

Úloha 1

U každé dvojice výroků rozhodněte, zda výrok uvedený vpravo je negací výroku vlevo. Pokud tomu tak není, zdůvodněte proč.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) p : Mám bílý svetr. | q : Mám černý svetr. |
| b) r : Bod A leží vně kruhu K . | s : Bod A leží uvnitř kruhu K . |
| c) t : Číslo 3 je kladné. | u : Číslo 3 je nekladné. |

- [a) Výrok q není negace p , neboť to, že mám černý svetr, není jediná možnost, kdy nenastane situace z výroku p – také bych mohl mít svetr červený, zelený...
b) Výrok s není negace r , neboť s nepostihuje všechny podmínky, kdy nenastane situace z výroku r – bod A by také mohl ležet na hraniční kružnici kruhu.
c) Výrok u je negace t .]

Úloha 2

Negujte následující jednoduché výroky a rozhodněte, zda je pravdivý původní výrok, nebo jeho negace.

- a) Číslo $\sqrt{3}$ je racionální.
b) Číslo 41 je prvočíslo.
c) $5^3 = 125$.

- [a) Číslo $\sqrt{3}$ je iracionální; negace je pravdivá.
b) Číslo 41 je číslo složené nebo 1; platí původní výrok.
c) $5^3 < 125$ nebo $5^3 > 125$; příp. $5^3 \neq 125$; platí původní výrok.]

Některé pojmy logiky mohou být neformálně vysvětleny s využitím vztahů mezi množinami. Tak jako negace výroku souvisí s doplňkem množiny v množině, **konjunkce** dvou výroků souvisí s průnikem dvou množin a **disjunkce** se sjednocením množin (Calda). Tato paralela umožní žákům rychleji si osvojit nově zaváděné pojmy a jejich význam za předpokladu, že již absolvovali výklad o množinách.

Pomocí logických spojek konjunkce a disjunkce¹ vytváříme z jednoduchých výroků složené výroky. V této etapě výkladu může žákům činit problémy objevování konjunkcí a disjunkcí v konkrétních tvrzeních, např. rozpoznání konjunkce ve výroku „Číslo 12 je násobkem čísla 3 a čísla 4.“, obdobně v případě disjunkce „Číslo 12 je násobkem čísla 3 nebo 4.“. Je proto vhodné tuto dovednost procvičit na dostatečném počtu příkladů.

Úloha 3

V následujících tvrzeních najděte jednoduché výroky a запиšte složený výrok symbolicky pomocí logických spojek disjunkce a konjunkce:

- a) $4 \cdot (7 + 5) = 4 \cdot 12 = 48$,
b) $-1 < 1 < 3$,
c) $-35 \leq -18$.

- [a) $(4 \cdot (7 + 5) = 4 \cdot 12) \wedge (4 \cdot 12 = 48)$; b) $(-1 < 1) \wedge (1 < 3)$; c) $(-35 < -18) \vee (-35 = -18)$]

V případě disjunkce je třeba zdůraznit, že tuto spojku, kterou čteme jako „nebo“, chápeme v nevylučovacím významu. Vzhledem k tomu, že čeština rozlišuje u spojky „nebo“ dva významy – vylučovací a alternativní („nevylučovací“), je vhodné uvést, že totéž činí i logika. Logická spojka, která odpovídá vylučovacímu významu spojky „nebo“,

¹ Někdy se používá také označení alternativa (Polák; Šedivý).

se nazývá **vylučující disjunkce**² a značíme ji symbolem $\underline{\vee}$. Podtržení symbolu $\vee$ můžeme chápat jako analogii čárky, kterou píšeme před vylučovací spojkou „nebo“ v českém jazyce. Vylučující disjunkce libovolných výroků p, q je pravdivá pouze tehdy, je-li pravdivý právě jeden z výroků p, q (viz tabulka). V mluvené řeči disjunkci a vylučující disjunkci rozpoznáme většinou pouze podle kontextu.

