

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	7
Metodický list 3	10
Metodický list 4	13
Metodický list 5	15
Metodický list 6	18
Metodický list 7	21
Metodický list 8	23
Metodický list 9	26
Metodický list 10	29
Metodický list 11	32
Metodický list 12	35
Metodický list 13	38
Metodický list 14	41
Metodický list 15	44

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy, práce s daty

Klíčové pojmy: měřítko mapy

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: poměr, práce se zlomky, desetinnými čísly, převody jednotek

Určete, kolik metrů ve skutečnosti představuje 1 centimetr na mapě s měřítkem:

- a) 1 : 10 000,
- b) 1 : 150 000,
- c) 1 : 500 000,
- d) 1 : 1 000 000.

Řešení

Na mapě s měřítkem 1 : 1 000 000 odpovídá 1 centimetr skutečné vzdálenosti 1 000 000 centimetrů, tj. 10 000 metrů. To znamená, že skutečné vzdálenosti jsou na mapě zmenšeny v poměru 1 : 1 000 000. Například vzdálenost mezi městy Praha a Olomouc je na mapě 21 cm, ve skutečnosti 210 km. V našem případě tedy stačí skutečnou hodnotu v centimetrech dělit stem, abychom dostali skutečnou délku v metrech.

Odpovědi:

- a) $10\,000 : 100 = 100$,
1 cm na mapě odpovídá 100 m ve skutečnosti.
- b) $150\,000 : 100 = 1\,500$,
1 cm na mapě odpovídá 1 500 m ve skutečnosti.
- c) $500\,000 : 100 = 5\,000$,
1 cm na mapě odpovídá 5 000 m ve skutečnosti.
- d) $1\,000\,000 : 100 = 10\,000$,
1 cm na mapě odpovídá 10 000 m ve skutečnosti.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje žákům uvědomění si zmenšování, zvětšování vzdáleností, převody jednotek.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: poměr, práce s mapou

Podle mapy České republiky s měřítkem 1 : 5 000 000 doplňte tabulku vzdušných vzdáleností pěti českých měst.



	Praha	Brno	Ostrava	Plzeň	České Budějovice
Praha	xxx				
Brno		xxx			
Ostrava			xxx		
Plzeň				xxx	
České Budějovice					xxx

Řešení

Mapa s měřítkem 1 : 5 000 000 vyjadřuje, že 1 centimetr na mapě odpovídá skutečné vzdálenosti 5 000 000 centimetrů, tj. 50 kilometrů. To znamená, že skutečné vzdálenosti jsou na mapě zmenšeny v poměru 1 : 5 000 000. Na mapě změříme postupně vzdálenosti mezi jednotlivými městy a ty pak násobíme číslem 50. Tím získáme skutečné vzdálenosti v kilometrech. V našem případě např. vzdálenost na mapě mezi městy Praha a Brno je asi 4,2 cm, ve skutečnosti je 210 km ($4,2 \cdot 50 = 210$ km). Řešení je v tabulce 1 na následující straně.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje žákům osvojení si zvětšování vzdáleností, převody jednotek, orientace ve slepé mapě.

	Praha	Brno	Ostrava	Plzeň	České Budějovice
Praha	xxx	210 km	335 km	100 km	115 km
Brno	210 km	xxx	155 km	280 km	185 km
Ostrava	335 km	155 km	xxx	430 km	345 km
Plzeň	100 km	280 km	430 km	xxx	125 km
České Budějovice	115 km	185 km	345 km	125 km	xxx

Tab. 1

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: měřítko, mapa, plán, vztah mezi rychlostí, dráhou a časem

Z části plánu města Olomouce s měřítkem 1 : 12 000 zjistíte následující informace:

- Jak dlouhá je cesta z Androva fotbalového stadionu po Legionářské ulici na Kollárovo náměstí?
- Kolik měří úsek řeky Moravy mezi mostem v Komenského ulici a v Masarykově ulici?
- Jak dlouhá je nejkratší možná cesta turisty z informačního centra na Horním náměstí k Dómu svatého Václava na Václavském náměstí?
- Jak dlouho půjde turista z informačního centra na Horním náměstí k Dómu sv. Václava na Václavském náměstí, jestliže zvolí nejkratší možnou cestu a půjde průměrnou rychlostí 4 km/h?



Řešení

a) Z uvedeného plánu města Olomouce s měřítkem 1 : 12 000 zjistíme měřením nejkratší cestu z Androva fotbalového stadionu po Legionářské ulici na Kollárovo náměstí, tj. $3,5 \text{ cm} + 0,5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Tato hodnota odpovídá skutečné vzdálenosti 720 m ($6 \cdot 120 = 720$).

b) Na plánu změříme úsek řeky Moravy mezi mostem v Komenského ulici a v Masarykově ulici, tj. 1,6 cm. Uvedená hodnota odpovídá skutečné vzdálenosti 192 m ($1,6 \cdot 120 = 192$).

c) Nejkratší možná cesta turisty z informačního centra na Horním náměstí vede Ostružnickou a Denisovou ulicí k Dómu svatého Václava na Václavském náměstí, tj. $2,5 \text{ cm} + 3,6 \text{ cm} + 1,8 \text{ cm} = 7,9 \text{ cm}$. Tato hodnota odpovídá skutečné vzdálenosti 948 m ($7,9 \cdot 120 = 948$).

d) Abychom zjistili čas, za jak dlouho turista urazí nejkratší možnou cestu při průměrné rychlosti 4 km/h, využijeme vztah mezi rychlostí, dráhou a časem. Protože je rychlost turisty uvedena v kilometrech za hodinu, musíme skutečnou vzdálenost, tj. dráhu s , vyjádřit v kilometrech ($948 \text{ m} = 0,948 \text{ km}$).

