, 68, 88, 16 a 96. Celkem jich je 75.

10. (Canadian Mathematics Competition, 2006, Grade 10)
Když zaměníme u čísla 14 pořadí číslic, dostaneme číslo 41, které je o 27 větší než původní číslo. Určete všechna dvojmístná čísla, které se po záměně obou číslic zvětší o 27.

Řešení:
Dvojmístné číslo vyjádříme ve tvaru $10a + b$. Otočením číslic dostaneme číslo $10b + a$. Rozdíl obou čísel je

$$(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a).$$

Má-li rozdíl být 27, vidíme, že $b - a = 3$. Řešením tedy jsou čísla: 14, 25, 36, 47, 58 a 69.