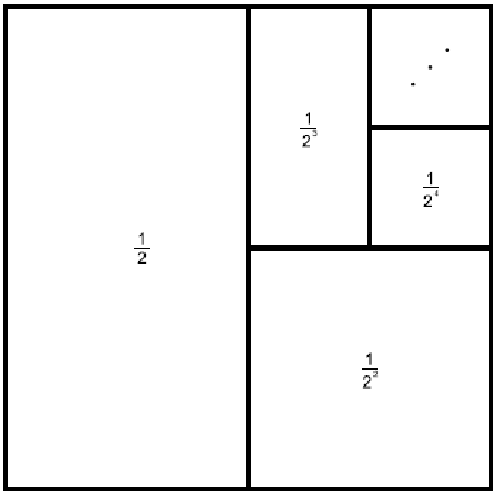
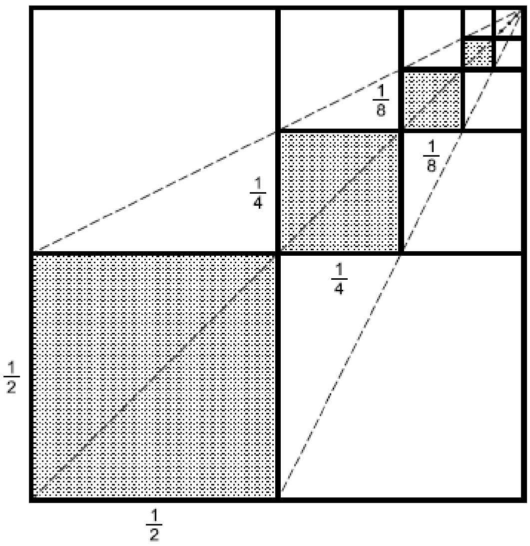
Příklad 1

Na obrázcích 1a až 1d jsou narýsovány čtverce s jednotkovou stranou, který je úsečkami rovnoběžnými se stranami rozdělen na menší čtverce, obdélníky nebo útvary složené ze čtverců s vyznačenými obsahy nebo rozměry. Jednotlivé obrázky demonstrují rovnosti.

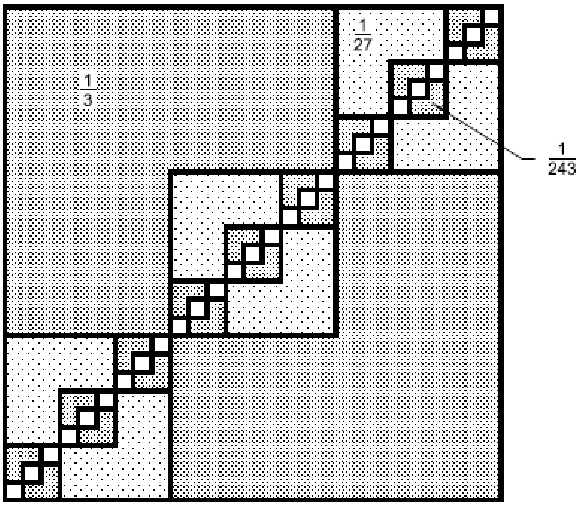
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$



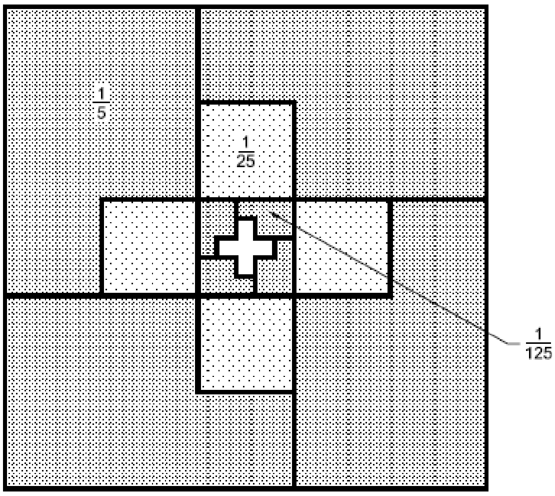
$$3.\,\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\right)=1 \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{3}$$



$$2.\left(\frac{1}{3}+3.\frac{1}{27}+9.\frac{1}{243}+\ldots\right)=1 \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}$$



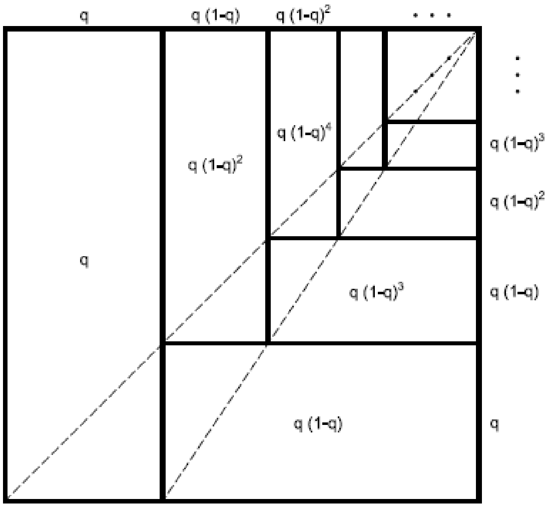
$$4.\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots\right)=1 \text{ neboli } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}=\frac{1}{4}$$



