

Úloha 1:

Ověřte vzorec (1)

a) pro komolý kužel,

b) pro polokouli!

Řešení:

a) Poloměry podstav komolého kužele jsou a , b , poloměr středního řezu $\frac{a+b}{2}$,

výška tělesa je v . Dosazením za S_1, S_2, S_3 dostaneme

$$V = \frac{v}{6} \left[\pi a^2 + 4\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \pi b^2 \right] = \frac{\pi v}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

b) Podle Euklidovy věty poloměr středního řezu polokoule je $\frac{r}{2}\sqrt{3}$

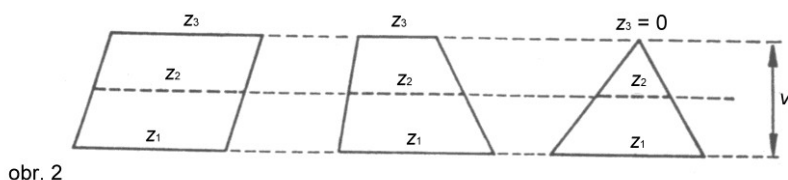
Dosazením za $S_1 = \pi r^2, S_2 = \frac{3r^2}{4}, S_3 = 0, v = r$, dostaneme

$$V = \frac{r}{6} \left[\pi r^2 + 4\pi \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 0 \right] = \frac{2\pi r^3}{3}$$

Vzorec však v jisté modifikaci platí také pro obsahy některých známých rovinných útvarů. Pro obsah S rovnoběžníku, trojúhelníku nebo lichoběžníku totiž platí

$$S = \frac{v}{6} (z_1 + 4z_2 + z_3), \quad (2)$$

kde z_1 a z_3 jsou délky základů rovnoběžníku nebo lichoběžníku, případně trojúhelníku (kde jedna z podstav je nulová), z_2 je délka střední příčky obrazce a v je jeho výška.



Narazíme až u kruhu, pro kruh nám vzorec selže.

Úloha 2:

Ověřte vzorec (2)

a) pro rovnoběžník

b) trojúhelník

c) lichoběžník

Ověřte, že vzorec (2) neplatí pro kruh.

Řešení: Úlohy a), b), c) jsou jednoduché, ukážeme případ d).

Pro kruh máme $z_1 = z_3 = 0, z_2 = 2r, v = 2r$, takže

$$S = \frac{2r}{6} (0 + 4 \cdot 2r + 0) = \frac{8}{3} r^2 \neq \pi r^2$$

Proč tento univerzální vzorec v mnoha případech platí a pro kruh ne?

Odpověď dává integrální počet a rovnost, která platí pro kubickou funkci

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (3)$$

Jde o zvláštní případ tzv. Simpsonova vzorce, který se užívá k přibližnému výpočtu určitých integrálů. /2/, /3/ Vzorec (3)

Můžeme ověřit přímým (i když poněkud zdlouhavým) výpočtem.

Úloha 3

Ověřte, že pro kubickou funkci v mezích $a = 0$, $b = 1$ platí vzorce (2) a (3) přesně.

$$\text{Řešení} \quad \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

$$S = \frac{1}{6} \left[d + 4 \left(\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \right) + a + b + c + d \right] = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

Vzorec (3) platí také v případě, že některý z koeficientů A , B , C je nulový, neboli (3) platí také pro funkci kvadratickou, lineární nebo konstantní. Pokusíme se zjistit, pro které funkce vzorec (2) platí.

Úloha 4

Určete, pro která n platí vzorec (3) pro mocninnou funkci.

$$y = x^n \text{ v mezích } a = 0, b = 1.$$

$$\text{Řešení.} \quad \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{6} \left[0 + 4 \cdot \frac{1}{2^n} + 1 \right] \quad (4)$$

Zjistíme, že (3) platí pro $n = 1, 2, 3$. Zde nám z vyšetřování vypadla konstantní funkce, případ $n = 0$. Proč? Možná, že se vám podaří najít další funkce, které třeba v nějakém intervalu Simpsonovu vzorec (3) vyhovují.

Zároveň dostáváme odpověď na to, proč univerzální vzorec platí nebo neplatí. Vzorec (1) pro objem platí, když kolmý řez tělesa k výšce je kubickou (speciálně kvadratickou, lineární nebo konstantní) funkcí úseku této výšky od jedné z podstav. To ovšem je v uvedených případech a v mnoha dalších splněno. Všimněme si známého vzorce pro objem rotačních těles

$$V = \pi \int_a^b g^2(x) dx. \quad (5)$$

Těleso o výšce $b - a$ vzniká tak, že graf funkce $y = g(x)$ rotuje kolem osy x .

