Sluneční hodiny aneb chvála vektorů

PhDr. Mgr. Jeroným Klimeš, Ph.D. 2020-08-10

Již delší čas se zaobírám myšlenkou postavit si sluneční hodiny, ale ne jako romantickou dekoraci, ale opravdu přesný časostroj. V tomto směru se proti mě spikl můj dům, protože se natočil o nějakých 29° směrem k západu. To je úhel, který slunce urazí za dvě hodiny. Jedna hodina je totiž 15°, protože 360°/24=15°. V tuto dobu – nula hodin v zimě až čtyři hodiny v létě - svítí slunce po svém východu na severní a východní stěnu. To komplikuje nejen umístění hodin, ale hlavně konstrukci jejich ciferníku. Tak jsem přemýšlel, co bude jednodušší – jestli otočit dům do správné polohy (chaloupko, chaloupko, ať je mi vhod...), nebo se naučit vektory. Po několikaměsíčním dumání jsem dospěl k názoru, že ty vektory budou méně práce.

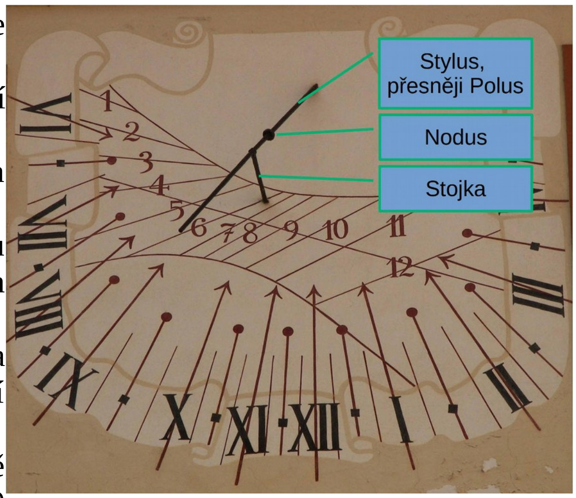
Obrázek našeho domu exportován z Google maps a úhel změřen pomocí programu GIMP. Ze stínu si můžete tipnout, že je něco po poledni.

Samozřejmě v každý den i hruška ukazuje přesný čas, problém spočívá jen v tom, pod tu hrušku musíte každý den nakreslit odlišný ciferník, abyste věděli, jaký čas vám hruška právě dnes ukazuje. Prostě stín hrušky ukazuje hodiny každý měsíc trochu jinam. **Proto se dlouho přemýšlelo, jak musí být stylus (ukazatel čili ta tyčka, co trčí ze zdi či ze země) ohnutý či natočený, abychom mohli celoročně používat jeden a ten samý ciferník.**

Na tento fígl se přišlo až geocentrickým modelem a vymyslelo se, že stylus musí mít stejný směr, jako by měla hruška na severním polu, tzn. rovnoběžný s osou země. Pak se takovému stylu říká polus (od slova pól). Na rovníku je to zase vodorovná tyčka orientovaná v severo-jižním směru. U nás, kteří ležíme v úhlu (deklinaci) 50° od rovníku, tato tyčka prochází šikmo buď podlahou nebo stěnou.

Terminologie slunečních hodin

Terminologie slunečních hodin (dále SH) je řecká a latinská.



Stylus, Stylos – obecně ukazatel, který vyrábí stín.

Gnomon – druh stylu, který je kolmý na ciferník (hruška, věž) či přesněji kolmý vůči zemi.

Polos – druh stylu, který je rovnoběžný s osou zeměkoule, která prochází severním a jižním pólem (odtud název) a v tomto století ukazuje na Polárku.

Nodus, Nod – význačný bod, například kulička na stylu, z jehož stínu chytří lidé umějí odečíst roční dobu, měsíc, popř. i datum.

Z obrázku vyčteme, že stěna domu je výrazně ukloněna k východu (odhadem 30°), přesto 12:00 správně směřuje kolmo k zemi. I bez slunce můžeme zkontrolovat, zda mezi polem a svislicí (12:00 hodinou) je úhel: (90°-deklinace), tzn. přibližně 40°. Ze stínu nodu můžeme odečíst kalendářní měsíc.

Dělení slunečních hodin

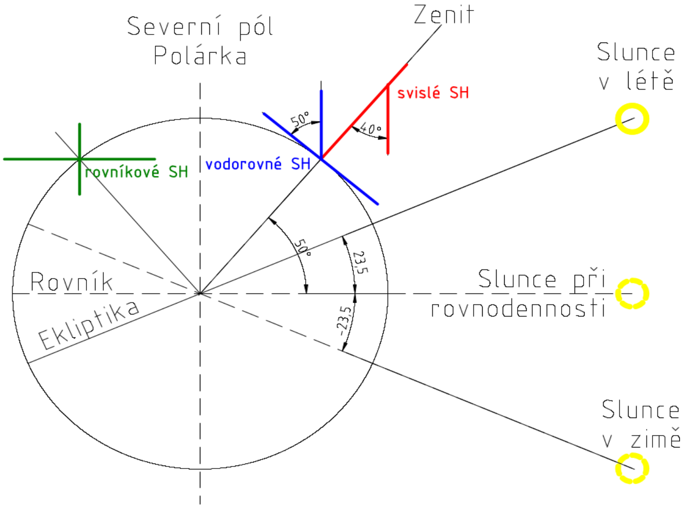
Sluneční hodiny se dělí na:

a) **Vodorovné**, které mají ciferník na zemi.

b) **Svislé**, které mají ciferník na stěně pod stylem.

c) **Rovníkové, Ekvatoriální**, které imitují sluneční hodiny na rovníku (aequator) a mají ukloněný ciferník, tak aby byl rovnoběžný s rovníkem. Poznáte je podle toho, že stylus trčí kolmo z ciferníku, popř. stylu je válec, na kterém jsou v úhlech po 15° nakresleny hodiny. Ekvatoriální hodiny pak samozřejmě můžete dovést kamkoli na světě a když správně nastavíte polus, budou ukazovat správný čas.

d) **Armilární** Jako globus je model země, tak armilární sféra je model nebeské klenby, tzn. stabilního obrazu hvězd, který rotuje nad našimi hlavami. Složitější verze rovníkových hodin.



U všech přesných slunečních hodin, tzn. svislých, vodorovných i rovníkových, je polus rovnoběžný s osou otáčení Země, se zemskou osou. Jen Slunce je buď výš, nebo níž na obloze podle roční doby.

