

Zlomky a desetinná čísla

(ukázky tématického celku učiva zpracovaného formou žákovských projektů)

V následujícím textu je uveden stručný popis přípravy jednoho z našich projektů, který byl inspirován historickými souvislostmi počítání s čísly.

Ukázka 1:

PŘÍPRAVA PROJEKTU					
JAK POČÍTALI STAŘÍ EGYPTĀNÉ II M.18			Typ projektu:		
			☐ motivační ☒ expoziční ☐ fixační	☐ diagnostický ☐ aplikační ☐ jiný	
Školní rok:	1997 - 1998	Termín konání:	Říjen 1997	Třída:	6.A
Poznámky:	dostatek separovaných modelů kmenových zlomků pro malá přirozená čísla.				
Cíle projektu:					
odhalení a osvojení algoritmu pro sčítání (kladných) zlomků.					
Doba trvání projektu:		Místo realizace projektu:			
Krátkodobý - počet vyučovacích hodin (2) - počet dnů Dlouhodobý - počet týdnů - počet měsíců - jiné		- ve vyučování matematice - v jiném předmětu - ve více předmětech společně - mimo školu			
Téma: sčítání kladných zlomků (dáno explicitně)			Návaznost na projekt:		
Návrh:	☐ žáci ☒ učitel ☐ jiná osoba ☐				
Mapování tématu:					
- v maximální možné míře využít toho, co žáci zjistili o počítání ve starém Egyptě, - žáci bez problémů sčítají zlomky se stejným jmenovatelem, - dobře zvládnutý algoritmus vyhledávání nejmenšího společného násobku skupiny čísel.					
Formulace zadání projektu pro žáky: (relativně uzavřený projekt)					
Ve skupinách sestavte tabulku rozkladu kmenových zlomků (2 - 10) na součet menších kmenových zlomků, z nichž se žádné dva nerovnají.					
První postřehy, poznámky:					

Projekty typu „Počítáme jako staří ...“

Projekty typu „Počítáme jako staří ...“ jsou založeny na genetické paralele. Nejčastěji jsme je používali jako expoziční, fixační nebo diagnostické. V prvních dvou případech vedlo užití genetické paralely k výraznému posílení vnitřní motivace žáků a zprostředkovaně také k zájmu žáků o početní techniky, druhy číslic, matematické symboly apod., které používali naši předkové. To byl také jeden z motivů, které nás později vedly k přípravě projektu „Číslo a číslice“. Ve třetím případě se diagnostická verze projektu ukázala jako velice dobrý nestandardní nástroj k ověření úrovně osvojení poznatků nezbytných pro počítání se zlomky.

Projektem tohoto typu je i projekt „Počítáme jako staří Egypťané II“, který je popsán v [ukázce 1](#). Budeme se mu v dalším věnovat podrobněji, protože nám pomohl:

- vybudovat u žáků přirozenou potřebu rozšiřovat či krátit zlomky v situacích, které později vedly k vytvoření algoritmu pro sčítání a odčítání zlomků, nikoli ve školských situacích typu „dané zlomky rozšiřte/ křeťte číslem tři“ apod.,
- vytvořit zajímavé nestandardní prostředí pro diagnostiku úrovně osvojení algoritmů pro počítání se zlomky,
- znovu ukázat, že projekty se mohou stát výzvou pro žáky k objevitelské činnosti a samotný projekt pak skutečným dílem žakovým, v našem pojetí dílem duševním. Dokladem je např. to, jak projekt zpracovala v roce 1998 [Hanka](#) a v roce 2001 [Tonda](#).

Počítáme jako staří Egypťané II

(2001 - expoziční verze projektu)

Na druhý stupeň základní školy přicházejí žáci se separovanými modely některých zlomků (jedna polovina, jedna čtvrtina, jedna třetina, tři čtvrtiny, dvě třetiny, někdy také jedna pětina a jedna desetina). Většinu z nich si osvojili mimo školu při řešení úloh v běžném životě (polovina ze všech kuliček, které jsme vyhráli, čtvrtka chleba, třetina domů v naší ulici, přišel o tři čtvrtě hodiny později, zbyla na mě jen pětina výhry, desetina litru). Při řešení jednoduchých úloh většinou žáci užívají zlomky jako operátory a pracují s předmětnou představou zlomku. Při vyvozování pravidel pro sčítání (odčítání) zlomků ale končí „naivní“ a začíná „tvrdá“ matematika. Žáci selhávají, i když jim dáme k dispozici účinný nástroj „tvrdé“ matematiky – algoritmus pro sčítání zlomků. Ten však neumožňuje většině žáků překonat bariéru mezi chápáním zlomků jako operátorů a sčítáním zlomků jako mnohostí, které je předmětně názorné. Žáci nezískají vhled a následně neumí řešit úlohy z praxe. Podle Hejného (1990, s.74) musíme naučit žáky abstrahovat od předmětné představy základu a části a přivést je k objevu, že můžeme zlomky sčítat přímo tak, že budeme obměňovat počet prvků základu nebo pracovat se základem jako s univerzální jednotkou.

