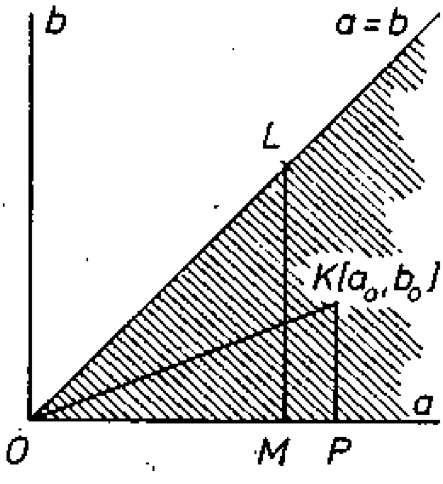
Ypsilonovské trojúhelníky

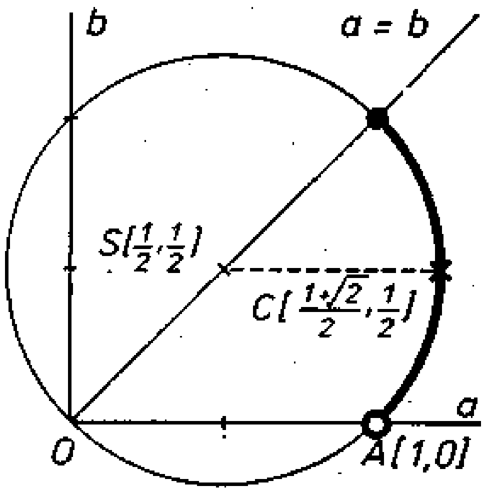
Jakže?! Nikdy jste o těchto trojúhelnících neslyšeli? Máte tedy ojedinělou možnost, nechcete-li zaostat, prostudovat tento článek, který je jediným zdrojem informací o těchto pozoruhodných geometrických útvarech.

Ypsilonovským trojúhelníkem se nazývá každý pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech *a, b,* pro něž platí
$a^2 + b^2 = a + b.$

Nazývají se tak na počest profesora Ypsilona, který jejich studiu věnoval značnou část svého plodného života, a to čtvrteční večer mezi 22. a 24. hodinou dne 31. 12. 1981.
Ypsilonovský je např. pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami o velikostech $a = b = l$, neboť platí:
$a^2 + b^2 = l^2 + l^2 = l + l = a + b.$
Snadno se můžete přesvědčit, že i pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami o velikostech $a = 1{,}2$ a $b = 0{,}6$ či $a = \frac{20}{17}$ a $b = \frac{5}{17}$ jsou ypsilonovské.
Existují však i jiné ypsilonovské trojúhelníky? Je všech ypsilonovských trojúhelníků nekonečně mnoho nebo je jejich počet konečný? Na tyto otázky se pokusíme odpovědět; budeme přitom důsledně využívat možnosti, že označení *a, b* velikostí odvěsen každého pravoúhlého (a tedy i ypsilonovského) trojúhelníka lze vždy zvolit tak, aby bylo $a \geq b$.

Každý pravoúhlý trojúhelník je jednoznačně určen velikostmi *a, b* svých odvěsen, takže mu lze přiřadit jedinou uspořádanou dvojici [*a*, *b*] čísel *a*, *b,* pro něž platí $a \geq b > 0$. Také obráceně, každá uspořádaná dvojice čísel *a, b,* pro něž je $a \geq b > 0$, určuje jediný pravoúhlý trojúhelník, jeho odvěsny mají velikosti *a, b.* Znázorníme-li množinu všech těchto uspořádaných dvojic ve zvolené kartézské soustavě souřadnic, dostaneme oblast, jejíž část je znázorněna šrafováním na obr. 1.





Obr. 1 **Obr. 2**

Hranice této oblasti jsou tvořeny polopřímkami *OP* a *OL;* první z nich do této oblasti nepatří, zatímco každý bod polopřímky *OL s* výjimkou bodu O prvkem znázorněné množiny je. Z toho, co bylo řečeno o vzájemném přiřazení uspořádaných dvojic [*a, b*], splňujících podmínku $a \geq b > 0$, a pravoúhlých trojúhelníků, vyplývá, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech bodů uvedené oblasti na množinu všech pravoúhlých trojúhelníků. Tak např. bodu *L* této oblasti odpovídá pravoúhlý trojúhelník *OML;* pravoúhlému trojúhelníku *OPK* s odvěsnami o velikostech $a_0 \geq b_0 > 0$ odpovídá bod *K* [a_0, b_0] ležící v dané oblasti.

