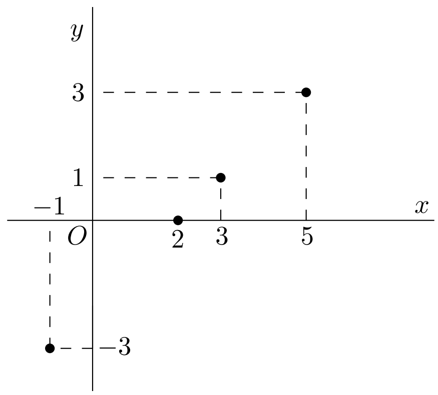
Prokládání polynomiální funkce zadanými body

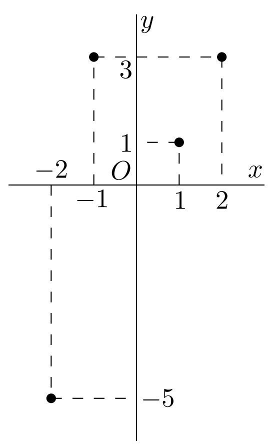
Karel Pazourek

Představte si, že vám někdo zadá v souřadné soustavě několik bodů a řekne: „Najděte nějakou funkci, jejíž graf prochází všemi zadanými body.“ Pokud nebude zákeřný a zadá body tak, jako na následujícím obrázku, pak je jedno řešení nasnadě, stačí body proložit přímku, tedy najít předpis lineární funkce.



Pokud ale budou body rozmístěny v rovině nahodileji, celý problém bude o mnoho složitější. V praxi se proto používá takzvaná **polynomiální interpolace**, tj. konstrukce polynomiální funkce[1], jejíž graf prochází danými body. Důvod je prostý: Polynom je jednoduchý výraz, navíc se snadno zadává v počítačových aplikacích.
Ukažme si pro ilustraci příklad:

Příklad: Najděte polynomiální funkci f, jejíž graf pochází body $[-2;-5]$, $[-1;3]$, $[1;1]$, $[2;3]$.



[1]Funkce, jejíž předpis má tvar polynomu (mnohočlenu). Stupeň této funkce je stupeň onoho mnohočlenu, např. lineární funkce je polynomiální funkce stupně 1, kvadratická funkce má stupeň 2, kubická stupeň 3 atd.

Řešení 1: Máme dány čtyři body, kterými má graf funkce procházet. Tedy klademe čtyři podmínky na funkci, proto budeme hledat předpis kubické funkce

$$f:\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou čtyři neznámé parametry.[2] Ze zadání pak dostáváme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} -5 = f(-2) &= a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d, \\ 3 = f(-1) &= a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d, \\ 1 = f(1) &= a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d, \\ 3 = f(2) &= a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d. \end{aligned}$$

Přepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} -5 &= -8a + 4b - 2c + d, \\ 3 &= -a + b - c + d, \\ 1 &= a + b + c + d, \\ 3 &= 8a + 4b + 2c + d. \end{aligned}$$

Sečtením a odečtením čtvrté a první rovnice, respektive třetí a druhé rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} -2 &= 8b + 2d, \\ 8 &= 16a + 4c, \\ 4 &= 2b + 2d, \\ -2 &= 2a + 2c, \end{aligned}$$

odtud již snadno vyjádříme $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = 3$, tedy hledaná funkce má předpis

$$f:\ y = x^3 - x^2 - 2x + 3.$$

Existuje však jiný postup: Můžeme zkonstruovat **Lagrangeův interpolační polynom** $L(x)$. Ten nám rovnou řekne, jak jednotlivé koeficienty spočítat. Ukážeme si příklad právě kubického Lagrangeova polynomu.
Nechť jsou dány čtyři body $[a_1;\ h_1]$, $[a_2;\ h_2]$, $[a_3;\ h_3]$, $[a_4;\ h_4]$, kterými má graf funkce procházet. Konstrukci Lagrangeova polynomu si rozdělíme do dvou kroků:

1. Spočtěme polynomy

$$l_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}, \qquad l_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)},$$
$$l_3(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}, \qquad l_4(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}.$$

[2] Hledat polynomiální funkci vyššího stupně je zbytečné, dostali bychom více parametrů a nekteré bychom si mohli zvolit. Například pokud bychom hledali funkci s předpisem $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, pak bychom měli jeden parametr volný; to by nám umožnilo položit $a = 0$ a převedli bychom řešení na případ výše. Ostatně ani v uvedeném řešení nemáme zajištěno, že obdržíme nenulový koeficient u nejvyšší mocniny proměnné, je možné, že nakonec vyjde předpis polynomiální funkce nižšího stupně.