Platí

$$t = \frac{s}{v},$$
$$t = \frac{0,948}{4},$$
$$t = 0,237 \text{ h} = 14,22 \text{ min.}$$

Turista půjde z informačního centra k Dómu sv. Václava asi 14 minut.

Metodické poznámky

Úloha ukazuje mezipředmětové vztahy, důležitost využití znalosti měřítka plánu a mapy v úlohách z praxe.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: <http://www.szs-pi.cz/downloads/index.php?thumbnail=Studenti%2Fzem%ECpis+-+1.B%2Fmapy%2F%C8R%2Fslep%E1+mapa.jpg>,
www.kralovstvimap.cz/olomouc-plan-mesta-112-000/d-74811/

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: poměr, měřítko

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: měřítko

Martin našel na polici u dědečka model bitevní lodi Bismarck, který měl tyto rozměry: délka 125,5 cm, šířka 18 cm a výška 4,35 cm. Model zhotovil dědeček v měřítku 1 : 200. Jaké rozměry měl křižník Bismarck ve skutečnosti?

Řešení

Označme délku modelu $a = 125,5$ cm, šířku $b = 18$ cm a výšku $c = 4,35$ cm. Dědeček tento model zhotovil v měřítku 1 : 200 tj. 1 cm délky modelu odpovídá ve skutečnosti délce 200 cm. Pak pro skutečné rozměry a_0 délku, b_0 šířku a c_0 výšku křižníku Bismarck platí

$$a_0 = 200 \cdot a = 25\,100 \text{ cm} = 251 \text{ m},$$

$$b_0 = 200 \cdot b = 3\,600 \text{ cm} = 36 \text{ m},$$

$$c_0 = 200 \cdot c = 870 \text{ cm} = 8,7 \text{ m}.$$

Závěr. Bitevní loď Bismarck měla tyto skutečné rozměry: délku 251 m, šířku 36 m a výšku 8,7 m.

Metodické poznámky

Při řešení této úlohy demonstrujeme význam měřítka modelu. Žáci získávají představu o reálných rozměrech lodě.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: poměr, řešení soustav rovnic

Kamil spočítal, že počty let jeho rodičů jsou v letošním roce v poměru 6 : 5. Za dvanáct let se poměr počtu let jeho rodičů změní na 8 : 7. Kamilova maminka je mladší než tatínek. Určete věk jeho maminky a tatínka.

Řešení

Označme věk maminky x a věk tatínka y , maminka je mladší než tatínek, tedy $x < y$. Poměr počtu let jeho rodičů je v letošním roce 6 : 5, odtud

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{5}.$$

Věk maminky za 12 let bude $x + 12$ a tatínka $y + 12$. Poměr počtu let jeho rodičů za 12 let bude $8 : 7$, tedy

$$\frac{y + 12}{x + 12} = \frac{8}{7}.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic v podílovém tvaru s dvěma neznámými x, y

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{5}, \quad (1)$$

$$\frac{y + 12}{x + 12} = \frac{8}{7}. \quad (2)$$

Soustavu rovnic (1), (2) pomocí ekvivalentních úprav převedeme na soustavu dvou lineárních rovnic s dvěma neznámými

$$5y = 6x, \quad (3)$$

$$7(y + 12) = 8(x + 12). \quad (4)$$

Uvedené úpravy lze považovat za ekvivalentní, neboť maminka se zřejmě nenarodila letos. Řešením soustavy rovnic (3), (4) je uspořádaná dvojice $[x, y]$, kde $x = 30$, $y = 36$, která je také řešením soustavy rovnic (1), (2), jelikož od soustavy rovnic (1), (2) jsme dospěli k soustavě rovnic (3), (4) pomocí ekvivalentních úprav. Tedy mamince bylo v letošním roce 30 roků a tatínkovi 36 roků.

Závěr. Tatínkovi je v letošním roce 36 roků a mamince 30 roků.

Metodické poznámky

Uvedené řešení úlohy spočívá v řešení soustavy dvou rovnic v podílovém tvaru o dvou neznámých, která je převedena na soustavu dvou lineárních rovnic. Úloha je vhodná pro skupinovou práci žáků, jelikož je možné ji řešit i dalšími způsoby.

Úloha 3 (úroveň 3)

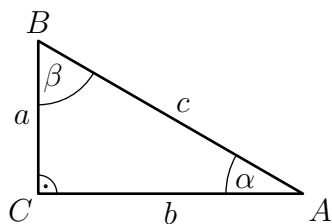
Předpokládané znalosti: obsah pravoúhlého trojúhelníku, poměr, definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

Poměr velikostí ostrých vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je $1 : 2$. Délka jeho přepony je $c = 7$ cm. Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC .

Řešení

Uvažujme standardní označení stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , tj. a, b, c a α, β, γ . Trojúhelník ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , tedy vnitřní úhel při vrcholu C je pravý, tj. $\gamma = 90^\circ$. Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180° , pak pro součet ostrých vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (5)$$



Poměr velikostí ostrých vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je $1 : 2$, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\alpha < \beta$, pak $\alpha : \beta = 1 : 2$, odtud $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Po dosazení do vztahu (5) za $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ dostaneme $\beta = 60^\circ$, pak $\alpha = 30^\circ$.