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabulka pravdivostních hodnot vylučující disjunkce

V hovorovém jazyce často také nerozlišujeme implikaci a ekvivalenci, a proto je třeba žákům zdůraznit, že z pohledu logiky je mezi těmito spojkami podstatný rozdíl.

Implikace $p \Rightarrow q$ je nepravdivá jedině v případě, kdy pravdivý předpoklad p implikuje nepravdivý závěr q . Je tedy důležité, který výrok v implikaci je předpokladem a který závěrem; tyto dva výroky nelze proto v konkrétní implikaci zaměňovat bez uvážení, neboť tím můžeme vytvořit implikaci, která nemá stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace. Tak zatímco výrok „Jestliže přirozené číslo je dělitelné 4, potom je dělitelné 2.“ je pravdivý, výrok „Jestliže přirozené číslo je dělitelné 2, potom je dělitelné 4.“ již pravdivý není.

Zaměníme-li v implikaci předpoklad a závěr, získáme **obrácenou implikaci** $q \Rightarrow p$ (k původní implikaci $p \Rightarrow q$). Obrácená implikace nemá v obecném případě stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace.

Jiná situace nastane, jestliže předpoklad i závěr implikace znegujeme a poté zaměníme, získáváme tak **obměněnou implikaci**, $\neg q \Rightarrow \neg p$ (provedli jsme tzv. transpozici), která má stejnou pravdivostní hodnotu jako původní implikace. Porozumění a vysvětlení rozdílu mezi obrácenou a obměněnou implikací je důležitá dovednost, kterou by žáci měli aktivně používat v průběhu celého studia matematiky. Řada matematických vět má formu implikace, a proto je důležité, aby žáci nezaměňovali předpoklad a závěr.

Úloha 4

Ke každé implikaci zformulujte obrácenou a rozhodněte o pravdivosti dané a obrácené implikace.

- Jestliže v rovině leží bod na ose úsečky, potom má od obou krajních bodů dané úsečky stejnou vzdálenost.
- Jestliže je trojúhelník pravoúhlý, potom nemá tři ostré vnitřní úhly.

- [a) Jestliže bod v rovině má stejnou vzdálenost od obou krajních bodů dané úsečky, potom leží na ose úsečky. Obě implikace jsou pravdivé.
b) Jestliže trojúhelník nemá tři ostré vnitřní úhly, potom je pravoúhlý.
Původní implikace je pravdivá, obrácená je nepravdivá.]

Úloha 5

Ke každé implikaci z úlohy 5 zformulujte obměněnou implikaci a rozhodněte o její pravdivosti.

² Někdy se používá označení vylučující alternativa, ostrá alternativa.

- [a) Jestliže bod v rovině nemá stejnou vzdálenost od obou krajních bodů dané úsečky, potom neleží na ose této úsečky. Výrok je pravdivý.
b) Jestliže trojúhelník má tři ostré vnitřní úhly, potom není pravoúhlý. Výrok je pravdivý.]

Určité oživení výuky mohou přinést úlohy, ve kterých pracujeme se slavnými výroky či pořekadly; není však vhodné určovat pravdivost těchto výroků.

Úloha 6

Nejdříve přeformulujte následující složené výroky ³ jako implikace a vytvořte také jejich obměnu.

- a) Hlupák, který nás pochválí, nám nepřipadá tak hloupý.
b) Když vyjdu se ženou, nevyjdu s penězi.

- [a) Jestliže nás hlupák pochválí, potom nám nepřipadá tak hloupý.
Jestliže nám hlupák připadá tak hloupý, potom nás nepochválí.
b) Jestliže vyjdu se ženou, potom nevyjdu s penězi.
Jestliže vyjdu s penězi, potom nevyjdu se ženou.]

Ekvivalence $p \Leftrightarrow q$ je pravdivá pouze tehdy, kdy oba výroky p , q jsou pravdivé, nebo oba nepravdivé. V případě, že výroky p , q mají různé pravdivostní hodnoty, je ekvivalence nepravdivá. Při tomto ohodnocení výroků p , q je vylučující disjunkce naopak pravdivá, tedy vylučující disjunkce je negace ekvivalence.