Ukazuje se, že takový stupeň abstrakce je třeba dlouhodobě připravovat tím, že budeme:

- situace vhodně modelovat, nejčastěji geometricky a používat přitom různých modelů, protože každý z nich odráží jinou životní zkušenost žáků a je propedeutikou aplikací zlomků v různých oblastech činností; vyloučení kteréhokoli z modelů ochuzuje žakovské představy o příslušné spektrum zkušeností a aplikací;
- žáky vést k vědomí, že základem celého procesu sčítání je uvedení na společného jmenovatele. Objekty, které žáci sčítají, mají různou kvalitu - různé jmenovatele. Proto je nutné je vyjádřit pomocí stejné kvality - stejného jmenovatele. Přitom v prvním plánu nejde o nácvik metod hledání společného jmenovatele, ale o uvědomění si potřeby najít společného jmenovatele (Hejný, 1990, s. 77);
- při sčítání zlomků připravovat přechod od zvědoměného postupu, který je založený především na práci s geometrickými modely, ale je časově a někdy i technicky velice náročný, k postupu receptuálnímu, který je založený na užívání algoritmu a při správném osvojení značně urychluje práci.

K tomu, abychom expozici pojmů „rozšiřovat/ krátit zlomek daným číslem“ založili na práci s kmenovými zlomky, nás vedla snaha odstranit „umělé“ situace, kterých je v učebnicích matematiky užíváno k zavedení těchto pojmů, a také naše předchozí zkušenosti s využitím kmenových zlomků při fixaci učiva o zlomcích.

Záznam „objevu“ principu a významu rozšiřování/ krácení zlomků v jedné třídě sedmého ročníku (listopad 2001) je uveden v následujících protokolech ([ukázka 2](#) a [ukázka 3](#)). Další části tohoto protokolu ([ukázka 4](#), [tabulka 1](#) a [tabulka 2](#)) jsou dokladem toho, jak původně relativně uzavřená úloha přerostla v rozsáhlý žákovský projekt. Jeden žák pracoval na projektu ještě v dubnu 2002.

Ukázka 2:

POČÍTÁME JAKO STAŘÍ EGYPTANÉ II		Protokol 7.C / Z1	7.C
listopad 2001	úvodní vyučovací hodina v tématickém celku učiva „Sčítání zlomků“	- společná práce ve třídě - následně se předpokládá samostatná práce doma	objev principu rozšiřování a krácení zlomků
Chybí žáci: Luc, Ro, Dav			

U:	„Už jsme si ukázali, že zlomky je možné stejně jako přirozená čísla sčítat. Moc nám to ale nešlo, vzpomeňte na včerejší koláče a buchty.“ (V minulé vyučovací hodině sčítali žáci zlomky pomocí zlomkové zdi a pomocí různých geometrických modelů – čokoládového, tyčového a koláčového.) „Zkusíme to ještě jinak. Staří Egypťané užívali, až na malé výjimky, pouze zlomky s čitatelem jedna. Takové zlomky budeme nazývat kmenové. Pavle, uveď příklad takového zlomku.“
Pa:	„Třeba jedna pětina.“
U:	„Deniso, jiný příklad.“
De:	„... hmmm, štvrtina?“
W:	„Polovina, desetina, jedna patnáctina, ...“
U:	„Ano, jistě. Jiné zlomky než kmenové vyjadřovali Egypťané jako součet více zlomků s čitatelem jedna, jen je označovali jinak než my dnes. Navrhněte, jak zapsat egyptským způsobem zlomek dvě třetiny.“
On:	(Píše na tabuli $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ a říká:) „Na tom nic není, jedna a jedna třetina sou dvě třetiny, to už sme měli včera s koláčem.“
U:	„To máš, Ondro, pravdu. To už umíme. Tak já přidám další podmínku, protože většinou potřebujeme pracovat se zlomky, které mají různé jmenovatele. Nový úkol pro všechny: Vymodelujte zlomek dvě třetiny pomocí kmenových zlomků, které mají různé jmenovatele a запиšte to.“ (Dvojice žáků mají v lavicích k dispozici „koláčové“ modely zlomků, které si samy vyrobily.)
Dal:	„To bysme asi měli vzít menší zlomky...“
Pa:	„Ale jenom takový, abysme je uměli udělat.“
U:	„Jak to myslíš, Pavle?“
Pa:	„Aby to šlo beze zbytku složit. Z třetiny udělám rozpůlením šestinu, ale čtvrtinu nebo pětinu nedostanu.“

