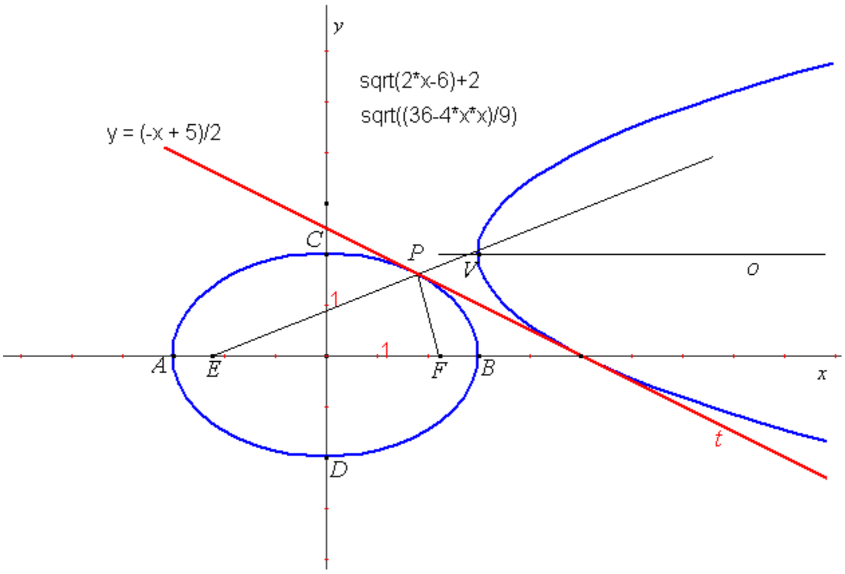
Určete společné tečny kuželoseček, které jsou dány rovnicemi:

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\ (y-2)^2=2(x-3)$.

Grafické řešení úlohy v Cabri geometrii

Zakreslíme elipsu a parabolu. Na elipse zvolíme libovolný bod *P* a sestrojíme v něm tečnu jako osu vnějšího úhlu průvodičů. Bodem pohybujeme po elipse a hledáme polohy, ve kterých se tečna elipsy dotýká také paraboly. Experimentálně takto zjistíme počet i rovnice tečen. Pokud jsou koeficienty rovnice přímky čísla iracionální, objeví se jen jejich přibližné hodnoty.



Volba strategie analytického řešení

Z grafického řešení lze odhadnout, že tečna, která je rovnoběžná s osou *y*, bude procházet vrcholy *B*, *V*. Ostatní tečny jsou různoběžné s osou *y* a lze je vyjádřit rovnicemi ve směrnicovém tvaru $y=kx+q$. Zapíšeme dvě soustavy rovnic. V první bude rovnice elipsy a přímky, ve druhé paraboly a přímky. Hledáme takové hodnoty koeficientů *k*, *q*, pro které je řešení každé soustavy právě jedno.

Řešení soustav s využitím programu Derive

Tečna určená body vrcholy *B*, *V*, má rovnici $x=3$. Je kolmá k ose elipsy i paraboly. Proto má s každou kuželosečkou společný právě jeden bod. Je užitečné to ještě doložit algebraicky. Dosazením $x=3$ do rovnice elipsy dostaneme $\dfrac{3^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Tato rovnice má jediné řešení $y=0$. Řešení soustavy je tedy pouze uspořádaná dvojice $[3;0]$. Obdobně to lze dokázat i pro parabolu.

Pro určení dalších tečen užijeme program Derive. Nejdříve řešíme soustavu rovnic elipsy a přímky. Dosazením z lineární rovnice do kvadratické dostaneme rovnici s neznámou *x*:

#4: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(k\cdot x+q)^2}{4}=1,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$

#5: $x=\dfrac{3\cdot(2\cdot\sqrt{9\cdot k^2-q^2+4}-3\cdot k\cdot q)}{9\cdot k^2+4}\ \vee\ x=-\dfrac{3\cdot(2\cdot\sqrt{9\cdot k^2-q^2+4}+3\cdot k\cdot q)}{9\cdot k^2+4}$

Z řešení v oboru reálných čísel přečteme diskriminant $D = 9k^2 - q^2 + 4$ (výraz v odmocněnci). Soustava má v případě, že přímka je tečnou, jediné řešení. Proto diskriminant je roven nule. Obdobně získáme podmínku v soustavě rovnic paraboly a přímky.