Zeměkoule na tomto obrázku je tedy zachycena v poledne letního slunovratu. Slunce svítí shora na rovník, a tedy i na rovníkový ciferník.

Do zimního slunovratu postupně slunce sleze do úhlu -23°. To u svislých a vodorovných slunečních hodin moc nevadí – jen se protáhne či zkrátí stín. Ale na ciferník rovníkových hodin a na rovník svítí slunce najednou zdola.

Ukázky jednotlivých typů slunečních hodin

Rovníkové sluneční hodiny

V Indii prodávají jednoduchý model rovníkových hodin. Skrze placatý ciferník protahujete stylus podle deklinace, a pak hodiny nasměrujete na sever. Letní strana ciferníku.

Čínské rovníkové hodiny. Letní strana.

Na destičce jsou vyznačeny deklinace, na které se posune stylus. 12. hodina směřuje kolmo k zemi, v letním čase 13:00 – prostě pootočíte ciferník. Zimní strana ciferníku.

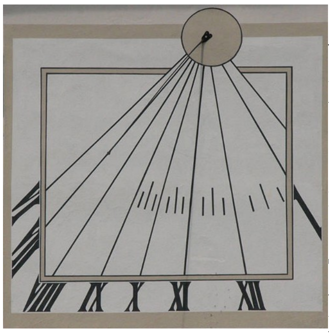
Rovníkové, ekvatoriální hodiny jsou jednoduché na výrobu a stačí je jen naklonit o deklinaci, nasměrovat na sever a všude na zemi správně měří čas. Nevýhoda placatého ciferníku u rovníkových hodin se projeví okolo rovnodennosti, kdy Slunce obíhá po rovníku a nevrhá stín na ciferník. Ciferník, má-li být rovnoběžný s rovníkem a kolmý na stylus, je totiž odkloněn od Slunce. Proto se obvykle plochý ciferník u rovníkových hodiny nahrazuje válcem. U správně sestavených rovníkových hodin ukazuje 12:00 (13:00) letního času kolmo k zemi.

Vodorovné hodiny

Vodorovné hodiny mají složitější ciferník než rovníkové. Nestačí jen nastavit polus, ale musíte mít i správný, symetrický ciferník pro danou deklinaci. Hodiny jsou od sebe nestejně vzdáleny. Pokud máte zájem o vodorovné hodiny, stačí zkopírovat tento návod: http://slunecnihodiny.klimes.us.

Sluneční hodiny měří pravý sluneční čas s maximální odchylkou 15 minut od středního slunečního času, který hlásí v rádiu. I pokud byste byli v naprosté pustině, tak se znalostí slunečních hodin a lunárního kalendáře (http://klimes.mysteria.cz/clanky/teologie/tyden), můžete mít velmi přesnou časomíru, se kterou lidé vystačili několik tisíc let.

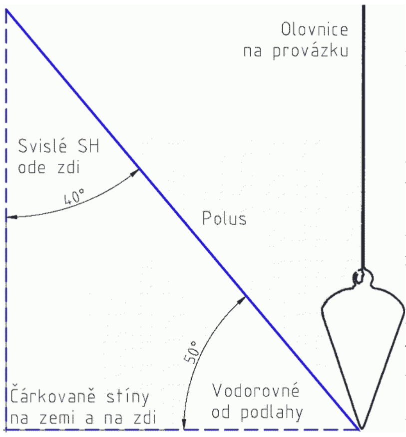
Svislé hodiny



Na výrobu ciferníku jsou nejsložitější svislé hodiny, zvláště pokud váš dům není přesně orientován k jihu. To je pak ciferník celý zkřivený podle toho, jak je ukloněna stěna domu.

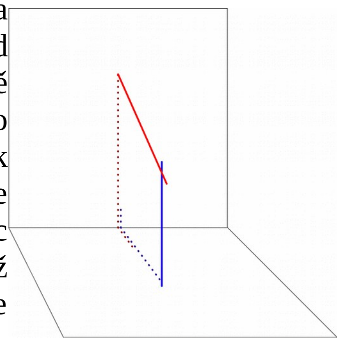
Na tomto obrázku svislé sluneční hodiny nemají správně nastavený stylus. Jak to poznáme? Jednoduše, poledne (13:00 LČ) na svislé stěně, i na té, která není přesně orientovaná na jih, má směřovat kolmo dolů a na zemi má udělat stín, který směřuje přesně ve směru poledníku - jih/sever. To na tomto ciferníku zjevně není. Prostě autor nerozuměl slunečním hodinám. Píchl stylus do stěny, a pak si nakreslil čáry na zeď podle hodinek. Tyto hodiny tedy mají stylus (ukazatel), ale nemají polus (neukazuje na Polárku či na pól). Prostě nejvíc pozornosti musíme věnovat co nejpřesnějšímu nastavení polu. Když ten je správně orientován, pak můžeme nakreslit čáry podle hodinek, ale polus je základ.

Nejjednodušší nastavení polu slunečních hodin



Když se chcete vyhnout složitému počítání a měření, můžete nastavit stylus poměrně snadno podle hodinek, úhloměru, popř. olovnice.

Olovnice je závaží na provázku. Když se přestane houpat, tak provázek ukazuje kolmo k zemi a na obloze k zenitu (nadhlavníku). Pokud podél tohoto provázku zatlučete do země kůl, tak dostáváte gnomon, ale ten je pro měření času nevhodný. My však využijeme stín olovnice či gnomu, ve kterém v pravé poledne leží i polus. Navíc polední stín olovnice směřuje na sever, což bývá na zahradě přesnější ukazatel než střelka kompasu, která ukazuje šejdrem kvůli železným stolům, autům, elektrickým zařízením ap.



Stíny polu i gnomu v pravé poledne splývají do jedné čáry

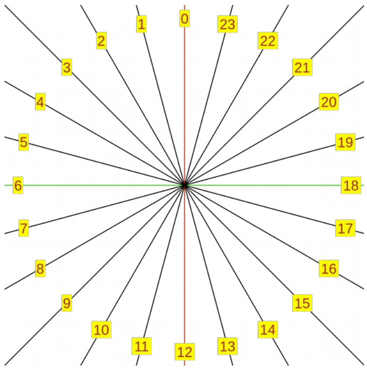
A) Nastavení stylu u vodorovných hodin

V pravé poledne (12:00; 13:00 LČ), nejpřesněji ve dnech: 15./16. dubna; 14./15. června; 1./2. září; 25./26. prosince, svěsíte olovnici přesně nad bodem, kde má být upevněn polus do podlahy. Olovnice vrhne stín směrem na sever. V tomto stínu, od podlahy odměříte úhel 50°, přesněji vaši momentální deklinaci. V tomto stínu a odměřeném úhlu upevníte polus do země.