Ev:	„Tak místo třetin vememe šestiny.“ Píše na tabuli: $\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \rightarrow \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ a říká: „Vynásobila sem to dvěma a nemůžu to rozdělit na dvě a dvě šestiny, to bych měla zase to samý. Zbejvá vzít tři šestiny a jednu šestinu nebo taky ..., ne, ... to je stejný.“
Pa:	„A to je vono. Tři šestiny sou polovina. Podívej se na koláč.“
U:	„Evo, uprav, prosím, ten zápis na tabuli.“
Ev:	Škrtná na tabuli předchozí zápis $\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \rightarrow \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$, píše: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ a říká: „Dvě třetiny sme zapsali pomocí těch ... jednotkových, ne těch kmenových zlomků.“
U:	„Proč mohla Eva napsat na tabuli: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$?“
Ma:	„To je z koláče. Dvakrát sme zmenšili ten díl, tak budou dva, ty šestiny. A všech dílů sme vzali dvakrát víc.“
U:	„Výborně, to se nám bude moc hodit. Zkusíme další příklad. Pomocí různých kmenových zlomků запиšte zlomek tři pětiny. Pracujte samostatně. Kdo bude mít hotovo, zkoumá zlomky dvě pětiny, dvě sedminy, dvě devítiny atd.“
Ta:	Ke svému zápisu v sešitě: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$. „Vidíte, zase je to to samý jako měla Eva. De to dobře.“
U:	„Deniso, ukaž, co jsi napsala.“
De:	Nejistě k zápisu v sešitě: $\frac{3}{5} \quad 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{2+4}{10} = \frac{2}{10} + \frac{4}{10}$. „To nejsou asi ty správný ...“
U:	„Deniso, zápisu $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ moc nerozumím. Dvakrát tři ...“
De:	„To sem každou pětinu rozdělila na polovinu (ukazuje to na svém koláčovém modelu). Tak jich mám šest těch desetin.“
U:	„No právě.“
De:	„Už to vidím. Má bejt správně $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}$.“
U:	„Vynikající.“
	...
	V další části vyučovací hodiny pracují dvojice žáků různým tempem, pomáhají si navzájem nebo vyhledávají pomoc učitele. Až na jednu výjimku (dvojice Lukáš, Karolína) užívají všechny dvojice při práci rozšiřování a krácení zlomků, aniž by zatím tyto činnosti matematicky precizovaly a správně pojmenovaly.

První postřehy, poznámky:

- V prostředí kmenových zlomků „objevili“ žáci princip rozšiřování a krácení zlomků jako účinný nástroj řešení zadaného problému.
- Výsledky své práce ověřovali žáci zpočátku pomocí geometrických modelů, později nahradili předmětné činnosti činnostmi myšlenkovými.
- Terminologie není podle očekávání v souladu s nově vytvářenými pojmy (nesprávný transfer termínu „vynásobit číslo číslem“ na situaci „vynásobit čitatele i jmenovatele zlomku týmž číslem“).
- Žáci velice brzy pochopili princip rozkladu zlomku na nestejně části, ale mnohým chyběl systém v prozkoumávání všech možností. Proto je třeba to trénovat i v jiných souvislostech.

	Deset minut před koncem vyučovací hodiny.
U:	„Přerušte práci. Zapišeme výsledky vaší práce na nástěnku. Každá dvojice zapiše svoje výsledky. Zapisujte jen ty, které ještě na nástěnce nejsou. Deniso, začni ...“
	Žákovské zápisy na nástěnce na konci vyučovací hodiny:
W:	$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ $\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7} \quad \frac{4}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7} +$ $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$
U:	„Výborně, dokončíme to zítra. Očekávám, že budete pracovat i doma a že zítra přednesete své návrhy. Protože máme matematiku až čtvrtou hodinu, můžete své návrhy psát na nástěnku už během dopoledne.“ Zvoní. „Dalibora prosím, aby trochu pomohl Lukášovi a Táňu, aby pomohla Karolíně. Nashledanou.“

Ukázka 3:

POČÍTÁME JAKO STAŘÍ EGYPŤANÉ II		protokol 7.C/ Z2	7.C
listopad 2001 druhá vyučovací hodina v tématickém celku učiva „Sčítání zlomků“	společná práce ve třídě	- precizace pojmů rozšiřování/krácení zlomků - rozšiřování zlomků jako základ pro algoritmus sčítání nestejnomených zlomků	
Chybí žáci: Luc, Ro, Dav, Pa			

U:	„Mám radost, nástěnka je plná. Teď zbývá vysvětlit, jak jste při hledání kmenových zlomků postupovali. Ale měli by tomu všichni rozumět.“
Ta:	„To se vynásobí zlomek nahoře i dole stejným číslem ...“
U:	„Táňo!“
Ta:	„Já vím, číselník a jmenovatel. To číslo nahoře se pak rozdělí, aby to vyšlo.“
U:	„Možná to Táňa myslí dobře, ale já jí nerozumím. Pomozte nám někdo.“
Pa:	„Když ten zlomek vynásobíme nahoře i dole stejným číslem, tak sme s ním nic nezměnili, protože když budeme mít místo pětiny desetiny, tak budou ty desetiny menší, ale zase jich vezmeme víc.“
U:	„No, to je dobré zdůvodnění, tedy až na toho číselník a jmenovatele.“
Ba:	„My sme to použili taky, ... a taky na druhou stranu.“
U:	„Jak na druhou stranu?“
Iv:	„Dyž sme měli $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ a chtěli sme vědět, jestli to sou dvě sedminy, tak sme to nejdřív vynásobili sedmi (píše $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{8}{28}$), a pak sme to dělili čtyřma (píše $\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$) a dostali sme ty dvě sedminy.“
Ha:	„Vono je to vidět i ze zlomkové zdi ...“
Pe:	„... nebo koláče. Místo jednoho kusu můžem dát třeba dva nebo tři menší.“
U:	„Výborně, výborně. Myslím, že jste již objevili, jak můžeme se zlomky pracovat, aniž bychom změnili jejich hodnotu. Nezbyvá než dát věci do pořádku, abychom se všichni přesně vyjadřovali.“
	V další části vyučovací hodiny učitel spolu se žáky upřesňoval, co to znamená rozšiřovat/ krátit zlomek daným číslem.