Úloha 5

Určete podmínku pro funkci g tak, aby pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce g kolem osy x vzniklo těleso, pro jehož objem platí Simpsonův vzorec (1).

Řešení:

Výraz $g(x)$ je druhou odmocninou z kubického (příp. kvadratického nebo lineárního) polynomu proměnné x .

Úloha 6

Ověřte, že vzorec (1) platí pro objemy rotačních těles vytvořených rotací kolem osy x těmito grafy:

$$a) y = \sqrt{4-x}, x \in \langle 0, 4 \rangle, \quad b) y = x\sqrt{x}, x \in \langle 0, 4 \rangle, \quad c) y = \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle$$

Řešení:

$$a) \quad v = 4, S_1 = 4\pi, S_2 = 2\pi, S_3 = 0, V = \frac{4}{6}(4\pi + 4 \cdot 2\pi + 0) = 8\pi$$

$$\pi \int_0^4 (4-x) dx = 8\pi = V$$

$$b) \quad v = 4, S_1 = 0, S_2 = 32\pi, S_3 = 64\pi, V = \frac{4}{6}(0 + 32\pi + 64\pi) = 64\pi$$

$$\pi \int_0^4 (x\sqrt{x})^2 dx = 64\pi = V$$

$$c) \quad v = 1, S_1 = \pi, S_2 = \frac{3\pi}{4}, S_3 = 0, V = \frac{1}{6}(\pi + 3\pi + 0) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{2\pi}{3} = V$$

Obdobně vzorec (2) pro obsahy platí tehdy, když délka řezu obrazce kolmo k výšce obrazce je konstantní, lineární, kvadratickou nebo kubickou funkcí úseku výšky od jedné z podstav obrazce.

Úloha 7

Vysvětlete, proč vzorec (2) platí pro rovnoběžník, lichoběžník a trojúhelník, ale neplatí pro kruh nebo části kruhu.

Řešení plyne bezprostředně z výsledku úlohy 4.

Úloha 8

Vypočítejte a) $\int_1^3 x^2 dx$, b) $\int_2^4 x^3 dx$. Ukažte, že obsahy útvarů určených daným intervalem a ohraničených integrandem vyhovují vzorci (2).

Řešení:

$$a) \quad v = 2, z_1 = 1, z_2 = 4, z_3 = 9, S = \frac{2}{6}(1 + 4 \cdot 4 + 9) = \frac{26}{3}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3} = S$$

$$b) \quad v = 2, z_1 = 8, z_2 = 27, z_3 = 64, S = \frac{2}{6}(8 + 4 \cdot 27 + 64) = 60$$

$$\int_2^4 x^3 dx = 60 = S$$

Úloha 9

Ukažte, že obsahy obrazců určených integrály:

a) $\int_1^3 x^4 dx$, b) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$, c) $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ nelze počítat podle vzorce (2) a vysvětlete proč.

Řešení:

a) $v = 2, z_1 = 1, z_2 = 16, z_3 = 81, S = \frac{2}{6}(1 + 4 \cdot 16 + 81) = \frac{146}{3}$

$$\int_1^3 x^4 dx = \frac{242}{5} \neq S$$

b) $v = 2, z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{4}, z_3 = \frac{1}{9}, S = \frac{2}{6}\left(1 + 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{19}{27}$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3} \neq S$$

c) $v = 4, z_1 = 0, z_2 = \sqrt{2}, z_3 = 2, S = \frac{4}{6}(0 + 4\sqrt{2} + 2) = \frac{4}{3}(1 + 2\sqrt{2})$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{16}{3} \neq S$$

Důvod dává řešení úlohy 4.

Úloha 10

Ukažte, že obsah obrazce z úlohy 9 c) lze počítat podle vzorce (2) pomocí inverzní funkce k integrandu. Jak nutno volit výšku a střední řez útvaru?

Řešení:

Inverzní funkce k integrandu je funkce $y = x^2$ v $\langle 0, 2 \rangle$.

$v = 2, z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 4, S = \frac{2}{6}(0 + 4 \cdot 1 + 4) = \frac{8}{3}$, dočtením do obsahu obdélníku $4 \cdot 2 = 8$

dostaneme správný výsledek $\frac{16}{3}$.