Které body vyznačené oblasti odpovídají ypsilonovským trojúhelníkům? Jsou to zřejmě právě ty body této oblasti, pro jejichž souřadnice *a*, *b* platí
$a^2 + b^2 - a - b = 0$.
Jednoduchou úpravou této rovnice na tvar

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

zjistíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ a o poloměru r = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ypsilonovským trojúhelníkům tedy odpovídají právě ty body této kružnice, které leží ve vyšrafované oblasti; průnikem obou těchto množin bodů je silně vytažený oblouk na obr. 2, k němuž patří bod *B [l, 1], nikoli* však bod *A* [l, 0]. Každý bod tohoto oblouku odpovídá jedinému ypsilonovskému trojúhelníku a obráceně. Např. bodu *C* $\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right]$ odpovídá pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, který je ypsilonovský, neboť platí:

$$a^2+b^2=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=a+b\ .$$

Ypsilonovskému trojúhelníku s velikostmi odvěsen *a* = *b* = I odpovídá bod *B* [I, 1], který patří tomuto oblouku; všimněte si rovněž, že tento trojúhelník je jediným rovnoramenným ypsilonovským trojúhelníkem, který existuje!

Ypsilonovských trojúhelníků je tedy nekonečně mnoho; jak je patrno ze souřadnic bodů uvažovaného oblouku a z jejich vzdálenosti od bodu O, platí pro velikosti *a, b* ($a \geq b$) odvěsen a velikost *c* přepony každého ypsilonovského trojúhelníka tyto podmínky:

$$a \in \left\langle 1, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right\rangle, b \in \left(0,1\right\rangle, c \in \left(1, \sqrt{2}\right\rangle .$$

Všimněme si ještě toho, že ke každému $a \in \left\langle 1, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, pro něž je

$a \neq 1, a \neq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ existují právě dvě $b \in \left(0,1\right\rangle$ tak, že bod [*a*, *b*] leží na uvažovaném oblouku. Znamená to, že ke každé velikosti *a* větší odvěsny ($a \neq 1, a \neq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$)z uvedeného intervalu existují právě dva ypsilonovské trojúhelníky: velikosti b_1, b_2 jejich menších odvěsen jsou „souměrné podle čísla $\frac{1}{2}$ tj. platí pro ně $\frac{b_1+b_2}{2}=\frac{1}{2}$.

Tak např. kromě pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o velikostech *a* = 1,2 a *b* = 0,6 (o němž víme, že je ypsilonovský) musí existovat ještě jeden ypsilonovský trojúhelník s odvěsnou velikosti *a* = 1,2, velikost b_2 jeho druhé odvěsny můžeme určit ze vztahu $\frac{0{,}6+b_2}{2}=\frac{1}{2}$, odkud je b_2 = 0,4. Vskutku
platí: $a^2+b_2^2=1{,}2^2+0{,}4^2=1{,}6=1{,}2+0{,}4=a+b_2$.

Naproti tomu velikostí $b \in \left(0,1\right\rangle$ své menší odvěsny je ypsilonovský trojúhelník určen jednoznačně, neboť (jak je patrno z obr. 2) existuje k tomuto b jediné $a \in \left\langle 1, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

Ypsilonovský trojúhelník je jednoznačně určen také velikostí $c \in \left(1, \sqrt{2}\right\rangle$ své přepony.

Můžeme tedy říci, že ypsilonovský trojúhelník s odvěsnami o velikostech $a_1 \geq b_1$ a přeponou o velikosti c_1 je shodný s ypsilonovským trojúhelníkem s velikostmi $a_2 \geq b_2$ odvěsen a c_2 přepony právě tehdy, když platí $b_1 = b_2$ nebo $c_1 = c_2$. Ke shodnosti obou trojúhelníků však nestačí rovnost $a_1 = a_2$.

Jak jste viděli, mají ypsilonovské trojúhelníky celou řadu zajímavých vlastností. Objevíte-li některé další, dejte laskavě profesorovi Ypsilonoví vědět.