Profesor Ypsilon o bludných kořenech v patamatematice

„Patamatematická teorie řešení rovnic vychází z okolnosti, že postup při hledání kořenů je v mnohém podobný práci provazochodcově na laně napjatém nad hlubinou. V tom i onom případě stačí jediný chybný krok a kýžený cíl mizí v nedohlednu," pravil profesor Ypsilon a neprodleně přistoupil k demonstraci svého tvrzení na následujícím příkladu:
V množině všech reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{|x-1|(|x|+1)} = a$$

s neznámou *x* a reálným parametrem *a*.

Je zřejmé, že pro *a* < 0 nemá daná rovnice žádné reálné kořeny a že pro *a* = 0 má kořen jediný, a to *x* = 1. Předpokládejme tedy, že je *a* > 0, a postupujme známým způsobem: utvoříme rozklad množiny všech reálných čísel na intervaly (- ∞ ; 0), < 0 ; 1 >, (l ; ∞), v nichž budeme postupně hledat kořeny dané rovnice.

Pro *x* ∈ (- ∞ ; 0) dostáváme

$$\sqrt{|x-1|(|x|+1)} = \sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = 1-x\ ;$$

rovnice

$$1 - x = a\ ,$$

kterou tak dostaneme, má v intervalu (- ∞ ; 0) jediný kořen *x* = l - *a* pouze v tom případe, je-li *a* > 1; je-li 0 < *a* ≤ l, nemá daná rovnice v tomto intervalu řešení.

V intervalu < 0 ; 1 > platí pro levou stranu dané rovnice

$$\sqrt{|1-x|(|x|+1)} = \sqrt{1-x^2}$$

a řešením rovnice

$$\sqrt{1-x^2} = a$$

dostáváme v případě, že je 0 < *a* ≤ l, jediný kořen $x = \sqrt{1-a^2}$; v případě, že je *a* > l, nemá daná rovnice v intervalu < 0 ; 1 > řešení.

Konečně pro interval (l ; ∞) je

$$\sqrt{|1-x|(|x|+1)} = \sqrt{x^2-1}$$

a snadno zjistíme, že rovnice

$$\sqrt{x^2-1} = a$$

má v tomto intervalu pro každé *a* > 0 jediný kořen $x = \sqrt{a^2+1}$.

Shrnutím dílčích výsledků dospíváme k závěru, že rovnice

$$\sqrt{|x-1|(|x|+1)} = a$$

s neznámou *x* a kladným parametrem *a* má v množině všech reálných čísel právě dva kořeny:

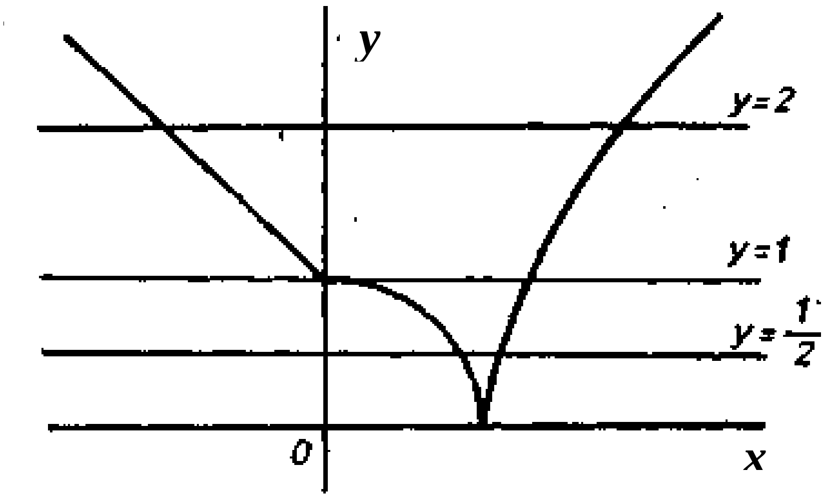
pro 0 < *a* ≤ 1: $x_1 = \sqrt{1-a^2}$, $x_2 = \sqrt{a^2+1}$;

pro *a* > l: $x_1 = 1-a$, $x_2 = \sqrt{a^2+1}$.