Dále znázorníme obrázek trojúhelníku ABC , ve kterém vyznačíme délky jeho stran a velikosti vnitřních úhlů. Nyní určíme velikosti odvěsen a , b trojúhelníku ABC užitím definic goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku. Podle definice goniometrických funkcí

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}. \quad (7)$$

Dosadíme-li do vztahů (6) a (7) za $c = 7 \text{ cm}$ a $\alpha = 30^\circ$, dostaneme

$$a = \frac{7}{2} \text{ cm}, \quad b = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Obsah S pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme užitím vztahu

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad (8)$$

který lze dokázat doplněním trojúhelníku na obdélník. Po dosazení do vztahu (8) za $a = \frac{7}{2} \text{ cm}$, $b = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$ dostaneme $S = \frac{49\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$.

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je $\frac{49\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Úloha překračuje obsah RVP ZV, může být využita jako rozšiřující učivo.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: úměrnosti: tercie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997, 104 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Běloun, F. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu: racionální čísla, procenta*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

<http://bismarck.webz.cz/sv/bism.html>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy, práce s daty

Klíčové pojmy: přímá úměrnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: přímá úměrnost

Určete chybějící hodnoty přímé úměrnosti, najděte její koeficient a zapište ji vzorcem:

a)

x	1	2	3			12		42
y		6		15	24		60	

b)

x	3,6	1,8		4,5
y	4,8		0,8	

c)

x		0,5	0,25	
y	2	4		16

d)

x	1	$\frac{15}{7}$	$\frac{25}{7}$		
y		$\frac{15}{2}$		$\frac{5}{2}$	5

Řešení

Veličiny v tabulce musí být přímo úměrné. Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota jedné veličiny, tolikrát se zvětší (zmenší) hodnota veličiny druhé. Koeficient přímé úměrnosti určíme na základě podílu čísel $\frac{y}{x}$, který musí být pro všechny sloupce v tabulce stejný.

a)

x	1	2	3	5	8	12	20	42
y	3	6	9	15	24	36	60	126

$$\frac{y}{x} = k = \frac{6}{2} \Rightarrow y = 3x.$$

b)

x	3,6	1,8	0,6	4,5
y	4,8	2,4	0,8	6

$$\frac{y}{x} = k = \frac{4,8}{3,6} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

c)

x	0,25	0,5	0,25	2
y	2	4	8	16

$$\frac{y}{x} = k = \frac{4}{0,5} \Rightarrow y = 8x.$$

d)

x	1	$\frac{15}{7}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$
y	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$	5

$$\frac{y}{x} = k = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{15}{7}} \Rightarrow y = \frac{7}{2}x.$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje žákům osvojení si vzorce pro vyjádření přímo úměrných veličin.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: přímá úměrnost – rovnice, graf

Čerpadlo přechrání za minutu $0,63 \text{ m}^3$ vody. Bylo zapnuto čtvrt hodiny. Zapište vzorcem vztah závislosti množství m přechrpané vody v hektolitrech na čase t v minutách, po který čerpadlo pracovalo. Sestavte tabulku a sestrojte graf této závislosti.

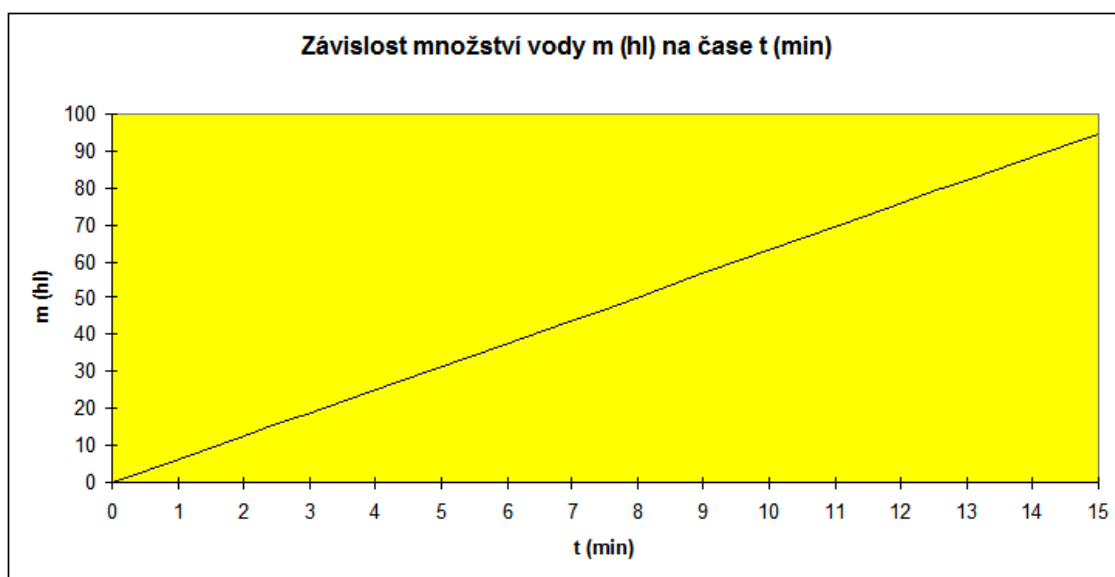
Řešení

Jedná se o přímou úměrnost (kolikrát se zvětší doba chodu čerpadla, tolikrát se zvětší množství přechrpané vody). Čerpadlo přechrání za 1 minutu $0,63 \text{ m}^3$ vody, tj. $0,63 \text{ m}^3 = 6,3 \text{ hl}$. Číselné hodnoty množství m vody v hektolitrech a čas t v minutách jsou vyjádřeny vztahem $m = 6,3 \cdot t$, koeficient přímé úměrnosti je roven číslu 6,3. Proto vzorec závislosti množství vody na čase je tvaru

$$m = 6,3 \cdot t.$$

Sestavíme tabulku a graf.

