Před mnoha lety jsem rozebíral písemku na rovnice s neznámou v absolutní hodnotě a vytýkal žákům, že nevyloučili z množiny řešení nepravé kořeny. Na tabuli jsem přitom z mladické nerozvážnosti provedl neobvyklý zápis.

$|x+3|+|2x-8|=9$

nulové body: $x=-3,\ x=4$

1) $x \in (-\infty;-3\rangle$

KO

$$(-x-3)+(-2x+8)=9$$
$$-3x+5=9$$
$$-3x=4$$
$$x=-\frac{4}{3}$$
$$K_1=\emptyset$$

2) $x \in \langle -3;4)$

OK

$$(x+3)+(-2x+8)=9$$
$$-x+11=9$$
$$-x=-2$$
$$x=2$$
$$K_2=\{2\}$$

3) $x \in \langle 4;+\infty)$

OK

$$(x+3)+(2x-8)=9$$
$$3x-5=9$$
$$3x=14$$
$$x=\frac{14}{3}$$
$$K_2=\left\{\frac{14}{3}\right\}$$

Nepravé kořeny musí být zlikvidovány!!!

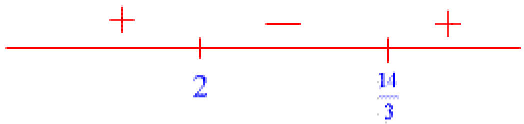
$$K=\left\{2;\frac{14}{3}\right\}$$

Nyní již na tuto nerozvážnost jaksi nemám nárok, přesto při výkladu píšu své oblíbené **KO** a **OK**. Vzbudí to chvilku nekontrolovatelného veselí. Emoce ale způsobí, že žáci pak na zkoušku kořenů nezapomínají.

Výrazně větší problémy však činí řešení nerovnic. Tradičním způsobem vyřešíme nerovnici, která obsahuje dva výrazy v absolutních hodnotách tak, že řešíme nerovnici ve třech intervalech, určíme třikrát průnik dvou množin a pak ještě sjednocení dílčích výsledků. Docela zdlouhavé a chybička se často vloudí. Alternativou k tomuto postupu je využití znaménkové metody, kterou žáci dobře znají z učiva o nerovnicích v součinovém či podílovém tvaru. Výhodné je vždy navázat řešení nerovnice na řešení příslušné rovnice (obvykle tuto dvojici dávám i do písemek). Například v návaznosti na uvedenou rovnici, můžeme zapsat řešení nerovnice $|x+3|+|2x-8|>9$ stručně například takto:

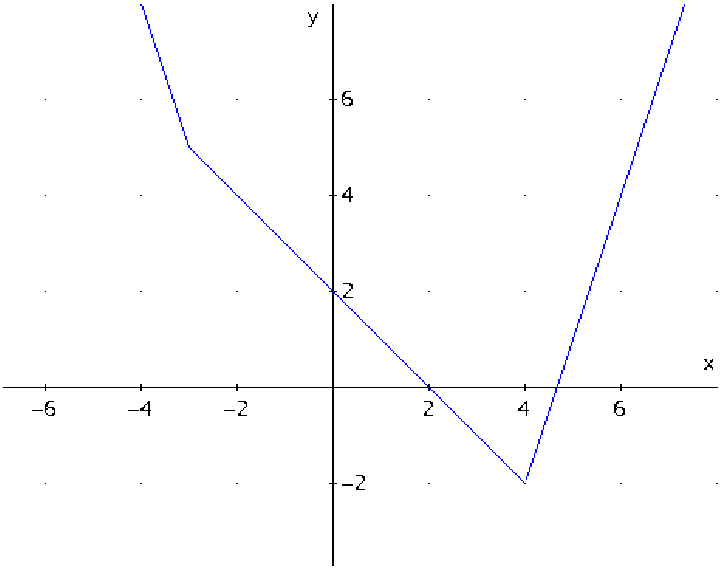
$$|x+3|+|2x-8|>9$$
$$|x+3|+|2x-8|-9>0$$

$$L(0)=3+8-9=2$$
$$L(3)=6+2-9=-1$$
$$L(5)=8+2-9=1$$



$$K=(-\infty;2)\cup\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$$

Přestože grafy lineárních funkcí s absolutními hodnotami se zpravidla systematicky učí až v tematickém celku funkce, je vhodné ukázat grafické řešení rovnic i nerovnic s absolutními hodnotami už nyní. Grafické řešení uvedené rovnice a nerovnice vysvětlíme na grafu funkce dané rovnicí $y = |x+3| + |2x-8| - 9$. Z grafu žáci vidí, že nepravý kořen rovnice $x = -\frac{4}{3}$ neodpovídá žádnému průsečíku grafu s osou *x* a nemá ani žádný význam pro řešení nerovnice. Hodnoty proměnné *x*, pro které je graf funkce nad osou *x*, jsou řešením dané nerovnice.



Ze znamének hodnot i grafu funkce přečteme také řešení ostatních nerovnic, které se liší jen znakem nerovnosti. Zapíšeme následující přehled:

$$|x+3| + |2x-8| = 9 \Rightarrow K = \left\{2; \frac{14}{3}\right\}$$

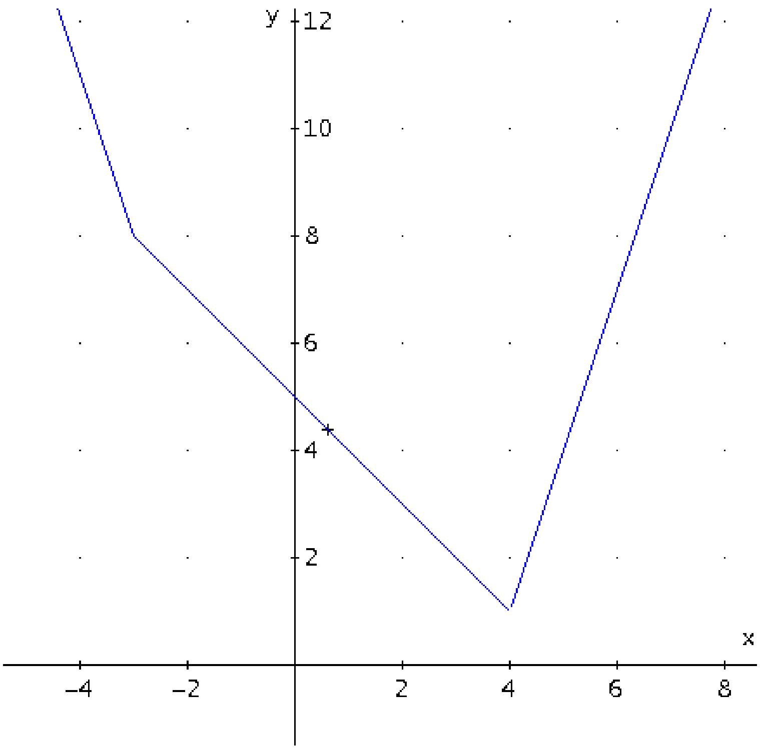
$$|x+3| + |2x-8| > 9 \Rightarrow K = (-\infty; 2) \cup \left(\frac{14}{3}; +\infty\right)$$

$$|x+3| + |2x-8| \geq 9 \Rightarrow K = (-\infty; 2\rangle \cup \left\langle\frac{14}{3}; +\infty\right)$$

$$|x+3| + |2x-8| \leq 9 \Rightarrow K = \left\langle 2; \frac{14}{3}\right\rangle$$

$$|x+3| + |2x-8| < 9 \Rightarrow K = \left(2; \frac{14}{3}\right)$$

Znaménková metoda řešení nerovnic je tím efektivnější, čím méně kořenů má příslušná rovnice. Například řešením nerovnice $|x+3| + |2x-8| > 6$ je množina všech reálných čísel, kterou bychom při tradičním postupu museli pracně sjednocovat z dílčích řešení ve třech intervalech. Když nejdříve zjistíme, že příslušná rovnice $|x+3| + |2x-8| = 6$ nemá žádné řešení, stačí již jen určit znaménko jediné hodnoty levé strany nerovnice $|x+3| + |2x-8| - 6 > 0$, např. $L(0) = 3 + 8 - 6 = 5$. Srozumitelnost řešení podpoříme zápisem znaménka + na číselné ose i grafem příslušné funkce $y = |x+3| + |2x-8| - 6$.