Závěrečné poznámky:

Kmenové zlomky se ukázaly jako vhodné doplnění skupiny univerzálních modelů, které měli žáci k dispozici při nácviku počítání se zlomky.

Mimořádně cenné však bylo především to, že prostředí kmenových zlomků motivovalo několik žáků 7.C k nadstandardním výkonům (co se týče obsahu i rozsahu) a k další „objevitelské“ činnosti. V takovém rozsahu se tak stalo v dané třídě poprvé. Podrobně k tomu ještě v následujícím odstavci.

Počítání s kmenovými zlomky zaujalo několik žáků 7.C natolik, že v práci s nimi pokračovali sami bez přímé vazby na školní úkoly. Vznikly tak zajímavé žákovské práce, které následně inspirovaly i učitele ke změnám uspořádání učiva a metod práce v dalších vyučovacích hodinách matematiky. V konkrétním vyučování se ukázalo, že projekt „Počítáme jako staří Egypťané II“ v sobě obsahoval pro třídu 7.C silné motivační prvky. Žáci se z vlastní vůle aktivně zapojili do řešení problémů v rámci projektu a mnozí z nich si stanovili i vlastní cíle přesahující požadovaný rámec. Vznikl tak přehled vyjádření pravých zlomků se [jmenovateli 2 – 14](#), který byl k dispozici na nástěnce více než dva měsíce a který inspiroval několik žáků k další práci s kmenovými zlomky. Podrobněji o tom píšeme v následujícím odstavci.

Počítáme jako staří Egyptané II

(2001 - kmenové zlomky a desetinná čísla)

Tonda nebyl při práci s kmenovými zlomky ve škole moc aktivní. Krácení a rozšiřování zlomků mu však nedělalo potíže. Asi po týdně, kdy už se o kmenových zlomcích mnoho nemluvilo, přišel do kabinetu, přinesl tabulku zpracovanou pomocí textového editoru s tím, že objevil jednoduchý způsob, jak rozkládat zlomky na zlomky kmenové. O svém postupu začal nadšeně hovořit. Všechno měl dobře promyšleno a zřejmě i vyzkoušeno, i když konkrétní výpočet nepřinesl žádný. Na chvíli ho zaskočila jen jedna otázka: „*Jak mohli takto počítat staří Egyptané, když neměli žádnou kalkulačku a ani neznali algoritmus pro písemné dělení dvou přirozených čísel?*“ Jeho odpověď však byla velice rozumná: „*Vám přece nejde až tak moc o to, jak počítali staří Egyptané, ale abychom se to dobře naučili my.*“ Dohodli jsme se, že výsledky své práce předvede v některé z následujících vyučovacích hodin tak, abychom jich mohli vhodně využít v dalším vyučování.

Tondův postup hledání kmenových zlomků je zaznamenán v následujícím protokolu. (Ukázka 4, jde o zkrácený přepis audiozáznamu a přepis zápisu na tabuli, nikoli o záznam Tondova postupu při řešení úlohy. Ten Tonda komentoval slovy, že mu to bylo hned celkem jasné.) Tabulka, kterou Tonda sestavil pomocí kalkulačky pro převod kmenových zlomků na desetinná čísla, je uvedena v [Příloze 4](#).

Ukázka 4:

POČÍTÁME JAKO STAŘÍ EGYPTÁNÉ II		protokol 7.C/ Z5	7.C
listopad 2001	úvodní vyučovací hodina v tématickém celku učiva „Zlomky a desetinná čísla“	- prezentace žákovské práce - společná práce ve třídě	- otevření diskuse o vztahu zlomku a desetinného čísla - třídění desetinných čísel podle charakteru jejich zápisu
Chybí žáci: Ha, De			

	U:	„Dnes se budeme znovu zabývat tím, jak spolu souvisí zlomky a desetinná čísla.“
		Jsem ráda, že mám pomocníka. Tonda přišel na zajímavou věc a až nám to ukáže, tak toho využijeme při hledání vztahu mezi desetinným číslem a zlomkem. Tondo, pojd', prosím, k tabuli a ukaž ostatním, co jsi vymyslel. Připravte si sešity a kalkulačky a pracujte společně s Tondou.“
	Ton:	„Řekněte nákej zlomek a já ho převedu na kmenový.“
	W:	„Třeba ... šest sedmáctin.“
$\frac{6}{17} = 0,352941176$ $>$ $0,333333333 = \frac{1}{3}$	Ton:	„Tak jo. Vydělím to na kalkulačce a ve svý tabulce si najdu první menší.“ (Ukazuje tabulku 1 a opisuje z ní vyjádření zlomku jedna třetina.)