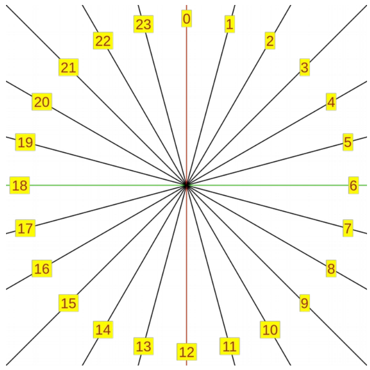
B) Nastavení stylu u svislých hodin (i na stěně ukloněné do strany)

V pravé poledne (12:00; 13:00 LČ), nejpřesněji ve dnech: 15./16. dubna; 14./15. června; 1./2. září; 25./26. prosince, svěsíte olovnici tak, aby její stín padl na bod, kde má být upevněn polus do zdi. Od stěny odměříte úhel 40° (čili 90° – deklinace) tak, aby celý úhelník byl stále ve stínu olovnice, tzn. na jedné straně se dotýká svislice na stěně. V tomto stínu a odměřeném úhlu připevníte polus ke zdi.

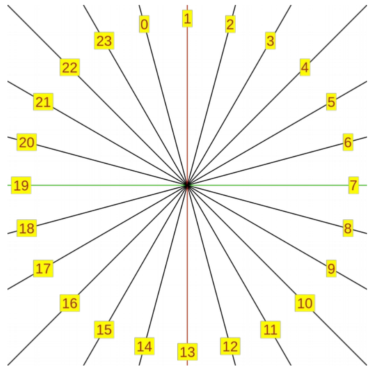
Když na tento polus navlečete kolmé kolečko se značkami po 15°, tak máte vyrobeny rovníkové sluneční hodiny (viz obrázky indických rovníkových hodin výše). Následující ciferníky se vytisknou a přilepí proti sobě na kolečko. Na horní či severní straně ciferníku si můžete vytisknout letní čas, který je posunut o hodinu.



Dolní, zimní ciferník



Horní ciferník



Horní ciferník s letním časem

Pokud chcete mít vodorovný či svislý ciferník, tak je tam musíte buď sami nakreslit nejlépe v uvedené dny, nebo je vypočítat. To už je trochu složitější.

Jestli například máte kulatý zahradní stůl, tak stačí do jeho středu zabudovat stylus pod úhlem 50° a ten nasměrovat na sever, viz výše nastavení polu podle olovnice. Na stůl zakreslíte stíny v jednotlivé hodiny. Nejpřesněji ve dnech: 15./16. dubna; 14./15. června; 1./2. září; 25./26. prosince. Pokud chcete být exaktnější, tak použijete úhly z této vystřihovánky (http://slunecnihodiny.klimes.us)

Spolek příznivců slunečních hodin

Nejpřesnější výpočty a programy slunečních hodin najdete na stránkách Astronomické společnosti v Hradci Králové, http://www.astrohk.cz/ashk/slunecni_hodiny/. Stojí za to si je alespoň projít.

Úkolem následujícího textu není konkurovat astronomům, ale motivovat čtenáře k pochopení vektorů. Aby čtenář pochopil nejen jak fungují sluneční hodiny, ale i pochopil, proč se mu učitelé snažili (většinou marně) vysvětlit vektory. Samozřejmě klasici astronomie počítali hodiny bez vektorů. Jde to, ale vektory tu práci dokáží hodně usnadnit a to nemluvím o tom, že vektory a pak tenzory jsou vstupní branou do kvantové fyziky. Nejde tedy jen o to: „Urob si sám.” O tom byl předchozí text. Teď začíná: „Urob si sám a pochop!”

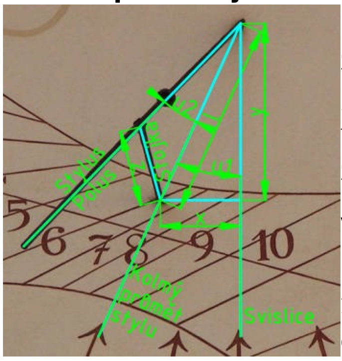
Úvod do vektorů

Syn volá matce: „Hele, mami, potřebovalas někdy v životě vektory?” Matka účetní povídá: „Ne.” „No, tak to já se na ně taky...” Tento rozhovor má asi tolik logiky jako se zeptat kuchaře, jestli někdy v životě potřeboval fonendoskop, ale odhaluje paradoxní slabinu českého školství: Vektory a derivace učí děti matematici a ti také píšou skripta. Výsledek je, že děti se naučí definice, ale nikdy se nenaučí používat ani derivace, ani vektory. Matematiku pro děti by měli učit spíše inženýři. A fyziku by měli učit řemeslníci z praxe. Stejně tak psychology by měl učit statistiku psycholog, ne statistik. Statistik začíná integrály, zatímco studenti psychologie nechápou ani logaritmus.

Vzpomínám si na střední školu – měli jsme skripta na elektrotechniku a elektroniku. Učitel nám povídá: „Pokud byste znali to, co je v těch skriptech, tak nemusíte chodit na vysokou školu.” I tyto skripta napsali nadšenci pro elektrotechniku, kteří zapomněli, že těm, kterým se to bude vykládat, neumějí vzít pájku do ruky a pletou si baterku s elektrolytickým kondenzátorem, protože vypadají podobně... Nechceme učit děti elementární řemeslo, protože je primitivní, pak se divíme, že děti nechtějí znát pokročilé nástroje.

Pokročilé nástroje totiž uvítají jen ti, kteří dokonale umí své řemeslo. Když posloucháte tlukot srdce uchem, tak uvítáte fonendoskop, ale napřed musíte umět naslouchat tlukotu srdce. To samé platí pro vektory. Ve škole nás nenaučili řemeslo, proto dodnes neumím pořádně vektory, i když s nimi celý život počítám. Pojďme si tedy probrat, co mi na školách o vektorech neřekli či co řekli nepřesně.