V dalších příkladech předpokládáme, že 0 < q < 1

Příklad 2 je zobecněním příkladu 1 (obr. 1), ilustruje vztah

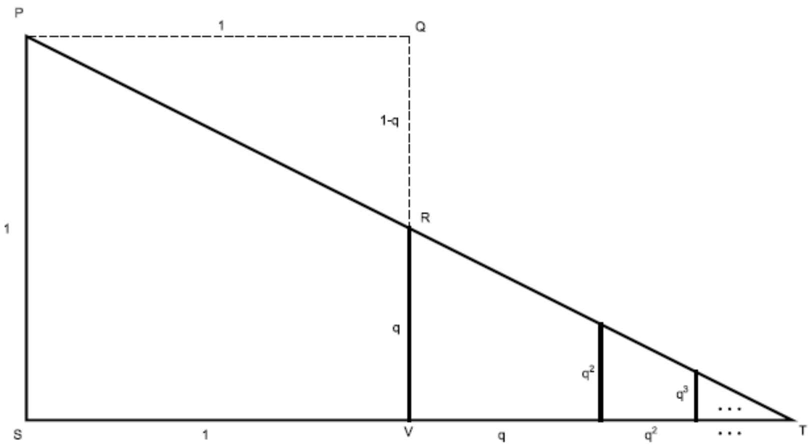
$$q + q(1-q) + q(1-q)^2 + \dots + q(1-q)^n + \dots = 1$$



Příklad 3

Jelikož $\Delta TSP \sim \Delta PQR$ (uu), platí $|TS| = |PS| . \dfrac{|PQ|}{|RQ|}$ neboli

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

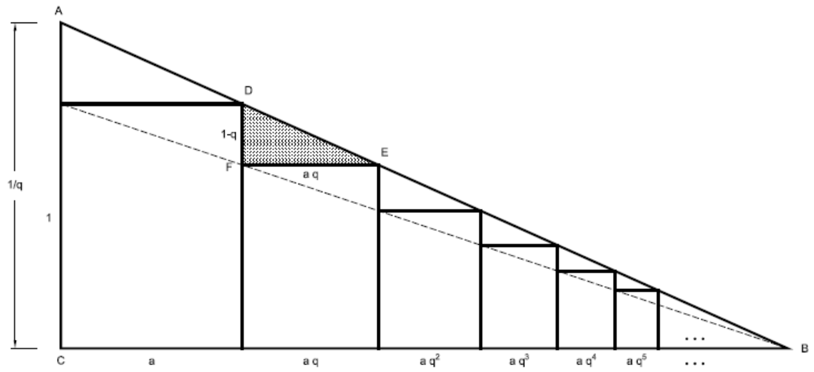


Příklad 4

Pro trojúhelníky ABC a DEF platí $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (uu), z toho plyne, že

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|DF|}$$ neboli $\frac{s}{\frac{1}{q}} = \frac{aq}{1-q}$, takže

s = $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$



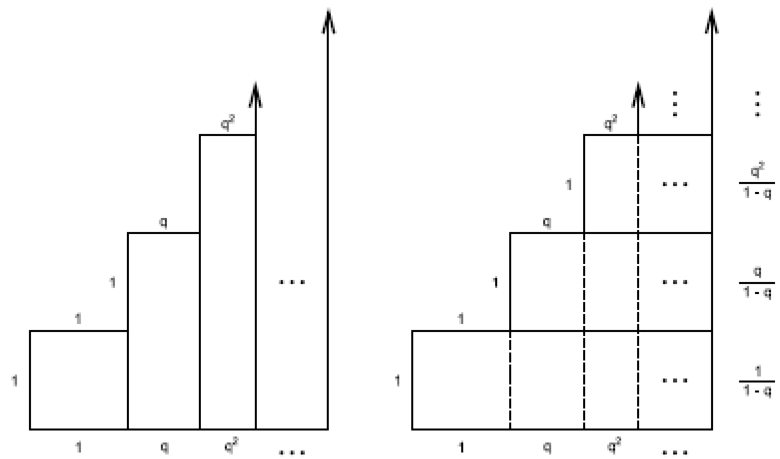
Další dva příklady se týkají hypergeometrické řady.

Příklad 5

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad (1)$$

Obr. 5 naznačuje, že hypergeometrickou řadu lze sčítat jako nekonečnou řadu konvergentních geometrických řad (tzv.Gabrielova schodiště), obrázek ukazuje dva způsoby sčítání. Podle schematu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

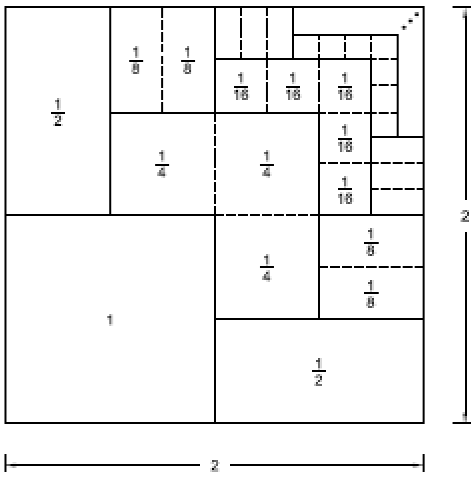


Součet řady v (1) dostaneme také jinak.Všimněte si, že řadu ze vztahu (1) vlevo dostaneme derivováním řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ člen po členu a že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k = \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k$.

Příklad 6

Je názornou specializací (1) pro $q = \frac{1}{2}$.

$$1 + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \ldots + k.\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots = 4$$



Situaci na obr. 6 lze opět zobecnit pro $0 < q < 1$ podobně jako příklad 2 zobecňuje obr.1a.