$\frac{6}{17} - \frac{1}{3} = \frac{18-17}{51} = \frac{1}{51}$		„Pak je vodečtu. A mám to, tady to bylo jednoduchý.“
	U:	„Tondo, zapiš pořádně výsledek.“
$\frac{6}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{51}$	Ton:	
	U:	„Hanko, pojď udělat zkoušku.“
	Ha:	„Mám to sečíst?“
	Ton:	„Co asi jinýho.“
$\frac{1}{3} + \frac{1}{51} = \frac{17+1}{51} = \frac{18}{51} = \frac{6}{17}$	Ha:	„Má to dobře.“
	U:	„Tondo, zkus osm sedmnáctin.“
$\frac{8}{17} = 0,470588235 > 0,333333333 = \frac{1}{3}$ $\frac{8}{17} - \frac{1}{3} = \frac{24-17}{51} = \frac{7}{51}$ $\frac{7}{51} = 0,137254902$	Ton:	(Tonda hledá ve své tabulce a zapisuje výpočty na tabuli.) „Ten zlomek není kmenovej, tak to musíme zvopakovat.“
	U:	„Tondo, říkej, co děláš.“
$\frac{7}{51} = 0,137254902 > 0,125 = \frac{1}{8}$ $\frac{7}{51} - \frac{1}{8} = \frac{56-51}{408} = \frac{5}{408}$	Ton:	„Zase to vydělím a najdu menší.“
$\frac{5}{408} = 0,012254901$		„Takle malý číslo ale už v tabulce nemám, tak to musím vodhadovat.“
$0,0125 = \frac{1}{80}$		„Jedna vosumdesátina je moc.“
$0,012345679 = \frac{1}{81}$		„Jedna jednavosumdesátina taky.“
$0,012195121 = \frac{1}{82}$ $\frac{5}{408} = 0,012254901 >$ $0,012195121 = \frac{1}{82}$ $\frac{5}{408} - \frac{1}{82} = \frac{205-204}{16728} = \frac{1}{16728}$		„Ten další ale stačí.“
	Ve:	„Dyť vono je to stejný jako předtím, tady si jen Tonda pomáhá desetinnýma čísly. Tak se mu rychlejc odhaduje.“
	U:	„Vynikající, to máš dobrý postřeh. Ke stejnému cíli můžeme dojít různými cestami.“
$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{82} + \frac{1}{16728} = \frac{8}{17}$	Ton:	„A máme to.“

	U:	„Tomáši, udělej zkoušku.“
	To:	„Tady?“
	U:	„No, zkus to. Za pomoci kalkulačky to snad zvládneš.“
$\frac{8}{17} = 0,470588235$	To:	(Sčítá zlomky jako desetinná čísla pomocí kalkulačky.) „Jo, je to dobře. Vyšlo mi to stejně.“
	U:	„Já to s tou kalkulačkou myslela jinak. Jenom jako pomoc při sčítání zlomků.“
$\frac{8}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{82} + \frac{1}{16728} =$ $= \frac{32920704}{685848} = \frac{228616 + 85731 + 8365 + 41}{685848} =$ $= \frac{322752}{685848} = \frac{80688}{171462} = \frac{40344}{85731} = \frac{13448}{28577} =$ $= \frac{328.41}{697.41} = \frac{8.41}{17.41} = \frac{8}{17}$	To:	(Neochotně, za vydatné pomoci spolužáků s kalkulačkami.) „Tak jo, ale byla to hrůza. Lepší je to první.“
	U:	„Moc děkuji Tomáši, že jsi to vydržel a provedl zkoušku až do konce. A Tondovi děkuji za dobrý nápad. Ještě se k jeho postupu časem vrátíme. Jsem moc ráda, že jste si všimli, že můžeme používat různé postupy, abychom vyřešili náš problém. Pokud Tonda dovolí, vyvěsíme jeho tabulku na nástěnce. Můžete se pokusit objevit nějaké zajímavé věci v Tondově tabulce, ale Tonda nebude napovídat.“

S Tondovou tabulkou jsme začali hned příští vyučovací hodinu pracovat. Každý žák dostal její kopii. Žáci měli hledat v tabulce zajímavé vlastnosti desetinných čísel a zkoumat přitom, jak vypadají odpovídající kmenové zlomky. Postupně jsme tak společně stanovili podmínky pro to, kdy bude mít desetinné číslo vyjadřující daný zlomek ukončený desetinný rozvoj, kdy to bude číslo periodické a jak se určí perioda.

Tonda byl na svou práci náležitě hrdý, svým postojem doslova strhl k aktivitě další žáky. Aniž si to zřejmě uvědomoval, podpořil významně naše snahy o vytvoření prostoru pro rozvoj vlastních učebních strategií žáků. Souběžně s tím se tak otevřel dostatečný (především časový) prostor pro další práci na řešení projektu a pro získání dalších výsledků. S kmenovými zlomky pracovalo po dobu více než jednoho měsíce (i v době, kdy jsme se v běžném vyučování věnovali geometrii) několik žáků. Většinou postupovali tak, že zvolili náhodně nějaký zlomek a pokoušeli se ho vyjádřit pomocí kmenových zlomků. Svá řešení nabízeli učiteli. Přestože používali již dříve zavedené strategie, jejich řešení ztroskotávala na početních výkonech se zlomky, v jejichž jmenovateli byla „velká“ přirozená čísla. Konzultace s učitelem spočívala v naprosté většině případů v odhalování početních chyb. Potěšující však bylo, že nikdo ze žáků, kteří s kmenovými zlomky pracovali, to nechtěl vzdát. Nakonec nezůstal ze zlomků, kterými se žáci zabývali, ani jediný zlomek, který by se nepodařilo rozložit na součet navzájem různých kmenových zlomků. Na základě svého vlastního rozhodnutí přitom žáci vykonali takový počet početních operací se zlomky, které je v podmínkách běžného školního vyučování těžko realizovatelný.