t (min)	0	1	2	3	5	...	10	11	12	13	14	15
m (hl)	0	6,3	12,6	18,9	31,5	...	63	69,3	75,6	81,9	88,2	94,5



Metodické poznámky

Úloha ukazuje možnosti využití grafu při řešení úloh o závislosti veličin.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: přímá úměrnost – rovnice, graf, trojčlenka, složená trojčlenka

V automobilce bylo vyrobeno na dvou výrobních linkách za osmihodinovou pracovní dobu celkem 8 160 součástek. Kolik součástek by se vyrobilo, kdyby byly v provozu tři výrobní linky po dobu 6 hodin?

Řešení

Jedná se o přímou úměrnost, tedy kolikrát více výrobních linek, tolikrát více vyrobených součástek, kolikrát více hodin, tolikrát více vyrobených součástek.

Úlohu řešíme rozdělením na dvě trojčlenky. Nejdříve vypočítáme, kolik součástek v automobilce vyrobí 3 výrobní linky za stejný počet hodin, tj. 8 hodin, a pak vypočítáme, kolik součástek vyrobí výrobní linky za 6 hodin. Označme x počet součástek, které se vyrobí na třech výrobních linkách, jestliže na 2 linkách se jich vyrobí 8 160. Platí

$$\frac{2}{3} = \frac{8\,160}{x} \Rightarrow x = 12\,240.$$

3 výrobní linky vyrobí za 8 hodin 12 240 součástek. Dále budeme počítat počet součástek vyrobených za 6 hodin. Označme y počet součástek, které se vyrobí za 6 hodin, když za 8 hodin se jich vyrobí 12 240. Platí

$$\frac{8}{6} = \frac{12\,240}{y} \Rightarrow y = 9\,180.$$

Tím jsme získali počet součástek, které by se vyrobily, kdyby byly v provozu 3 výrobní linky.

Závěr. Kdyby byly v provozu tři výrobní linky po dobu 6 hodin, tak by se v automobilce vyrobilo celkem 9 180 součástek.

Poznámka. Zápis a řešení úlohy lze vyjádřit i jinak (složená trojčlenka).

2 výrobní linky 8 hodin 8160

3 výrobní linky 6 hodin y

$$\frac{y}{8\,160} = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow y = 9\,180.$$

Metodické poznámky

Zkrácený postup řešení úlohy ukazuje na možnost řešení pomocí složené trojčlenky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy, práce s daty

Klíčové pojmy: určování počtu procent

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: procento, základ, počet procent

Určete, kolik procent je 120 litrů ze 750 litrů.

Řešení

Počet procent určíme tak, že danou část porovnáme s 1 % základu, 1 % ze 750 l = $750 : 100 = 7,5$ l. Vydělíme-li množství 120 l zjištěným jedním procentem, vypočítáme počet procent

$$120 : 7,5 = 16.$$

Uvedená část je tedy šestnáctinásobkem části, která odpovídá jednomu procentu.

Závěr. 120 l je 16 % ze základu 750 l.

Metodické poznámky

Určení počtu procent ze základu slouží k uvědomění si dělení celku na části a jeho odhad. Následující úlohy mohou sloužit jako samostatná práce. Žákům můžeme napsat na tabuli několik dalších úloh, které lze řešit z paměti, viz konec ML.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procento, základ, počet procent

Pan Novák zameškal pro nemoc v minulém měsíci 24 % hodin, což odpovídalo 48 hodinám jeho stanovené pracovní doby. Určete celkový počet pracovních hodin pana Nováka v uplynulém měsíci.

Řešení

Plánovanou pracovní dobu za měsíc, tedy 100 % označme x . Zameškaná pracovní doba 48 hodin představuje 24 %, odtud 1 % činí 2 hodiny, tedy 100 % = 200 hodin.

Závěr. Celkový počet hodin stanovených v uplynulém měsíci činil 200 hodin.

Metodické poznámky

Díky požadavku určování počtu procent žáci řeší jednoduchou slovní úlohu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: procento, základ, počet procent, trojčlenka

Traktorista chtěl zorat 21 ha pole za tři dny při stejném denním výkonu. První den plán splnil. Druhý den však zoral o 15 % méně než první den. O kolik procent musel zvýšit svůj výkon třetí den proti výkonu ve druhém dni, aby plán splnil?

Řešení

Traktorista měl podle plánu zorat každý den 7 ha pole. Určíme, kolik zoral druhý den, kdy plán splnil na 85 %.

$$\begin{array}{l} 100 \% \dots\dots\dots 7 \text{ ha} \\ \underline{85 \% \dots\dots\dots x \text{ ha}} \\ x = \frac{85}{100} \cdot 7 \Rightarrow x = 5,95 \text{ ha.} \end{array}$$

Druhý den zoral 5,95 ha pole, proto třetí den musel zorat 8,05 ha pole ($21 - 7 - 5,95 = 8,05$). Určíme, kolik procent je 8,05 ha ze základu 5,95 ha

$$\begin{array}{l} 100 \% \dots\dots\dots 5,95 \text{ ha} \\ \underline{p \% \dots\dots\dots 8,05 \text{ ha}} \\ p = \frac{8,05}{5,95} \cdot 100 \doteq 135. \end{array}$$

Závěr. Traktorista musel třetí den pracovat přibližně na 135 % výkonu dne předchozího, musel tedy svůj výkon zvýšit přibližně o 35 %.

