Profesor Ypsilon a krychle nad přeponou

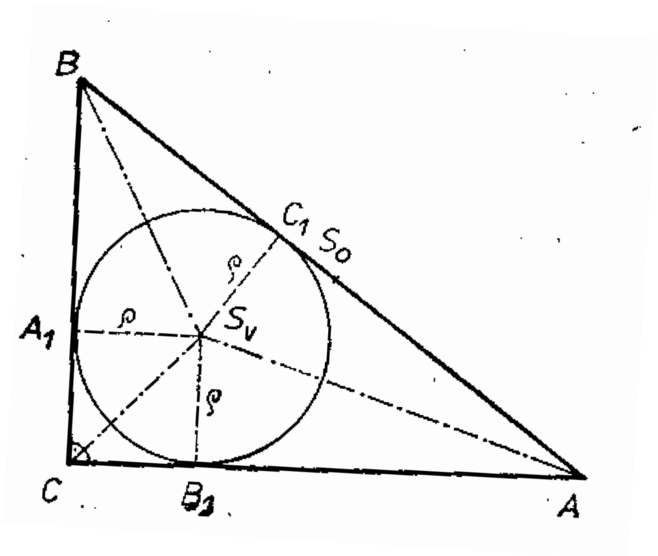
U příležitosti nedožitého 2562. výročí narození Pythagory ze Samu (asi 580 př. n. l. – 500 př. n. l.), po němž je nazvána známá věta o pravoúhlém trojúhelníku, předložil profesor Ypsilon svým žákům tento problém:

Mějme dán libovolný pravoúhlý trojúhelník s přeponou o velikosti *c* a s odvěsnami o velikostech *a*, *b*. *Z* Pythagorovy věty vyplývá, že ve vztahu

$$a^2 + b^2 = c^2 + d_2$$

pro tento trojúhelník je $d_2 = 0$. Určete d_1, d_3 tak, aby v tomto trojúhelníku platily analogické vztahy

$$a + b = c + d_1,\ a^3 + b^3 = c^3 + d_3 .$$



Obr. I

Určíme nejprve číslo d_1 , a to pomocí pravoúhlého trojúhelníku *ABC* na obr. I, v němž je sestrojena i kružnice tomuto trojúhelníku vepsaná; má střed S_v a dotýká se stran *BC*, *CA*, *AB* po řadě v bodech A_1, B_1, C_1. Velikost jejího poloměru označíme ρ. Pro součet velikostí obou odvěsen platí

$$a + b = |BA_1| + |A_1C| + |CB_1| + |B_1A|.$$

Uvědomíme-li si, že rovnoběžník $A_1CB_1S_v$ je čtverec, máme

$$\rho = |A_1C| = |S_vB_1| = |C B_1| = |S_vA_1| \text{ , dále též}$$

$$|BA_1| = |BC_1|,\ |A B_1| = |C_1A|.$$

Dosazením dostaneme

$$a + b = |BC_1| + |C_1A| + |S_vB_1| + |S_vA_1| = c + 2\rho.$$

Je tedy

$$d_1 = 2\rho.$$

Vzhledem k tomu, že v pravoúhlém trojúhelníku je střed S_0 kružnice opsané středem přepony, platí pro poloměr *r* kružnice opsané: $c = 2r$;
máme též

$$a + b = 2r + 2\rho,$$

což znamená: V každém pravoúhlém trojúhelníku je součet velikostí odvěsen roven součtu průměru kružnice opsané a průměru kružnice vepsané.
K určení čísla d_3 použijeme známé rovnosti výrazů

$$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2),$$

do níž dosadíme

$$a + b = c + 2\rho,\ a^2 + b^2 = c^2,\ ab = 2S,$$

kde *S* je obsah daného pravoúhlého trojúhelníku.
Dostaneme tak

$$a^3 + b^3 = (c + 2\rho)\ (c^2 - 2S).$$

Z obr. I snadno zjistíme, že obsah *S* trojúhelníku *ABC* je roven součtu obsahů trojúhelníků CAS_v, CBS_v a ABS_v, jež všechny mají výšku ρ, je tedy