K čemu potřebuji vektory u slunečních hodin



Když chceme do zdi zapíchnout stylus potřebujeme některé z údajů, co jsou na obrázku. To by ještě jakž takž šlo spočítat pomocí goniometrických funkcí, ale bohužel už ne ten ciferník pod tím. Vektory totiž umožňují počítat geometrické objekty v jakýchkoli natočených či zkroucených polohách.

Vektor není jen šipka, vektor je také plocha či přímka

Vektory je instrumentárium čili brašna plná nástrojů, kterou mají fyzici na to, aby si mohli spočítat úhel a vzdálenost mezi jakýmikoli dvěma body, přímkami či plochami. Vektor pro fyzika je jednak bod, jednak přímka a dále plocha kolmá na tu přímku. Toto je třeba žákům zdůraznit, že musejí umět přeskakovat mezi těmito významy pojmu vektor a vybírat si, co zrovna potřebují.

Takto vypadají vektory – ano, jako napínáčky. Podle potřeby je chápeme buď jako bod (špičku), nebo jako přímku (bodec), nebo jako plochu (hlavičku). Vektorová algebra (vzorečky) jsou jen nástroje, jak rychle spočítat vztahy mezi nimi. Vektory pak většinou posuneme do počátku soustavy souřadnic tak, aby červená tečka ležela v bodu [0,0,0], takže pak všechny operace provádíme jen s koncovým bodem – špičkou. Prostě kroutíme s ním, jak s řadicí pákou. Každopádně zkuste si představit, jak dlouho by vám trvalo, než byste pouze s pomocí goniometrických funkcí spočítali úhel mezi bodci těchto napínáčků, pokud byste znali jen souřadnice bodů, kde se napínáčky dotýkají podložky. S vektory je to poměrně jednoduché.

S vektory počítáme, dokud to jde, v základní poloze a až úplně nakonec si je přesuneme, kam potřebujeme

Vektor v prostoru je tedy jednoznačně určen dvěma body: červenou tečkou a špičkou napínáčku. Body zapisujeme v karteziánských souřadnicích x, y, z [4,2,5], které René Descartes (latinsky Renatus Cartesius proto karteziánské) vymyslel jako analogii zemské délky, šířky a nadmořské výšky.

Dva body si matematici zjednodušují tím, že vektory přesunou do základní polohy, prostě posunou napínáček tak, aby červená tečka ležela v středu soustavy souřadnic, čímžto první bod je [0,0,0] a zajímá nás jen ten druhý.

Dva body určují přímku, která jimi prochází. Když ty body od sebe odečteme, tak dostáváme přímku, která prochází středem soustavy souřadnic.

$$\begin{array}{r} [4,\ 2,\ 5](Bod\ A) \\ -[2,\ 3,\ 7](-Bod\ B) \\ \hline [2,-1,-2](konec) \end{array}$$

Takto se ze dvou bodů udělá jeden. Od této doby počítáme jen s vektorem [0,0,0]...[2,-1,-2]. Když ho potřebujeme posunout zpět, tak zase přičteme posunutí, které jsme prve odečetli.

$$\begin{array}{r} [0,\ 0,\ 0]...[2,-1,-2] \\ [2,\ 3,\ 7]...\ [2,\ 3,\ 7] \\ \hline [2,\ 3,\ 7]...[4,\ 2,\ 5] \end{array}$$

Nyní tedy si vytvořili fyzici pár základních vzorečků, pomocí kterých s vektory šíbují, otáčí je, natahují či zkracují. A podle potřeby si je představují buď jako bod – u slunečních hodin například konec stylu, nebo jako přímku – stojka, co kolmo ze stěny podpírá stylus, nebo plochu – stěnu, na které je nakreslený ciferník.

Základní jsou různé druhy součinů – vektorový, skalární, násobení skalárem. Vzorečky najedete na Wikipedii, proto důležitější je vědět, na co se používají.

Násobení či dělení skalárem

Tento druh dělení mění délku vektoru. Většinou se nejlépe pracuje s vektory o jednotkové délce, takže ostatní vektory je třeba natáhnout či roztáhnout na jednotku, tzv. normovat:

$$NormovanyVektor = \frac{Vektor}{DelkaVektoru}$$

$$Vektor = [4,2,5]$$

$$DelkaVektoru = \sqrt{(4^2+2^2+5^2)} = 6{,}71$$

$$NormovanyVektor = [4,2,5]/6{,}71 = [0{,}596; 0{,}298; 0{,}745]$$

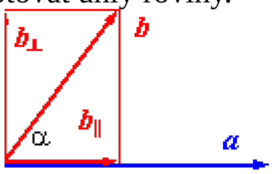
$$DelkaNormovanehoVektoru = 1$$

Skalární součin

Skalární součin se používá na dvě věci:

a) **Spočítání úhlu mezi dvěma vektory.** Když máme na domu nějakou hranu, tak neznáme souřadnice každého jejího bodu, ale zpravidla jen jednoho či dvou, například kde daná hrana prochází zemí, středem domu ap. Proto úhel by se počítal složitě jen pomocí sinus a kosinus. Proto se tyto body převedou na vektory, pomocí vzorečku skalárního součinu se spočítá úhel raz dva bez ohledu, jak jsou oba vektory v prostoru natočené.

b) **Rozklad jednoho vektoru na složky ve směru jiného vektoru.** Vektory se snadno skládají – prostě je sečtete. Například na následujícím obrázku vektor $\mathbf{b}=\mathbf{b}_{\perp}+\mathbf{b}_{\parallel}$, kde podíl rovnoběžné a kolmé složky se liší právě podle toho, jak velký úhel svírají vektory **a** a **b**. Například když táhnete sáňky na provázku **b** pod úhlem **α**, uplatní se jen složka $\mathbf{b}_{\parallel}$. Ano tady na placatém obrázku je to jednoduší spočítat pomocí sinus a kosinus, ale u slunečních hodin je vektorem **b** stylus a my potřebujeme spočítat jeho kolmý průmět na stěnu. Navíc je to celé divně natočené v prostoru, takže počítat to pomocí goniometrických funkcí by bylo za trest. V takové situaci uvítáme vektory, protože pomocí skalárního součinu je snadné spočítat, jak má být vysoká stojka ($\mathbf{b}_{\perp}$) a jak být daleko ($\mathbf{b}_{\parallel}$), aniž byste museli složitě rotovat úhly roviny.



$$a.b=|a|.|b|.\cos(\alpha) = a_1.b_1+a_2.b_2= |a|.|b_{\parallel}|= |b|.|a_{\parallel}|$$