Metodické poznámky

Řešení slovní úlohy na procenta vyžaduje znalost trojčlenky.

Úlohy k procvičení. Určete, kolik procent je:

- 10 ze základu 20 [50 %]
- 60 ze základu 120 [50 %]
- 10 ze základu 200 [5 %]
- 33 ze základu 1 100 [3 %]
- 20 ze základu 100 [20 %]
- 25 ze základu 500 [5 %]
- 30 ze základu 150 [20 %]
- 2,5 ze základu 50 [5 %]

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy, práce s daty

Klíčové pojmy: nepřímá úměrnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: nepřímá úměrnost

Určete chybějící hodnoty nepřímé úměrnosti, najděte její koeficient a запиšte ji vzorcem:

a)

x	1	2	3	4		9	
y				9	6		18

b)

x	12	8		4	2
y		3	4		

c)

x	1		5	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$
y		0,5	0,05			

d)

x	2			10	30	100
y	0,15		$\frac{1}{3}$			

Řešení

Veličiny v tabulce musí být nepřímo úměrné. Kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota jedné veličiny, tolikrát se zmenší (zvětší) hodnota veličiny druhé. Jestliže jsou dvě veličiny nepřímo úměrné, pak součin odpovídajících si číselných hodnot těchto veličin (koeficient nepřímé úměrnosti) musí být stále stejný. Z jedné známé dvojice hodnot x , y můžeme tedy tento koeficient určit.

a)

x	1	2	3	4	6	9	2
y	36	18	12	9	6	4	18

$$k = xy = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{x},$$

b)

x	12	8	6	4	2
y	2	3	4	6	12

$$k = xy = 8 \cdot 3 = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x}.$$

c)

x	1	0,5	5	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$
y	0,25	0,5	0,05	25	2,5	$\frac{3}{4}$

$$k = xy = 5 \cdot 0,05 = 0,25 \Rightarrow y = \frac{1}{4x}.$$

d)

x	2	6	0,9	10	30	100
y	0,15	0,05	$\frac{1}{3}$	0,03	0,01	0,003

$$k = xy = 2 \cdot 0,15 = 0,3 \Rightarrow y = \frac{3}{10x}.$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje žákům osvojení si vzorce pro vyjádření nepřímo úměrných veličin.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: nepříímá úměrnost - rovnice, graf

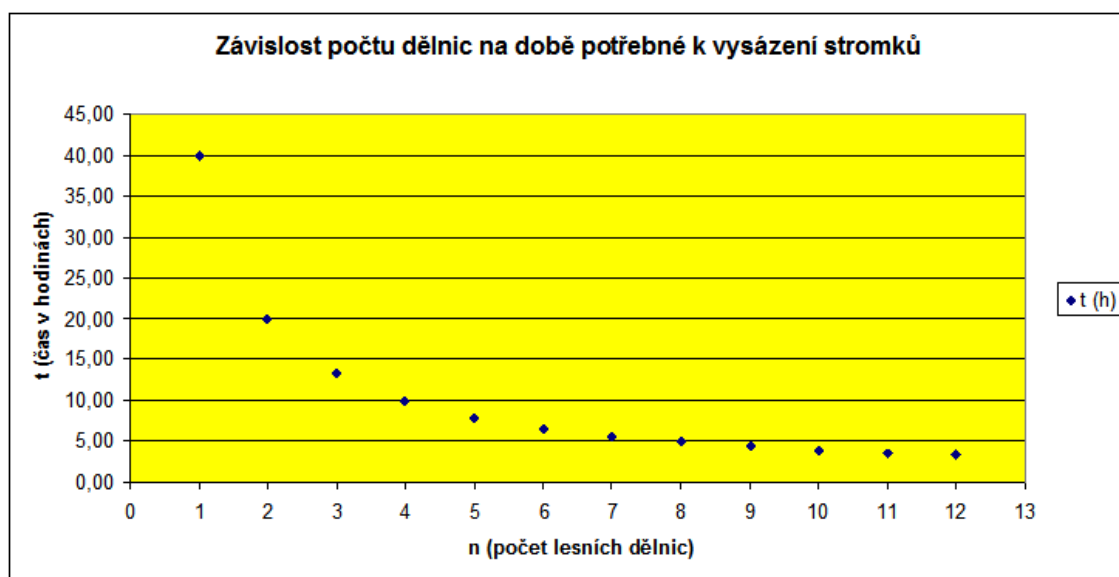
Na vysázení lesních stromků je zapotřebí 5 lesních dělnic, aby byla práce hotova za 1 směnu (8 hodin). Polesný může tuto práci zadat několika z 12 dělnic, které zaměstnává. Vypočtěte, kolik hodin by vysázení stromků trvalo n dělnicím, kde $n \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Výsledky запиšte do tabulky. Sestrojte graf této závislosti.