$$S = \frac{a+b+c}{2}\cdot\rho = \frac{2\rho+2c}{2}\cdot\rho = (\rho+c)\rho\ .$$

Dosazením za S do předchozího vztahu získáme

$$a^3 + b^3 = (c + 2\rho)\ [\ c^2 - 2(\rho + c)\ \rho],$$

což po jednoduché úpravě dává

$$a^3 + b^3 = c^3 - 2\rho^2(3c + 2\rho).$$

Vyjádříme-li ještě výraz $3c$ pomocí poloměru kružnice opsané, dostaneme

$$a^3 + b^3 = c^3 - 4\rho^2(3r + \rho),$$

takže

$$d_3 = - 4\rho^2(3r + \rho).$$

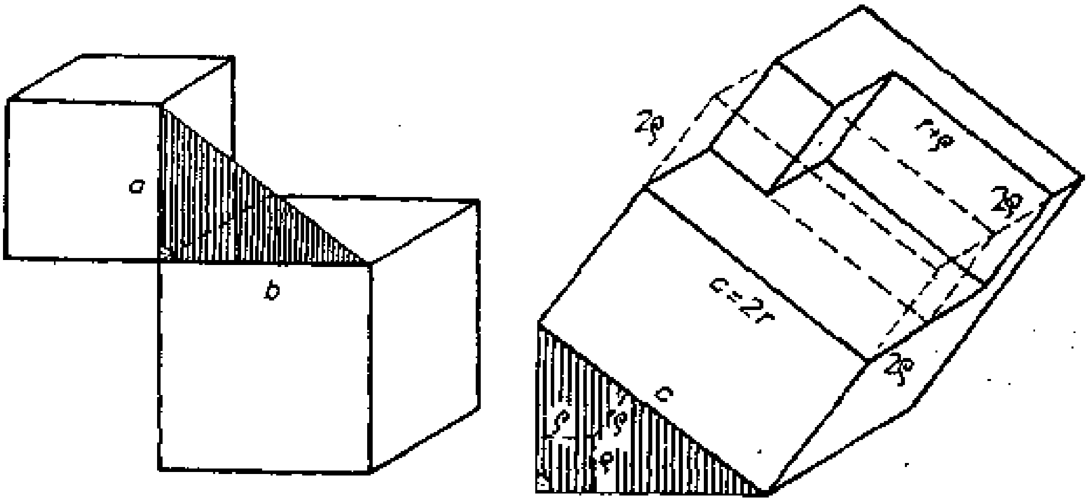
Získaný výsledek je obsahem věty, kterou vděční studenti nazvali větou Ypsilonovou:

Součet objemů krychlí nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku je roven objemu krychle nad přeponou zmenšenému o objem pravidelného čtyrbokého hranolu s podstavnou hranou 2ρ a výškou $3r + \rho$, kde ρ a r jsou po řadě poloměry kružnice vepsané a opsané tomuto pravoúhlému trojúhelníku.

Sám profesor Ypsilon však použil při grafickém znázornění tuto variantu odvozené rovnosti

$$a^3 + b^3 = c^3 - 4\rho^2\ .\ 2r - 4\rho^2\ .\ (r + \rho).$$

Na obr. 2 tuto novou rovnost vyjádřil rovností objemů zobrazených těles; z krychle nad přeponou jsou vyříznuty dva kvádry, jejichž rozměry lze z obrázku přečíst.



Obr 2.

Na závěr upozornil studenty na pozoruhodnou věc, kterou odvodili:
V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o velikostech a, b a s přeponou o velikosti c platí:

$$a + b > c, \qquad a^2 + b^2 = c^2, \qquad a^3 + b^3 < c^3.$$