Když známe tyto čtyři vzorečky na výpočet skalárního součinu, můžeme si vybrat, co chceme vypočítat. Například když potřebujeme znát úhel, použijeme ten s kosinem, nebo pokud chceme vypočítat kolmé složky, tak postupujeme takto:

$\lvert b_{\parallel}\rvert=a.b/\lvert a\rvert$	$\lvert a_{\parallel}\rvert=a.b/\lvert b\rvert$
$\mathbf{b}_{\parallel}=\lvert b_{\parallel}\rvert.\mathbf{a}/\lvert a_{\parallel}\rvert$	$\mathbf{a}_{\parallel}=\lvert a_{\parallel}\rvert.\mathbf{b}/\lvert b_{\parallel}\rvert$
$\mathbf{b}_{\perp}=\mathbf{b}-\mathbf{b}_{\parallel}$	$\mathbf{a}_{\perp}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\parallel}$

Samozřejmě v praxi jsou to jen funkce v počítači, které vrací požadované hodnoty, ale i když to počítáte na kalkulačce, tak je to jen násobení dvou tří čísel, žádné složitosti. Přesto to ale počítá vektory v jakékoli bláznivé poloze.

Vektorový součin

Vektorový součin je udělátko, které umí také spočítat úhel mezi dvěma vektory, ale hlavně umí k jakýmkoli dvěma vektorům spočítat třetí vektor, který je na ně oba kolmý, ergo rovinu, ve které oba vektory leží. Například podívejte se na dva napínáčky nahoře. Jejich hlavičky jsou dvě roviny, které se někde protínají do přímky. Spočítejte kudy vede tato přímka? No to bych opravdu bez vektorů počítat nechtěl. Pomocí vektorů je to naprosto triviální záležitost – vypočítáte vektorový součin. Tím dostanete nejen tuto přímku, ale i plochu, která je rovnoběžná s oběma bodci.

Přidanou hodnotou je, že velikost vektorového součinu je tak velký, jako je plocha rovnoběžníku vytvořeného z těchto dvou vektorů. Toto ale bylo u slunečních hodiny spíš na závadu, tak jsem vektorové součiny normoval na jednotkovou velikost.

Více viz kniha o fyzice Norimberský trychtýř od Jana Tomsy: http://1-2-8.net/mwva/jtomsa/trychtyr.htm

Rotace vektoru

Rotace vektoru je další udělátko, které k danému vektoru vyrobí další, pootočený o zadaný úhel okolem zvolené osy. U slunečního hodin máme vektory několikrát otočené, takže pokud je chceme dostat do původní polohy, tak je musíme zase o tato otočení vrátit zpátky. I k tomuto udělátku musíte znát vektorový a maticový počet. To není o moc těžší než násobení či dělení velkých čísel, který znáte ze základní školy, ale jak říkám, důležitější je vědět, proč to děláme, k čemu se nám to hodí, než jak přesně se to počítá. Každopádně i tento výpočet máte v programu slunečních hodin.

Afinní trasformace

K výpočtu slunečních hodin jsem používal jen výše uvedené nástroje, ale samozřejmě existují ještě další, ze kterých bych vypíchl afinní transformaci, která dokáže vektor rotovat, zkosit, změnit mu měřítko (zvětšit, zmenšit) a ještě posunout a to vše v jednom kroku – při jednom násobení maticí. Ta se hojně používá třeba u fraktálů. Viz například zde: http://klimes.mysteria.cz/inspiro/fraktal_barnsley_fern.htm

Výpočet stylu a ciferníku slunečních hodin

Když máme základní nástroje, můžeme si ukázat, jak se pak postupně dopracováváme k odpovědi na prostou otázku: Kde zavrtat díru do zdi a jak dlouhou tyčku do ní strčit? Viz souřadnice stylu na kótovaném obrázku výše.

Soustava souřadnic a co z ní vyplývá

Vyjděme z představy, že je rovnodennost a stojíme na severním pólu. Slunce celý den běží po obzoru. Ráno v 6:00 svítí na východě (osa y), v poledne na jihu (osa x), v šest hodin večer na západě (osa -y). Svítí i o půlnoci (půlnoční strana) – u nás je to sever, ale na severním polu i ta směřuje k jihu (osa -x). Kolmo nad námi nad hlavou svítí Polárka (osa z). Protože je Slunce tak daleko od země, je vcelku jedno, jestli ty osy si představujeme na pólu či ve středu země. Důležité je, že všechny operace s vektory budeme dělat právě v tomto jednom bodu. Takže vznikne jakási směska vektorů, která vypadá jako ježek či jehelník. Všechny vektory vychází z bodu [0,0,0]. Jen musíme vědět, který je který. Tak zatím máme:

[0,0,0] Střed soustavy souřadnic

[1,0,0] Osa x – polední strana (u nás k jihu). Zároveň normálový vektor hodin 6:00

[-1,0,0] Osa -x – půlnoční strana (u nás k severu). Normálový vektor 18:00.

[0,1,0] Osa y – východní strana. Normálový vektor 00:00.

[0,-1,0] Osa -y – západní strana. Normálový vektor 12:00

[0,0,1] Osa z – Polárka, na pólu v nadhlavníku (zenitu).

Vektor Polárky je ale rovnoběžný se stylem či polem slunečních hodin. Takže když stylus posuneme do středu soustavy souřadnic, bude totožný s vektorem Polárky či osy z. U svislých hodin **stylus**=-**z**. U vodorovných **stylus=+z**.

Vektor můžeme chápat i jako bod. Bod [0,0,1], popř. [0,0,-1] je tedy i konec stylu – té tyčky na slunečních hodinách.

Jenže jsme si říkali, že vektor můžeme vnímat jako plochu kolmou na tento vektor, takže i osu **z** – Polárku můžeme vnímat jako normálový vektor základové desky domu, který stojí na pólu. Jinými slovy osa z je napínáček bodcem nahoru, který leží na podlaze domu na severním pólu.

Toto je přesně to, co mě ve škole o vektorech nenaučili – podívat se na ně z mnoha úhlů pohledu a pak si vybrat ten, který právě potřebujeme.

Teď se nám hodí podívat se vektor Polárky jako na základovou desku domu, co stojí na pólu. Protože nás by ale zajímal normálový vektor našeho baráku v Čechách. To znamená, že vezmeme vektor Polárky a otočíme ji o 40° směrem ke slunci.