Řešení

Jedná se o nepříímou úměrnost (kolikrát větší bude počet lesních dělnic, tolikrát menší bude doba k vysázení lesních stromků). Číselné hodnoty počtu lesních dělnic n a času t v hodinách jsou vyjádřeny vztahem $k = nt$, kde k je koeficient nepříímé úměrnosti. Protože 5 lesních dělnic provede výsadbu za 1 pracovní směnu (8 hodin), je koeficient nepříímé úměrnosti roven číslu $k = 8 \cdot 5 = 40$.

Sestavíme tabulku a graf.

n (počet)	1	2	3	4	5	6	...	12
t (h)	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8	$6\frac{2}{3}$	...	$3\frac{1}{3}$



Metodické poznámky

Úloha ukazuje možnosti využití grafu při řešení úloh o závislosti veličin.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: nepřímá úměrnost, složená trojčlenka

Ve vodní elektrárně napustí 6 čerpadel o výkonu 60 ls^{-1} nádrž za 30 minut. Za jak dlouho napustí stejnou nádrž 4 čerpadla o výkonu 80 ls^{-1} ?

Řešení

Jedná se o nepřímou úměrnost, tedy kolikrát více čerpadel, tolikrát menší doba potřebná k napuštění, kolikrát větší výkon, tolikrát menší doba potřebná k napuštění.

Úlohu řešíme rozdělením na dvě trojčlenky. Nejdříve vypočítáme, jak dlouho by napustila nádrž 4 čerpadla o stejném výkonu, tedy 60 ls^{-1} , a pak vypočítáme, za jak dlouhou dobu napustí nádrž 4 čerpadla o výkonu 80 ls^{-1} . Označme x dobu, za kterou napustí nádrž 4 čerpadla, když 6 čerpadel ji napustí za 30 min. Platí

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 30}{4} = 45 \text{ min.}$$

4 čerpadla o výkonu 60 ls^{-1} tak napustí nádrž za 45 minut.

Dále budeme počítat dobu, za kterou se napustí nádrž 4 čerpadly o výkonu 80 ls^{-1} . Nyní označme x dobu, za kterou napustí nádrž čerpadla o výkonu 80 ls^{-1} , když ji čerpadla o výkonu 60 ls^{-1} napustí za 45 min. Platí

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 45}{80} = 33,75 \text{ min.}$$

Závěr. 4 čerpadla o výkonu 80 ls^{-1} napustí nádrž za 33,75 minuty.

Poznámka. Zápis a řešení úlohy lze vyjádřit i jinak (složená trojčlenka)

$$\begin{array}{l} 6 \text{ čerpadel} \dots\dots\dots 60 \text{ ls}^{-1} \dots\dots\dots 30 \text{ min} \\ 4 \text{ čerpadla} \dots\dots\dots 80 \text{ ls}^{-1} \dots\dots\dots x \text{ min} \end{array}$$

$$\frac{30}{x} = \frac{80}{60} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow x = 33,75.$$

Metodické poznámky

Zkrácený postup řešení úlohy ukazuje na možnost řešení pomocí složené trojčlenky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: www.maszskt.investtel.cz/predmety/matematika/osnovy/9/94.htm

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy, práce s daty

Klíčové pojmy: postupný poměr

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: postupný poměr, lichoběžník, obvod lichoběžníku

Délky stran lichoběžníku jsou v poměru $3 : 4 : 7 : 5$. Určete obvod lichoběžníku, jestliže jeho nejkratší strana měří 42 cm.

Řešení

Obvod lichoběžníku je roven součtu délek všech čtyř stran. Protože délky stran lichoběžníku jsou v poměru $3 : 4 : 7 : 5$, rozdělíme nejkratší stranu (délky 42 cm) na 3 díly. Protože $42 : 3 = 14$, mají jednotlivé strany délky: $4 \cdot 14 = 56$ cm, $7 \cdot 14 = 98$ cm, $5 \cdot 14 = 70$ cm.

Zkouška: $42 : 56 : 98 : 70 = 3 : 4 : 7 : 5$.

Závěr. Obvod lichoběžníku je roven $42 + 56 + 98 + 70 = 266$ cm.

Metodické poznámky

Propedeutika postupného poměru v geometrické úloze.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: postupný poměr, práce se zlomky a desetinnými čísly, krácení a rozšiřování zlomků

Daný postupný poměr vyjádřete v základním tvaru:

- a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$,
- b) $12 : 2 : 24$,
- c) $1,2 : 0,8 : 0,2$.
- d) $\frac{3}{2} : 2 : \frac{7}{4}$,
- e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$,

Řešení

Postupný poměr je zkráceným zápisem tří poměrů mezi třemi hodnotami. Hledáme poměr tří čísel, která jsou přirozená a nesoudělná. V našem případě hledáme takové kladné číslo k , pro které platí:

- a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$

$$a' = \frac{1}{4} \cdot k, \quad b' = \frac{1}{8} \cdot k, \quad c' = \frac{1}{12} \cdot k.$$

Každý člen poměru $a' : b' : c'$ vznikne z daného odpovídajícího členu poměru $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ vynásobením číslem $k = 24$.

$$a' = \frac{1}{4} \cdot 24, \quad b' = \frac{1}{8} \cdot 24, \quad c' = \frac{1}{12} \cdot 24$$

Základní tvar postupného poměru $\frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ je poměr $6 : 3 : 2$.