Mezi žákovskými řešeními ale byla i dvě řešení, která měla zcela jiný charakter. Pavel našel několik zlomků, které měly různé rozklady na kmenové zlomky. Ještě zajímavější byla klasifikace kmenových zlomků, kterou provedl Dalibor pro všechny pravé zlomky s jmenovateli 2 – 14. Daliborův komentář k tabulce 1 byl vysoce kvalifikovaný a svědčil o kvalitním osvojení pojmu zlomek:

„Aby to bylo dobře vidět, napsal sem si zlomky pod sebe. Barevně sem vyznačil všechny zlomky, co se musí vždycky rozkládat, sou to pětiny, sedminy, jedenáctiny, třináctiny, a pak všechny poslední zlomky a ještě některý další.“ (Dalibor měl na mysli zlomky typu $\frac{k}{k+1}$, kde k je přirozené číslo.) *„Ostatní zlomky se buď nechaj krátit nebo se dostanou jen*

vynásobením jmenovatele. Asi to bude nějak souviset s prvočísly.“ (Např.: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$,

ale také podle Dalibora $\frac{3}{10} = \frac{3}{2.5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$).

Uvědomíme-li si, že Dalibor byl v té době žákem sedmého ročníku základní školy a neměl za sebou žádnou speciální přípravu v matematice, je nutno vysoce ocenit stupeň zobecnění, kterého při práci s kmenovými zlomky dosáhl, i když sám provedenou klasifikaci zdůvodňoval úsporou práce při vyhledávání vyjádření zlomků pomocí kmenových zlomků.

Tabulka 1

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{14}$
		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{14}$
			$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{14}$
				$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$
					$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{14}$
						$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$
							$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$
								$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{9}{14}$
									$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$
										$\frac{11}{12}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{11}{14}$
											$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{14}$
												$\frac{13}{14}$

Tabulka 2

$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$
$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{20}$
$\frac{5}{13}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$

Odhlédneme-li od toho, že žákovský projekt „Počítáme jako staří Egypťané II“ významně přispěl v dané třídě ke kvalitní expozici učiva o zlomcích, bylo jeho hlavním přínosem to, že pomohl navodit ve třídě vstřícné pracovní klima nejen pro společnou práci žáků, ale také pro jednotlivé žáky, kteří by se chtěli věnovat nějakému problému hlouběji nad rámec běžných školních povinností.

Počítáme jako staří Egypťané II (1998 - ?)

(1998 – diagnostická verze projektu)

Žáci třídy 7.A (byli to žáci třídy s rozšířeným vyučováním cizím jazykům, třída patřila na škole trvale mezi třídy s nejlepším prospěchem) vykazovali průběžně dobré výsledky při řešení standardních úloh v tématickém celku učiva „Zlomky“. S výjimkou dvou žáků měli dobře osvojeny algoritmy pro počítání se zlomky a uměli je aplikovat při řešení úloh nejrůznějšího druhu. Obdobná situace nastala i v další třídě sedmého ročníku. Hledali jsme proto „úlohové“ prostředí, kde by mohli naši žáci uplatnit svoje dosavadní poznatky, a kde bychom se současně mohli přesvědčit, že si osvojili algoritmy pro počítání se zlomky na takové úrovni, že je umí kvalifikovaně použít i v nestandardních situacích. Nakonec jsme zvolili prostředí kmenových zlomků. Zadání úlohy a protokol z vyučovací hodiny jsou uvedeny v následující ukázce 5.

Ukázka 5:

POČÍTÁME JAKO STAŘÍ EGYPTĀNÉ II		protokol 7.A / 7.A Z4
listopad 1998 • závěrečná cvičení v tématickém celku učiva „Zlomky“	• společná práce ve skupinách během vyučování • následně se předpokládá samostatná práce doma	• diagnostika úrovně osvojení početních výkonů se zlomky
Chybí žáci: Ja, ToM, VeD		

U:	„Za nejstarší dochovanou početnici bývá považován Rhindův papyrus ze starého Egypta, který mimo jiné obsahuje velice zajímavá pravidla pro počítání se zlomky. Až na malé výjimky, v něm užívali jeho autoři pouze zlomky s čitatelem jedna. Takové zlomky budeme nazývat kmenové. Jiné zlomky než kmenové vyjadřovali Egypťané jako součet více zlomků s čitatelem jedna. Můžete přemýšlet o tom, proč staří Egypťané používali takové těžkopádné opatření při počítání se zlomky, ale my se teď pokusíme se zlomky pracovat jako oni. Zlomky přitom budeme zapisovat tak, jak jsme zvyklí. Navrhněte, jak zapsat egyptským způsobem zlomek dvě třetiny.“
-----------	--