Na to je jednoduchá funkce, kterou najdete rozepsanou v přiloženém programu:

rotace_vektoru_kolem_osy(vektor, úhel, osa)

Proč o 40°. My ležíme za 50° rovnoběžce (naše deklinace je tedy 50°), k pólu nám tedy zbývá 40°.

Platí usus pro rotaci – pokud je rotace ve smyslu hodinových ručiček, tak je plusová. Proti směru je záporná.

zenit=rotace_vektoru_kolem_osy(Polárka, 90° - deklinace, osa x)= rotace_vektoru_kolem_osy([0,0,1], 40°, [1,0,0])

zenit=[0.642, 0.000, 0.767]

Zenit neboli nadhlavník je tedy bod přímo nad naší hlavou, když stojíme doma na dvorku.

Zenit je normálový vektor základové desky našeho domu v Čechách a má velikost jedna (jednotkový, normovaný vektor). Jen na okraj cizí slova: *Normálový* znamená kolmý (normála = kolmice k tečně). *Normovaný* znamená nastavený na normu a touto stanovenou velkostí je zde jednotka.

Zenit je tedy další vektor, který přibyl do našeho jehelníku. Teď bychom potřebovali znát vektor hřebíku, který zatlučen kolmo do jižní stěny našeho domu čili normálový vektor jižní stěny. Problém naší jižní stěny je, jak bylo už řečeno, že je pootočená o 30° k západu. Takže vezmeme si stejný normálový vektor jižní stěny domu na pólu a dvakrát ho pootočíme – jednou o úklon stěny a podruhé na naši deklinaci.

Když trochu zapřemýšlíme, tak nám dojde, že normálový vektor jižní stěny domu na pólu je vlastně totožný s osou x. Tak nejprve tento vektor ukloníme jako náš dům:

ukloněný_normálový_vektor_domu_na_pólu=rotace_vektoru_okolo_osy([1,0,0], 30°, osa z)

Podruhé ho natočíme o 40° ke slunci:

ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu= rotace_vektoru_okolo_osy(ukloněný_normálový_vektor_domu_na_pólu, 40°, osa y)=

[0.672; 0.482; -0.562]

Doufám, že je stále jasné, že toto je další vektor, který trčí z chumlu vektorů z bodu nula. Píšeme si zde jen koncové body, protože se mlčky předpokládá, že si tento zápis umí čtenář doplnit o první bod vektoru: [0;0;0]...[0.672; 0.482; -0.562] a kdyby náhodou chtěl tento vektor posunout někam do bodu [4;6;5], tak si jen tento bod přičte k oběma bodům vektoru: [4;6;5]...[4.672; 6.482; -5.562].

Máme tedy vektor zenitu (základové desky) a normálový vektor stěny (hřebík trčící ze stěny). Co užitečného pro výpočet souřadnic stylu z nich můžeme vypočítat?

Potřebovali bychom vektor jižní hrany domu, tzn. hrany, kde se jižní stěna domu stýká s podlahou, abychom mohli spočítat, o kolik je stylus odchýlen doprava či doleva. Tato hrana je průsečík dvou ploch, jejichž normálové vektory ale známe. Udělátko, které nám vytvoří nový vektor, kolmý na oba tyto vektory taky máme – to je vektorový součin:

vektor_jižní_hrany_domu=vektorový_součin(zenit, ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu)=[-0,370; 0,876; 0,309]

Potřebovali bychom znát rovinu kolmého průmětu stylu na stěnu. V této rovině leží stylus a stojka, která ho podpírá ze stěny. Novou rovinu vytvoříme opět vektorovým součinem, nyní tedy normálového vektoru stěny a vektoru stylu čili Polárky:

normálový_vektor_kolmého_průmětu= vektorový_součin(ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu, stylus)= [-0,583; 0,812; 0,000]

Tato rovina se protíná s jižní stěnou a vytváří přímku – kolmý průmět stylu na stěně, viz obrázek výše:

vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu= vektorový_součin(normálový_vektor_kolmého_průmětu, ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu)= [-0,457; -0,328; -0,827]

Tento vektor má stejně jako stylus nyní délku 1, ale protože to má být kolmý průmět ukloněného stylu na stěnu, tak musí být kratší – vždyť je to odvěsna trojúhelníku, kde stylus je přeponou. Zkrácení uděláme skalárním součinem, který jsme vysvětlili výše.

délka_kolmého_průmětu_stylu_na_stěnu=skalární_součin(stylus, vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu)

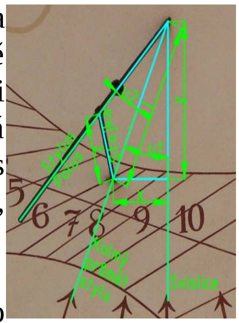
Pozor. Tento zjednodušený výpočet můžeme dělat jen, když pracujeme s jednotkovými vektory. Pokud by stylus neměřil právě jeden metr, tak by výpočet vypadal takto (viz definice skalárního součinu výše):

délka_kolmého_průmětu_stylu_na_stěnu = skalární_součin(stylus, vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu) / velikost(stylus) = -0,827

Všimněte si, že toto je číslo čili skalár a ne vektor, takže takto musíme vektor zkrátit. Uděláme to pomocí násobení vektoru skalárem:

*zkrácený_vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu = délka_kolmého_průmětu_stylu_na_stěnu * vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu = [-0,378; -0,271; -0,684]*

Délka tohoto zkráceného vektoru tedy je nyní 0,827, viz rozměr **l** na následujícím obrázku.



Tak a nyní máme všechny potřebné vektory pro výpočet souřadnic stylu na stěně – prostě co po nás bude chtít kovář či zedník, aby mohli postavit správně orientovaný stylus – tyčku, která trčí ze stěny, je trochu ukloněná doprava či doleva a ze spodu podepřená stojkou, aby se neohnula, když se na ní posadí bílá holubice. Teď se musíme zeptat zedníka či kováře, jaké parametry od nás potřebuje. Někdo raději úhly, které si nakreslí na zeď. Někdo naopak souřadnice, do kterých zavrtá díru pro kolmou stojku. Tak raději vypočítáme obě verze:

a) Úhly stylu vůči jižní stěně

Již jsme si řekli, že úhly počítáme pomocí skalárního součinu. Prostě do vzorečku zadáme dva vektory a vypadne úhel.

u1=uhel_vektorů(zenit, vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu)

u2=úhel_vektorů(stylus, vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu)

b) Souřadnice stojky od začátku stylu

Teď se projeví výhoda, že jsme všechny vektory měli s normovanou velikostí jedna.

x=skalární součin(zkrácený_vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu, vektor_jižní_hrany_domu)

y=skalární součin(zkrácený_vektor_kolmého_průmětu_na_stěnu, zenit)

z=skalární součin(ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu, stylus)

Předpokládám, že při prvním čtení jste se někde uprostřed výkladu ztratili. Ano, sluneční hodiny jsou těžké na prostorovou orientaci, ale to není problém vektorů. Tu bychom potřebovali stejně, i kdybychom to celé počítali pomocí goniometrických funkcí, ba možná ještě víc. Tak si to zkuste projít ještě jednou třeba pozítří. Ono to chce nějaký čas, než se to vše vstřebá.