Stejným způsobem postupujeme i v dalších případech.

b) $12 : 2 : 24$

$$a' = 12 \cdot k, \quad b' = 2 \cdot k, \quad c' = 24 \cdot k, \quad k = \frac{1}{2},$$

$$12 : 2 : 24 = 6 : 1 : 12.$$

c) $1,2 : 0,8 : 0,2$

$$a' = 1,2 \cdot k, \quad b' = 0,8 \cdot k, \quad c' = 0,2 \cdot k, \quad k = 5,$$

$$1,2 : 0,8 : 0,2 = 6 : 4 : 1.$$

d) $\frac{3}{2} : 2 : \frac{7}{4}$

$$a' = \frac{3}{2} \cdot k, \quad b' = 2 \cdot k, \quad c' = \frac{7}{4} \cdot k, \quad k = 4,$$

$$\frac{3}{2} : 2 : \frac{7}{4} = 6 : 8 : 7.$$

e) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$

$$a' = \frac{1}{2} \cdot k, \quad b' = \frac{1}{3} \cdot k, \quad c' = \frac{1}{6} \cdot k, \quad k = 6,$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 3 : 2 : 1.$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje žákům osvojení si práce se zlomky – krácení, rozšiřování zlomků.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: postupný poměr, dělitelnost

Určete postupný poměr čtyř čísel $p : x : y : z$, jestliže platí $x : z = 3 : 8$, $p : x = 5 : 9$ a číslo y je dvojnásobkem čísla p .

Řešení

Ze zadání víme, že $p : x = 5 : 9$ a protože čísla p , x jsou nesoudělná, stačí určit čísla y a z . Číslo y je dvojnásobkem čísla 5 ($p = 5$ a $x = 9$), tedy $y = 10$, a z podílu $\frac{x}{z} = \frac{3}{8}$ vypočítáme z

$$\frac{x}{z} = \frac{9}{z} = \frac{3}{8} \Rightarrow z = 24.$$

Závěr. Postupný poměr čtyř čísel za daných podmínek je tvaru $5 : 9 : 10 : 24$.

Metodické poznámky

Uvědomění si základní vlastnosti soudělných a nesoudělných čísel.

Úlohy k procvičení. Zjistěte, které z následujících postupných poměrů jsou stejné:

- a) $6 : 10 : 15$, $3 : 5 : 7$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : 1$, $9 : 15 : 21$, $3 : 2 : 1$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1$;
b) $5 : 15 : 1$, $20 : 60 : 2$, $\frac{1}{4} : 2 : \frac{5}{4}$, $9 : 15 : 21$, $3 : 2 : 1$, $\frac{5}{4} : 3\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$;
c) $12 : 30 : 2,5$, $0,12 : 3 : 1,5$, $\frac{1}{4} : 3 : \frac{1}{6}$, $0,024 : 0,6 : \frac{3}{10}$, $3 : 2 : 1$, $\frac{5}{4} : 3\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$.

Řešení. Aby 2 postupné poměry $a : b : c$, $a' : b' : c'$ byly stejné, musí platit rovnosti

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}.$$

- a) $3 : 5 : 7 = 9 : 15 : 21$
b) $5 : 15 : 1 = \frac{5}{4} : 3\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$
c) $0,12 : 3 : 1,5 = 0,024 : 0,6 : \frac{3}{10}$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: nepřímá úměrnost – trojčlenka

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky, trojčlenka

Chovatel koní pan Hrdlička má zásobu sena pro 12 koní na 40 dní. Na jak dlouho mu tato zásoba vydrží, pokud by chtěl mít 15 koní?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje.

Počet koní	Počet dnů
12	40
15	x

Úlohu je možné řešit pomocí trojčlenky – jde o nepřímou úměrnost

$$x = \frac{40 \cdot 12}{15} = \frac{40 \cdot 4}{5} = \frac{8 \cdot 4}{1} = 32.$$

Závěr. Zásoba sena vydrží pro 15 koní na 32 dnů.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže správný výpočet.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky, trojčlenka

Šest malířů by nový bytový dům vymalovalo za 18 směn. Po čtyřech směnách společné práce dva malíři onemocněli. Za kolik směn bylo malování domu skončeno?

Řešení

Po čtyřech směnách by 6 malířů bylo schopno dokončit malování za 14 směn ($18 - 4 = 14$). Protože dva malíři onemocněli, práci dokončí 4 malíři ($6 - 2 = 4$). Do přehledné tabulky si doplníme údaje

Počet malířů	Počet směn
6	14
4	x

Úlohu je možné řešit pomocí trojčlenky – jde o nepřímou úměrnost

$$x = \frac{14 \cdot 6}{4} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{7 \cdot 3}{1} = 21.$$

Zbývající práci dokončí 4 malíři za 21 směn, ke kterým připočítáme 4 dny, kdy pracovalo společně ještě 6 malířů: $21 + 4 = 25$.

Závěr. Celý dům bude vymalován za 25 směn.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem pochopit, jak postupovat, jestliže část úkolu plní méně pracovníků.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky, trojčlenka

Sklizeň obilí na farmě je schopno vykonat 9 kombajnů při desetihodinovém denním provozu za osm dnů. Za kolik dnů je schopno dokončit sklizeň 15 stejně výkonných kombajnů při osmihodinovém denním provozu?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje.

Počet kombajnů	Počet hodin za 1 den	Počet dnů
9	10	8
15	8	x

Celkový denní počet hodin při použití 9 kombajnů je 90 ($9 \cdot 10 = 90$). Celkový denní počet hodin při použití 15 kombajnů je 120 ($15 \cdot 8 = 120$).