Ho:	„To je jednoduchý, $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.“
U:	„To máš, Honzo, pravdu. Ale nenechal jsi mě domluvit. Chtěla jsem ještě říci, že mezi sčítanci se nesmí žádné dva zlomky opakovat.“
Ho:	„Hmm, to už bude horší.“
U:	„To zvládnete. Budeme pracovat ve skupinách. Budeme se zabývat pouze zlomky menšími než jedna. Proč asi?“
Da:	„Vostatní se nechaj zapsat jako smíšený čísla, a tam už je to jasný.“
U:	„Výborně, Davide. Tak se můžete pustit do práce. Pracujte v obvyklých skupinách. Zatím zkoumejte pouze kmenové zlomky s jmenovateli menšími než deset. Nezapomeňte všechno podstatné zapisovat, abyste mohli svůj postup později vysvětlit.“

První postřehy, poznámky:

- Skupiny zvolily různé strategie řešení problému, podrobněji viz následující část protokolu (ukázka 6) a [Příloha 5](#).
- Pouze dvě ze šesti pracovních skupin prováděly zpětnou kontrolu svých výpočtů.
- Jitčina skupina pracovala chaoticky. Ostatní skupiny zkoumaly postupně třetiny, čtvrtiny, pětiny atd.
- Na konci vyučovací hodiny bylo hotovo více práce, než jsem očekávala.

Deset minut před koncem vyučovací hodiny.

U:	„Přerušete práci ve skupinách a věnujte mi pozornost. Skupiny mohou nabídnout výsledky své práce a doplnit tabulku na nástěnce.“
W:	Zástupci skupin se chvíli dohadují u nástěnky, a potom doplňují tabulku pro vyjádření předepsaných zlomků.
U:	„Výborně, musím se přiznat, že jsem ani nečekala, že toho tolik zvládnete.. Zítra budeme pokračovat.“
Po skončení vyučovací hodiny.	
Ho:	„Můžeme doma dělat i další zlomky? Myslím, že sem na to přišel, jak.“
U:	„No určitě, zítra mi o tom povíš víc.“

Při práci s kmenovými zlomky se ukázalo, že žáci 7.A mají dobře osvojeny algoritmy pro počítání se zlomky. Svědčilo o tom mimo jiné i to, že např. algoritmus pro sčítání zlomků uměli použít, jak řekl jeden z nich „*taky z druhé strany*“. Mínil tím, rozkládat zlomek na součet dvou vhodných zlomků.

Kmenové zlomky žáky třídy 7.A zaujaly a pět ze šesti pracovních skupin pokračovalo v práci i doma. Jedna žákyně (Hanka) shromáždila výsledky práce všech skupin a uspořádala je přehledně do [tabulky](#). S tabulkou jsme dále pracovali. Zabývali jsme se např. otázkami:

- Proč mohou mít různé zlomky stejná vyjádření pomocí kmenových zlomků?
- Proč může mít jeden a tentýž zlomek více různých vyjádření pomocí kmenových zlomků?
- Kolik kmenových zlomků potřebujeme k vyjádření daného zlomku?
- Jak bychom mohli zlomky třídit v závislosti na jejich vyjádření pomocí kmenových zlomků?

Přitom se objevily takové úvahy jako:

- Některé zlomky (např. se jmenovatelem pět, sedm, jedenáct, třináct, ...) se chovají stejně jako prvočísla.

- Můžeme zlomek zapsat pomocí nekonečného počtu kmenových zlomků?
- Nešlo by hledání kmenových zlomků popsat nějak souhrnně?

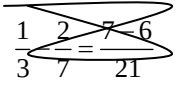
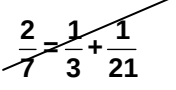
V této konkrétní třídě tak sami žáci připravili prostor pro propedeutiku některých matematických pojmů (transfer vlastností prvočísel na jiné objekty, racionální číslo jako třída rozkladu, součet nekonečné číselné řady, proměnná), se kterými se většina z nich pravděpodobně v dalším studiu nesetká v plné šíři. Úvahy nad nimi však mohou podle našich zkušeností významně přispět ke kultivaci jejich matematického myšlení.

Z hlediska diagnostiky úrovně osvojení početních výkonů se zlomky, bylo zajímavé pozorovat, jak různé skupiny žáků volily při hledání kmenových zlomků různé strategie řešení. Převažovala strategie založená na odčítání zlomků. Pracovaly tak tři skupiny, protokol o práci jedné z nich je uveden v následující ukázce 6.

Ukázka 6:

POČÍTÁME JAKO STAŘÍ EGYPTĀNÉ II		protokol Z4-T	7.A /	7.A
listopad 1998 • závěrečná cvičení v tématickém celku učiva „Zlomky“	• práce ve skupině ve vyučování a následně i mimo vyučování	• diagnostika úrovně osvojení početních výkonů se zlomky		
Tomášova skupina (Tomáš, Martin, Lucka), Veronika D. - chybí				

Vyjádření zlomků se jmenovateli 2 – 10 pomocí kmenových zlomků	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	U: „Vysvětlete mi někdo váš postup.“
$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	To: „U dvou třetin i tří štvrtin sme užili zlomkovou zeď.“
	Lu: „Dál už nám to moc platný nebylo. Tak sme to dělali odčítáním.“
	U: „A jak vás napadlo, že máte třeba dvě pětiny zapsat jako součet jedné třetiny a nějakého dalšího zlomku?“