Ciferník neboli číselník

Ciferník na pólu je velmi jednoduchý. Každou hodinu svítí Slunce o 15° více vpravo. Nás ale zajímá průmět tohoto ciferníku rovníkových hodin do jakékoli zvolené plochy – u vodorovných hodin je to zenit čili rovina základové desky baráku. U svislých hodin je to normálový vektor dané stěny (jedno jestli je jižní, východní či jinak ukloněná). A udělátko na počítání průniku dvou rovin známe – vektorový součin. Jinými slovy opět žádné složité počítání, jen je to trochu pracné.

Představme si, že stojíme na pólu, námi prochází zemská osa. Je rovnodennost, tedy slunce obíhá celý den po obzoru. Když vyvěsíme nad pólem olovnici, její stín vytvoří svislou plochu, ve které leží: zemská osa, Polárka, Slunce i provázek olovnice. Plochu, jak jsme si řekli, nahrazujeme jejím normálovým vektorem.

Předpokládejme dále, že je 6:00. Který vektor je kolmý na plochu stínu, který vrhá olovnice? Je to vektor polední čili osa x. Jinými slovy místo plochy stínu, můžeme pracovat s vektorem osy x jako s normálovým vektorem šesté hodiny. Tato plocha se každou hodinu posune o 15° (360/24), takže sedmou hodinu dostaneme, když vektor šesté hodiny posuneme o 15° okolo svislé osy z, tzn. okolo vektoru Polárky.

vektor_hodiny_07:00 = rotace_vektoru_kolem_osy([1,0,0], 1×15°, osa z)

vektor_hodiny_08:00 = rotace_vektoru_kolem_osy([1,0,0], 2×15°, osa z)

A tak dále až do 24:00. Vpodstatě dostaneme ciferník rovníkových hodin, viz výše.

Když nás zajímá průmět tohoto ciferníku na ukloněnou stranu našeho domu, tak si vzpomenete na dva napínáčky – to jsou taky dvě roviny. Jaké jsme měli udělátko na průnik dvou rovin. Ano, je to vektorový součin. Tak řekněme, že chceme spočítat vektor sedmé hodiny na vodorovných hodinách. Normálový vektor naší podlahy je zenit – náš nadhlavník. Ten už máme spočítaný.

vektor_vodorovných_hodin_v_7:00 = vektorovy_soucin(vektor_hodiny_7:00, zenit)

Normálový vektor jižní stěny našeho domu je normálovým vektorem ciferníku svislých SH:

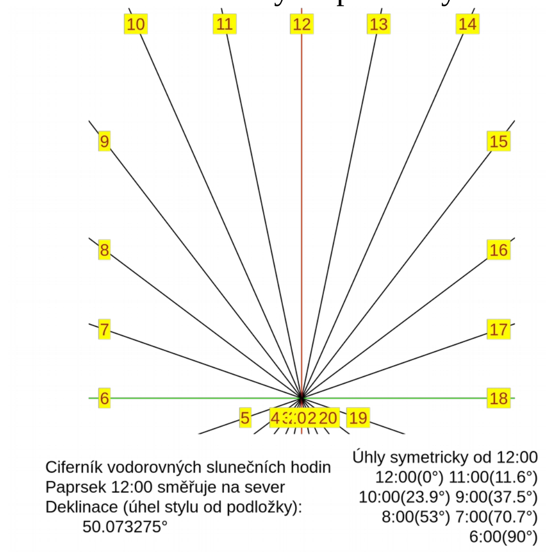
vektor_svislých_hodin_v_7:00 = vektorovy_soucin(vektor_hodiny_7:00, ukloněný_normálový_vektor_našeho_domu)

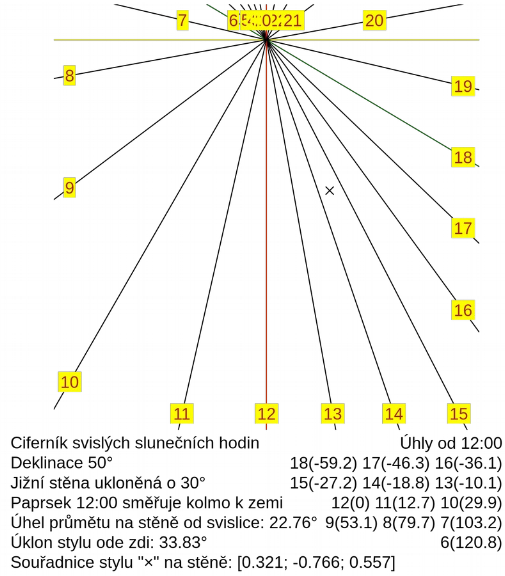
Takto vytvoříme dvakrát 24 vektorů, které jaksi šikmo do stran trčí z chumlu vektorů z počátku soustavy souřadnic. To je nám v praxi trochu na nic. My potřebuje znát úhly mezi těmito hodinami, které díky průmětům už dávno nejsou 15°. I na to máme v našem vektorovém intrumentáriu, totiž skalární součin.

uhel_mezi_vektory(*vektor_vodorovných_hodin_v_7:00, vektor_vodorovných_hodin_v_8:00)*

Takto vypočítáme všechny úhly na ciferníku SH a protože to počítáme pomocí vektorů, tak je nám úplně jedno, že ty vektory jsou tak nějak divně otočené v prostoru. Například ciferník Strážce času v Sezimově ústí (zvláštní SH) je ukloněn o 3°. Nejjednodušší je tedy spočítat normálový vektor této plochy, a pak vytvořit číselník stejným způsobem.