Všimněte si, že když spočítáte hodnotu $l_1(x)$ v jiném zadaném bodě než v a_1, vyjde vám 0; přitom $l_1(a_1) = 1$.

2. Pak Langrangeův polynom má tvar

$$L(x) = h_1 \cdot l_1(x) + h_2 \cdot l_2(x) + h_3 \cdot l_3(x) + h_4 \cdot l_4(x).$$

Přijde vám to složité? Tak si uvědomte, že v uvedeném tvaru za vás může všechny hodnoty spočítat počítač! Můžete si zkusit takový polynom sestrojit v tabulkovém procesoru (např. MS Excel). Zobecněný postup pak lze použít pro libovolný počet zadaných bodů. My si tuto metodu ukážeme ještě na příkladu, se kterým jsme začínali:

Řešení 2: Ze zadání máme

$$\begin{array}{llll} a_1 = -2; & a_2 = -1; & a_3 = 1; & a_4 = 2; \\ h_1 = -5; & h_2 = 3; & h_3 = 1; & h_4 = 3. \end{array}$$

1. Spočtěme polynomy $l_1(x)$, $l_2(x)$, $l_3(x)$, $l_4(x)$:

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{-12}, \\ l_2(x) &= \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} = \frac{(x^2-4)(x-1)}{1\cdot(-2)\cdot(-3)} = \frac{x^3-x^2-4x+4}{6}, \\ l_3(x) &= \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} = \frac{(x^2-4)(x+1)}{3\cdot 2\cdot(-1)} = \frac{x^3+x^2-4x-4}{-6}, \\ l_4(x) &= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{4\cdot 3\cdot 1} = \frac{x^3+2x^2-x-2}{12}. \end{aligned}$$

2. Spočtěme samotný polynom:

$$\begin{aligned} L(x) &= h_1 \cdot l_1(x) + h_2 \cdot l_2(x) + h_3 \cdot l_3(x) + h_4 \cdot l_4(x) = \\ &= -5 \cdot \frac{x^3-2x^2-x+2}{-12} + 3 \cdot \frac{x^3-x^2-4x+4}{6} + \\ &\qquad\qquad +1 \cdot \frac{x^3+x^2-4x-4}{-6} + 3 \cdot \frac{x^3+2x^2-x-2}{12} = \\ &= \frac{1}{12}\big(5(x^3-2x^2-x+2) + 6(x^3-x^2-4x+4) - \\ &\qquad\qquad -2(x^3+x^2-4x-4) + 3(x^3+2x^2-x-2)\big) = \\ &= \frac{1}{12}\big(12x^3 - 12x^2 - 24x + 36\big) = x^3 - x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Vyšel nám tak stejný polynom jako první metodou. (To není náhoda, uvědomte si, proč tomu tak je, kolik máme volných parametrů.)

A na závěr jeden „žert“. Jistě jste někdy v kvízech viděli úkol typu „Doplňte v číselné řadě chybějící číslo“. Tak například řadu $1, 2, 3, ?$ byste nejspíše doplnili čtyřkou, neboť se jedná o první čtyři přirozená čísla. Ale také můžete říci, že jsou to hodnoty polynomiální funkce $f: \; y = x$ v bodech 1, 2, 3, 4. Kdybychom však doplnili libovolné jiné číslo, mohli bychom tvrdit, že se jedná o hodnoty nějaké polynomiální funkce v bodech 1, 2, 3, 4. Tak schválně, jaké funkci odpovídá řada $1, 2, 3, 0$?[3]

[3]Jde o funkci $f : y = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{22}{3}x + 4$.