Ekvivalenci dvou výroků by žáci měli chápat také jako „oboustrannou implikaci“, tj. jako konjunkci implikací $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$. Můžeme zde opět poukázat na souvislost s množinovými vztahy, konkrétně na rovnost dvou množin, kterou chápeme jako „oboustrannou inkluzi“.

Úloha 7

Z následujících tvrzení vyberte všechny dvojice ekvivalentních výroků:

- a: Čtýřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.
b: Trojúhelník KLM je rovnoramenný.
c: Ve čtýřúhelníku $ABCD$ se jeho úhlopříčky navzájem půlí.
d: Trojúhelník KLM je rovnostranný.
e: Čtýřúhelník $ABCD$ je čtverec.
f: Trojúhelníku KLM má všechny výšky shodné.
g: Čtýřúhelník $ABCD$ má všechny strany shodné.
h: Trojúhelník KLM má všechny vnitřní úhly shodné.

[Dvojice a, c; dvojice d, f; dvojice d, h; dvojice f, h.]

V případě, že jsme již probrali logické spojky, můžeme řešit úlohy na sestavování tabulek pravdivostních hodnot různých složených výroků, ověřování tautologií a následně i úlohy na negování složených výroků. Symbolické zápisy složených výroků a jejich negací procvičují matematickou symboliku a současně napomáhají žákům zapamatovat si potřebná pravidla logiky. Aby se však u žáků nevytvořil pouze formalistický přístup k tomuto učivu, je třeba řešit dostatečné množství slovních úloh.

³ Autorem je Francois de La Rochefoucauld (1613 – 1680), francouzský epigramatik a aforista.

Úloha 8

Zformulujte negace následujících složených výroků.

a: Je-li koeficient přímé úměrnosti $y = 2x$ kladný, pak je tato přímá úměrnost rostoucí funkce.

b: Jestliže je číslo 136 dělitelné 8, potom je dělitelné 4 a 2.

c: Kruhy K_1 a K_2 jsou shodné právě tehdy, když mají stejné poloměry.

[$\neg$ a: Koeficient přímé úměrnosti $y = 2x$ je kladný a tato přímá úměrnost není rostoucí funkce.

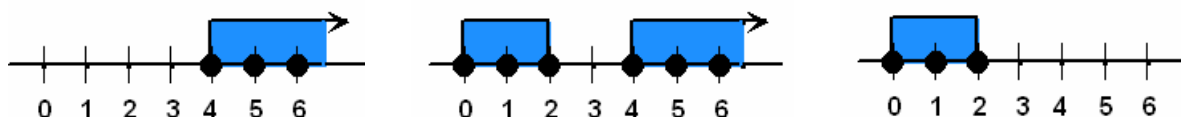
$\neg$ b: Číslo 136 je dělitelné 8 a není dělitelné 4 nebo není dělitelné 2.

$\neg$ c: Kruhy K_1 a K_2 jsou shodné právě tehdy, když nemají stejné poloměry
nebo Kruhy K_1 a K_2 nejsou shodné právě tehdy, když mají stejné poloměry
nebo Kruhy K_1 a K_2 jsou shodné a nemají stejné poloměry
nebo kruhy K_1 a K_2 mají stejné poloměry a nejsou shodné.]

Výroky, v nichž je uveden počet nebo odhad počtu objektů, o kterých se ve výroku hovoří, nazýváme **kvantifikované výroky**. Význam kvantifikátorů, které jsou tvořeny číslovkou a některým ze slov „aspoň, nejvýše, právě“, lze názorně vysvětlit pomocí části číselné poloosy. Používáme část číselné poloosy, na které jsou zobrazena pouze přirozená čísla a číslo 0 - Obr. 1 (nejvýše 3, právě 3, aspoň 3 prvky).



Tento model využijeme i při vysvětlení principu negování těchto výroků. Využíváme souvislost negace s doplňkem množiny - Obr. 2 (aspoň 4, nejvýše 2 nebo aspoň 4, nejvýše 2 prvky).