Když už známe úhly, není žádný problém tyto výsledky vynést do grafu či vzít úhelník a na kreslit je rovnou na zeď. Všechny tyto potřebné údaje, jak ohledně upevnění stylu tak i kresby ciferníku máte shrnuty na přiložených cifernících.





Kontroly a ověřování

U slunečního hodin je velká výhoda – dá se v praxi velmi rychle ověřit, zda fungují. Když se dělají v psychologii prognózy, tak je děláme na 10 let dopředu (Co s dětmi udělá rozvod?), takže to je mnohem těžší. Nicméně i zde by se hodila nějaká kontrola dříve, než je půjdeme hodiny kout do kovárny.

Základní kontroly

Základní tvar ciferníků – kde je 12:00? Kde je 6:00 a 18:00?

Je mezi stylem a 12. hodinou úhel 40, resp. 50°?

Mají vodorovné hodiny symetrický číselník?

Je stylus u vychýlené jižní plochy uchýlen na druhou stranu? Je-li stěna na západ, pak stylus musí být uchýlen doprava, k východu a naopak.

Když vygenerujeme různé ciferníky - měly by tyto série se plynule měnit, bez nečekaných skoků. Například u svislých hodin by měly úhly plynule narůstat.

Mají jednotkové a normálové vektory opravdu jednotkovou velikost?

Dále vektorové výpočty můžeme kontrolovat přes goniometrické.

Shodují se moje výsledky s jinými autory na Internetu?

Zkusím jeden údaj spočítat různými způsoby? Vyšlo mi totéž?

Zkusím udělat zpětné kroky, například zpětná otočení? Vrátím se to původních hodnot?

Ne-matematické kontroly
Kouknu se na to za dva měsíce, až to nechám odležet.
Pošlu to kamarádům ke shlédnutí.
Vezmu si klacek, vodováhu, olovnici a zkusím si to namodelovat na trávníku před domem.
Zkusím to vysvětlit manželce či dětem.
Napíši o tom článek.

Každopádně vektory se hůř kontrolují právě proto, že u jednotkových vektorů v základní poloze jsou to jen tři divná čísla mezi 0 a jedničkou.

Jaké programy jsou vhodné na práci s vektory?

Já jsem použil **program R**, protože ho znám z výpočtů statistiky (viz http://pocitacovazavislost.klimes.us). Ten pracuje rovnou s vektory. Například

a=c(1,2,3) # vektor **a**=[1,2,3]
b=c(2,3,4)

a+b # výstup je:
[1] 3 5 7

b-a # výstup je:
[1] 1 1 1

sum(a*b) # čili Skalární součin má výstup:
[1] 20 # čili 1.2+2.3+3.4=20
(sum(a^2)^.5) # velikost vektoru **a** = 3,74

Vidíte, že jednotlivé příkazy jsou pár písmen a program sám to rozpočítá pro všechny prvky vektorů. Ale prý ještě lepší pro tyto výpočty je **Octave** (freeware verze Matlabu). Pokud se v tom ale počítá jako v Matlabu, tak to jistě bude dobré. V Matlabu jsem programovat v Texasu (http://stereogramy.klimes.us).

Samozřejmě se to celé dá spočítat o dost pracněji v Calcu (Excelu), ale zase není třeba znát programovací jazyk. V tabulkovém procesoru je třeba si dávat pozor, abyste vždy přesně zkopírovali všechny prvky vektoru. To bývá zdroj chyb. Osobně doporučuji napsat si jednotlivé vektorové nástroje do jedné řádky a jen je kopírovat. Ukázka tohoto přístupu je v přiloženém souboru:

Proměnná	Výsledky			Vstupní údaje						Poznámky	Pomocné výpočty
	x	y	z	x	y	z	x	y	z		
Osa x, polední strana (jih); 6:00	1	0	0							Soustava souřadnic	
Osa y, východ; 24:00	0	1	0								
Osa z, Polárka, Slylus, Polus	0	0	1								
Deklinace	0,87			50						Zadáváme ve stupních, ale pracujeme s radiany	
Doplněk Deklinace (90°-Deklinace)	0,7			40						Zkopírovaný přechozí řádek, upraven vstup	
Úklon baráku k západu	0,5			28,8						Jen jsem zkopíroval předchozí řádku a upravil údaj	
Velikost_vektorů – vzorec	3,74			1	2	3				velikost či délka vektoru	
Skalární_součin – vzorec	32			1	2	3	4	5	6	Skalární součin;	
Úhel_vektorů – vzorec	0,79		45	1	1	0	1	0	0	Úhel vektorů; x=radiany; z=stupně	1
Vektorový_součin – vzorec	-3	6	-3	1	2	3	4	5	6	Vektorový součin;	

Slovo závěrem

Ještě nevím, jaké hodiny si nakonec postavím, ale tento výlet do světa slunečních hodin byla velmi zajímavá exkurze jednak do historie a dále do hlav mnoha geniu, kteří je vymýšleli a s nimi objevovali astronomii.

Když cestuji fyzicky a vidím na nějakém domě sluneční hodiny, tak si řeknu: „No dobrý, klacek zapíchlý do stěny." Ale mnohem větším nadšením mě naplňuje, když vidím, jak to celé funguje, jak je to pospojované. Prostě rád rozumím jak kolečka fungují a přeskakují – inu proto mě baví i psychologie. Jen tam si člověk musí udržet toto exaktní uvažování, i když to po něm nikdo nechce. To je pravda těžší než se naučit vektory.

Literatura

SH jako vystřihovánka z papíru: http://slunecnihodiny.klimes.us

Betlémská hvězda (povídání o antické astronomii): http://betlemskahvezda.klimes.us

Špelda Daniel: Proměny antické astronomie. in Houser Pavel ed.: Kapka metanového deště, Dokořán, Praha, 2007

Stránky Davida P. Sterna o pozorování oblohy bez dalekohledu: https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Sintro.htm

Tomsa Jan: Norimberský trychtýř (kniha o fyzice, úvod do vektorů): http://1-2-8.net/mwva/jtomsa/trychtyr.htm

Astronomická společnost v Hradci Králové: http://www.astrohk.cz/ashk/slunecni_hodiny/

Výpočet ciferníků: https://www.sunearthtools.com/dp/tools/pos_sun.php?lang=en

Přílohy

Program R na výpočet parametrů a ciferníků slunečního hodin

Výpočet parametrů a ciferníků v Calcu (Excelu)

Sbírka vodorovných, svislých a rovníkových ciferníků pro ČR a různé úklony jižní stěny.