#9: $\text{SOLVE}((k \cdot x + q - 2)^2 = 2 \cdot (x - 3),\ x,\ \text{Real})$

#10: $$x = \frac{\sqrt{(-6 \cdot k^2 + 2 \cdot k \cdot (2 - q) + 1)} + k \cdot (2 - q) + 1}{k^2} \vee x = -\frac{\sqrt{(-6 \cdot k^2 + 2 \cdot k \cdot (2 - q) + 1)} + k \cdot (q - 2) - 1}{k^2}$$

Soustavou rovnic pro neznámé hodnoty parametrů *k*, *q* dostaneme tři řešení pro rovnice tečen.

#12: $\text{SOLVE}\left(\left[-6 \cdot k^2 + 2 \cdot k \cdot (2 - q) + 1 = 0,\ 9 \cdot k^2 - q^2 + 4 = 0\right],\ [k,\ q]\right)$

#13: $$\left[k = -\frac{1}{2} \wedge q = \frac{5}{2},\ k = \frac{\sqrt{33}}{24} + \frac{1}{8} \wedge q = \frac{3 \cdot \sqrt{33}}{8} + \frac{1}{8},\ k = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{24} \wedge q = \frac{1}{8} - \frac{3 \cdot \sqrt{33}}{8}\right]$$

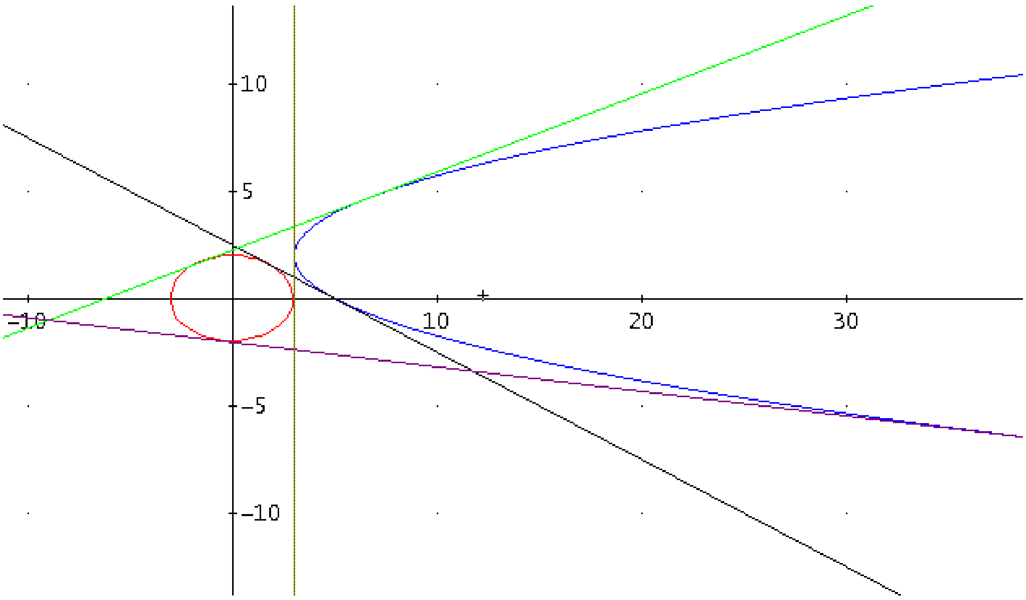
Zapišeme rovnice tři tečen.

#14: $$y = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x + \frac{5}{2}$$

#15: $$y = \left(\frac{\sqrt{33}}{24} + \frac{1}{8}\right) \cdot x + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{33}}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

#16: $$y = \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{33}}{24}\right) \cdot x + \left(\frac{1}{8} - \frac{3 \cdot \sqrt{33}}{8}\right)$$

Kontrolu můžeme provést graficky. Do jedné soustavy souřadnic zobrazíme obě kuželosečky a čtyři přímky. Graficky ověříme, že přímky jsou tečnami kuželoseček.



Je zde ještě jeden způsob řešení. Využijeme vzorec pro rovnici tečny elipsy a řešíme soustavu, která obsahuje tuto rovnici a rovnici paraboly. Tímto postupem získáme všechny čtyři tečny.

Určování společných tečen kuželoseček lze procvičit úlohami ve sbírce [1]. Žáci mohou objevit i kratší řešení, které spočívá v určení (odhadnutí) směrnice tečen a následném výpočtu koeficientu *q*.