Mezi kvantifikovanými výroky v matematice hrají důležitou roli obecné a existenční výroky, neboť nás často zajímá, zda jistou vlastnost mají všechny objekty, nebo aspoň jeden objekt. **Obecný kvantifikátor** $\forall$ souvisí s implikací. Výroky s tímto kvantifikátorem můžeme přeformulovat na implikace, aniž bychom podstatným způsobem změnili jejich význam, např. výrok „Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný.“ vyjádříme „Jestliže je trojúhelník rovnostranný, potom je rovnoramenný.“⁴. **Existenční kvantifikátor** $\exists$ chápeme ve významu „existuje aspoň jeden prvek“, v matematice také používáme **kvantifikátor jednoznačné existence** $\exists!$, který čteme „existuje právě jeden prvek“, např. „Existuje právě jedno reálné číslo, které je současně nezáporné a nekladné.“.

⁴ Je třeba učinit úmluvu, že výrok chápeme i s nevyjádřeným obecným kvantifikátorem, tj. „Pro každý rovnostranný trojúhelník platí: Je-li trojúhelník rovnostranný, potom je rovnoramenný.“.

Pokud žáci začínají negovat tyto výroky, často považují za negaci výroku „Každý prvek z množiny M má danou vlastnost.“ výrok „Žádný prvek z množiny M nemá danou vlastnost“. Tento výrok však zachycuje pouze jednu možnost, kdy nenastane situace popsaná v původním výroku; další možné situace jsou, že tuto vlastnost nemá jeden prvek nebo nemají dva nebo tři atd. prvky. Všechny tyto případy shrnuje slovní spojení „Aspoň jeden prvek nemá danou vlastnost.“. Pokud označíme sdělení „Prvek x má danou vlastnost.“ symbolem v , můžeme symbolicky zapsat negování obecných a existenčních výroků, které se zabývají vlastnostmi prvků z množiny M , následujícím způsobem:

$$\neg (\forall x \in M; v) \Leftrightarrow (\exists x \in M; \neg v)$$

$$\neg (\exists x \in M; v) \Leftrightarrow (\forall x \in M; \neg v)$$

Úloha 9

Negujte následující obecné a existenční výroky, rozhodněte, zda platí výrok, či jeho negace.

- a) a : Existuje násobek 5, který není násobkem 6.
- b) b : Každé celé číslo je iracionální.
- c) c : Existuje právě jedno prvočíslo, které je sudé.

- [a] Každý násobek 5 je násobkem 6. Výrok a platí.
- b) Existuje celé číslo, které je racionální číslo. Výrok $\neg b$ platí.
- c) Každé prvočíslo je liché nebo aspoň dvě prvočísla jsou sudá.

Výrok c platí.]

V případě, že výrok obsahuje obecný i existenční kvantifikátor, je jejich pořadí důležité, neboť záměna těchto dvou kvantifikátorů mění význam výroku. Tak tvrzení „Ke každé dívce existuje chlapec, který ji má rád.“ znamená něco jiného než výrok „Existuje chlapec, který má rád každou dívku.“. V matematice najdeme celou řadu definic či tvrzení, které obsahují oba kvantifikátory, a proto je důležité, aby si žáci byli vědomi významu jejich pořadí; např.:

„Zobrazení v rovině nazýváme podobnost s koeficientem k , právě když existuje kladné reálné číslo k tak, že pro každé dvě dvojice bodů A, A' a B, B' vzoru a obrazu platí vztah $|A'B'| = k \cdot |AB|$ “.

Na závěr uvedeme ještě jednu úlohu.

Úloha 10

Negujte následující výroky a rozhodněte, zda platí výrok, či jeho negace.

- a) a : $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}; (y + 1 > x \wedge y \leq x)$
- b) b : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c = 0$
- c) c : $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z}; (y + 1 > x \wedge y \leq x)$

- [a] $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N}; (y + 1 \leq x \vee y > x)$, platí $\neg a$.
- b) $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c \neq 0$, platí $\neg b$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z}; (y + 1 \leq x \vee y > x)$, platí c .]