Získaný výsledek můžeme ověřit graficky. Užitím předcházejících výsledků dostáváme, že grafem funkce

$$y = \sqrt{|x-1|(|x|+1)}$$

je v intervalu (- ∞ ; 0) polopřímka, která je částí přímky *y* = l - *x*; v intervalu < 0 ; 1 > je grafem této funkce kruhový oblouk $y = \sqrt{1-x^2}$, který je částí kružnice $x^2 + y^2 = 1$, a konečně v intervalu (l ; ∞) je grafem příslušné funkce hyperbolický oblouk $y = \sqrt{x^2-1}$ ležící na rovnoosé hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ (viz obrázek).



Všimněte si pozoruhodné vlastnosti naší funkce: i když se její graf skládá ze tří křivek různého druhu (z polopřímky, kruhového a hyperbolického oblouku), je tato funkce pro celý svůj definiční obor, jímž je množina všech reálných čísel, dána jedinou rovnicí! Z obrázku, v němž jsou kromě grafu dané funkce znázorněny i grafy funkcí $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$ a $y = 2$, je jasně patrno, že graf uvedené funkce má s každou přímkou o rovnici $y = a$, kde *a* > 0, právě dva společné body.

„Viděli jsme, že cesta, po které jsme kráčeli při řešení dané rovnice, byla velmi úzká," pokračoval profesor Ypsilon. „Kdybychom z ní sešli, mohli bychom v džungli matematických symbolů, příkazů a zákazů zabloudit a nikdy bychom k jejím kořenům nedospěli." Aby však i řešitelé, kterým se všechny nástrahy zvládnout nepoštěstí, mohli pocítit uspokojení z tvůrčího činu, jímž vyřešení každé rovnice nepochybně je, zavádí patamatematika pojem bludného kořenu rovnice. Původně se jím rozumělo každé číslo, ke kterému řešitel při řešení dané rovnice došel, a to nezávisle na tom, zda je či není jejím kořenem. Ukázalo se však brzy, že tato definice je příliš široká. K tomu, aby byl nalezen bludný kořen rovnice, není většinou vůbec nutno ji řešit!

Proto se v moderní patamatematice za bludný kořen rovnice považuje pouze to číslo, jehož vzdálenost na reálné ose od jejího libovolného kořenu není větší než jisté (předem dané) nezáporné číslo *b*, které se nazývá poloměr bloudivosti. Je-li tedy číslo x_0 kořenem dané rovnice, jejíž poloměr bloudivosti je *b*, je bludným kořenem této rovnice každé číslo *x* z definičního oboru rovnice, pro něž platí

$$|x - x_0| \leq b \, .$$

Jaké jsou např. bludné kořeny rovnice

$$\sqrt{|x-1|(|x|+1)} = 1 \, ,$$

jejíž kořeny jsou (v souladu s předchozím výsledkem pro *a* = 1) čísla 0 a $\sqrt{2}$? Zvolíme-li poloměr bloudivosti $b = \frac{1}{2}$, jsou jejími bludnými kořeny právě ta čísla *x*, pro něž platí

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right\rangle .$$

Při poloměru bloudivosti *b* = 1 jsou bludnými kořeny této rovnice právě všechna čísla z intervalu $\left\langle -1, \sqrt{2}+1 \right\rangle$; je-li poloměr bloudivosti *b* = 0, má daná rovnice právě dva bludné kořeny, které jsou rovny jejím kořenům 0 a $\sqrt{2}$. V případě *b* = 0 tak patamatematická teorie řešení rovnic vplývá do teorie matematické.

„Avšak nespornou výhodou teorie bludných kořenů rovnic je to, že napomáhá zmenšit počet žáků (při dostatečné velkém poloměru bloudivosti), kteří pro své bloudění při řešení rovnic bývají někdy do množiny kořenů zahrnováni," uzavírá svou exkurzi do patamatematiky profesor Ypsilon.