Zapíšeme a porovnáme řešení všech rovnic a nerovnic:

$|x+3|+|2x-8|=6 \Rightarrow K=\theta$

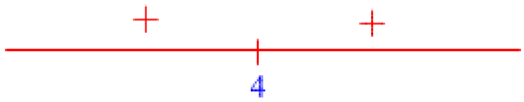
$|x+3|+|2x-8|>6 \Rightarrow K=R$

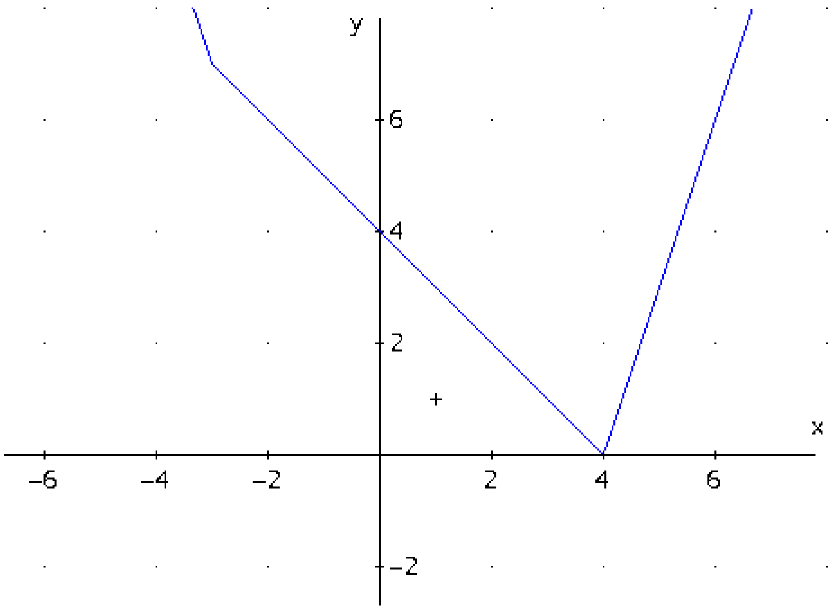
$|x+3|+|2x-8|\geq 6 \Rightarrow K=R$

$|x+3|+|2x-8|<6 \Rightarrow K=\theta$

$|x+3|+|2x-8|\leq 6 \Rightarrow K=\theta$

Po vyřešení tohoto příkladu se nabízí otázka, jak dosáhnout změnou pravé strany rovnice toho, aby měla právě jedno řešení. Odhad je poměrně snadný, grafické i početní řešení také. Je to rovnice $|x+3|+|2x-8|=7$. Jediným řešením této rovnice je $x=4$. Také v tomto případě doporučuji vyřešit všechny příslušné nerovnice s využitím znamének i grafu funkce $y=|x+3|+|2x-8|-7$.





$|x+3|+|2x-8|=7 \Rightarrow K=\{7\}$

$|x+3|+|2x-8|>7 \Rightarrow K=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$

$|x+3|+|2x-8|\geq 7 \Rightarrow K=R$

$|x+3|+|2x-8|<7 \Rightarrow K=\theta$

$|x+3|+|2x-8|\leq 7 \Rightarrow K=\{4\}$

V závěru této (či obdobné) série příkladů je důležité znovu ukázat na všechny souvislosti řešení rovnic a nerovnic s grafy a znaménky hodnot příslušných funkcí a porovnat jednotlivé výsledky.