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}$ $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$ $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$ $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10}$	U:	„A jak vás napadlo, že máte třeba dvě pětiny zapsat jako součet jedné třetiny a nějakého dalšího zlomku?“
	Ma:	„To je taky vidět z té zlomkový zdi.“
	To:	„Když to hned nevyjde, tak je dobrý ten zbytek ještě nějak rozdělit.“
$\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	U:	„Tady nemáte zrovna moc výpočtů. Jak je to možné?“
$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6}$ $\frac{4}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6}$	To:	„... protože se to zkrátí nebo snadno dopočítá, tak sme to nepsali.“
$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$   (škrtnuto dodatečně)	U:	„Ten váš výsledek pro dvě sedminy se mi moc nezdá. Děláte si taky nějakou kontrolu správnosti výsledků?“
	Ma:	„Ani ne, vono to je dost jasný.“
	U:	„A co zlomková zed?“
$\frac{2}{7} - \frac{1}{3} = \frac{6-7}{21}$	Ma:	„Už to vidím, my sme vodečetli vobráceně. Lucko, škrtni to a napiš to dobře.“ Lucka škrtná zápis: $\frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{7-6}{21}$ $\frac{2}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{21}$ a píše: $\frac{2}{7} - \frac{1}{3} = \frac{6-7}{21}$

$\frac{3}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7-6}{14} \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$	U: „Podívejte se znovu na zlomkovou zeď a porovnejte velikost zlomků $\frac{3}{7}$ a $\frac{1}{2}$.“
$\frac{3}{7} = \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = \frac{6-7}{14} \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21}$ $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{4} = \frac{12-7}{28} = \frac{5}{28} = \frac{4+1}{28} = \frac{4}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$ $\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$ $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \quad \frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{8-7}{14} = \frac{1}{14}$ $\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{5}{7} - \frac{1}{2} = \frac{10-7}{14} = \frac{3}{14} \quad \frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}$ $\frac{6}{7} = \frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{12-7}{14} = \frac{5}{14}$ $\frac{6}{7} - \frac{1}{3} = \frac{18-7}{21} = \frac{11}{21} = \frac{7+4}{21} = \frac{7+3+1}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$	Lu: „Zase stejná chyba, napíšu to vobráceně.“ Ma: „Dál už je to pořád stejný, buď to de roztrhat na jednotlivý kmenový zlomky nebo to musíme, jak Vy říkáte, šikovně rozšířit.“
$\frac{6}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} +$ $\frac{6}{7} = \frac{12}{14} = \frac{7}{14} + \frac{5}{14} = \frac{1}{2} + \frac{2+3}{14} = \frac{1}{2} + \frac{2}{14} + \frac{3}{14} =$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{3 \cdot 2}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{6}{28} =$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{2+4}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{2}{28} + \frac{4}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} =$ $\frac{6}{7} = \frac{24}{28} = \frac{14+7+2+1}{28}$ $\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$	To: „U některých zlomků to jde hůř, tak to musíme víc zkoušet.“
$\frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	Lu: „Vosminy byly dobrý, šly rychle, protože už toho máme nahoře dost hotovýho.“
$\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} \quad \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{8-6}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\frac{2}{9} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} \quad \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{10-9}{18} = \frac{1}{18} \quad \frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$ $\frac{5}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$	U: „Pro pět devítin máte různá vyjádření.“ Ma: „To tam napsala Lucka, ale může to být, rovná se to. To záleží na tom, odkud začneme.“

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \quad \frac{6}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} - \frac{7}{9} - \frac{1}{2} = \frac{14-9}{18} = \frac{9+6+3}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad \frac{7}{9} = \frac{21}{27} = \frac{9+3+9}{27} \quad \frac{7}{9} = \frac{28}{36} = \frac{18+9+1}{36}$ $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36}$ $\frac{8}{9} = \frac{32}{36} = \frac{18+9+4+1}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}$	To: „A to by šlo pět devítin taky rovnou jako dvě devítiny a tři devítiny.“
$\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \frac{3}{10} = \frac{2+1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ $\frac{6}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \quad \frac{7}{10} = \frac{5+2}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ $\frac{8}{10} = \frac{1}{2} + \frac{8}{10} - \frac{1}{2} = \frac{8-5}{10} = \frac{3}{10} = \frac{2+1}{10}$ $\frac{8}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{9-5}{10} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20}$ $= \frac{5+2+1}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$	U: „Zapomněli jste na čtyři desetiny.“ Lu: „Já to doplním. To sou vlastně dvě pětiny a ty už nahoře máme.“ Píše: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \quad \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

Jedna skupina využívala při hledání rozkladu rozšiřování zlomků. Zbylé dvě skupiny nepracovaly systematicky, kombinovaly různé odhady s výpočty, u zlomků s malými jmenovateli vyhledávaly kmenové zlomky často pomocí „zlomkové zdi“. Všichni žáci si však během řešení projektu natolik osvojili algoritmy pro počítání se zlomky, že jim počítání se zlomky ve standardních situacích nečinilo žádné obtíže.

Projekt „Počítáme jako staří Egypťané II“ užíváme opakovaně v různých modifikacích. Naším základním cílem je expozice nebo fixace algoritmů pro počítání se zlomky. Jak jsme ukázali, je ale významné také to, že implicitně tento projekt dovoluje na různých úrovních propedeutiku mnoha matematických pojmů a kultivaci matematického myšlení našich žáků.