Jestliže 8 dní představuje 90 hodin, pak x dní představuje 120 hodin, odtud

$$x = \frac{8 \cdot 90}{120} = \frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Závěr. 15 stejně výkonných kombajnů při osmihodinovém denním provozu provede sklizeň obilí za 6 dnů.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit text a jeho zapsání pro výpočet přehledným způsobem.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: lineární rovnice, nejmenší společný násobek, slovní úlohy o společné práci

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice

Kdosi pravil: „Mám tolik bratrů co sester.“ Jeho sestra odpověděla: „Mám třikrát tolik bratrů co sester.“ Kolik bylo chlapců a kolik děvčat.

Řešení (1. způsob)

Lineární rovnicí o jedné neznámé.

On měl bratrů i sester x . Ona měla bratrů $(x + 1)$, sester $(x - 1)$ a počet jejích bratrů se rovná trojnásobku počtu jejích sester. Proto platí

$$x + 1 = 3(x - 1),$$

odtud

$$x = 2.$$

Závěr. Děvčata byla 2 a chlapci byli 3.

Řešení (2. způsob)

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Počet chlapců označíme c , počet děvčat d . Počet jeho sester je $c - 1 = d$, počet jejích bratrů je $3(d - 1) = c$. Dosadíme-li d z první rovnice do druhé, máme $3(c - 1 - 1) = c$, odtud $c = 3$ a tedy $d = c - 1 = 2$.

Závěr. Chlapci byli 3 a děvčata 2.

Metodické poznámky

Jde o jednoduchou slovní úlohu. Řešitel si musí několikrát soustředěně přečíst zadání, až si jej zapamatuje a porozumí mu. Je třeba vhodně zvolit neznámou sestavit rovnici či soustavu rovnic.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice, nejmenší společný násobek

Tři lovci trávili spolu několik dnů na lovecké chatě. Poslední den, při ranním lovu, přecházeli nevelkou říčku a dva z nich namočili své náboje. O zbývajících suché náboje se pak podělili všichni stejným dílem. Když po té každý čtyřikrát vystřelil, zůstalo jim dohromady tolik nábojů, kolik jich měl každý po dělbě. Kolik nábojů zůstalo suchých na rozdělení?

Řešení (1. způsob)

Úvahou.

Po rozdělení vystřelili celkem 12 nábojů. Po té zůstalo všem dohromady tolik nábojů kolik jich měl každý před střelbou. To znamená, že se počet suchých nábojů zmenšil třikrát. Jinými slovy: při střelbě spotřebovali celkem 2 části a 1 část zůstala. Dvě části tvoří $3 \cdot 4 = 12$ (vystřelených) nábojů, a jedna část (ta co zůstala) je tudíž $12 : 2 = 6$ nábojů. Při dělení připadlo na každého 6 nábojů a celkem jich zůstalo suchých $3 \cdot 6 = 18$.

Řešení (2. způsob)

Rovnicí.

Označíme x počet suchých nábojů a sestavíme rovnici

$$x - 12 = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 18.$$

Závěr. Suchých nábojů na rozdělení zůstalo celkem 18.

Metodické poznámky

Jde o dlouhé a poměrně nepřehledné zadání. Řešitel si jej musí několikrát soustředěně přečíst, až si jej zapamatuje a porozumí mu. Jedná se o procvičování zlomku neboli části z celku.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice, šedesátková soustava

Kolik je hodin, když se ručičky mezi čtvrtou a pátou kryjí.

Řešení

Je x min po čtvrté hodině. Malá ručička opíše za 1 min času $360^\circ : 60 = 6^\circ$ a za x min času $(6x)^\circ$. Velká ručička opíše za 1 hod času $360^\circ : 12 = 30^\circ$, za 1 min času $30^\circ : 60 = (\frac{1}{2})^\circ$ a za x min $(\frac{x}{2})^\circ$. Velká ručička má dráhu o část od bodu 12 po bod 4, tj. o 120 stupňů, delší než hodinová, tedy

$$6x = \frac{x}{2} + 120,$$

odtud

$$11x = 240$$

a tedy

$$\begin{aligned} x &= \frac{240}{11} = 21 \frac{9}{11} \text{ min} = 21 \text{ min } \frac{9 \cdot 60}{11} \text{ s} = 21 \text{ min } \frac{540}{11} \text{ s} = \\ &= 21 \text{ min } \left(\frac{539}{11} + \frac{1}{11} \right) \text{ s} = 21 \text{ min } \left(\frac{49 \cdot 11}{11} + \frac{1}{11} \right) \text{ s} = 21 \text{ min a } 49 \frac{1}{11} \text{ s.} \end{aligned}$$

Závěr. Hodinové ručičky se mezi čtvrtou a pátou hodinou kryjí ve 4 hod, 21 min a $49 \frac{1}{11}$ s.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Je potřeba znát velikosti úhlů hodinových ručiček a umět počítat v šedesátkové soustavě.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: lineární rovnice, nejmenší společný násobek, rovnost dvou poměrů

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: rovnost dvou poměrů

Stáří dvou osob je v poměru 5 : 6, před čtyřmi roky bylo v poměru 4 : 5. Jaké je nyní jejich stáří.

Řešení

Je-li stáří první osoby $5x$ a druhé $6x$, pak

$$\frac{5x - 4}{6x - 4} = \frac{4}{5}.$$

Odtud $x = 4$ a tedy $5x = 20$, $6x = 24$.

Závěr. Stáří osob je nyní 20 a 24 let.

Metodické poznámky

Je třeba soustředěně několikrát přečíst zadání a správně napsat rovnici jako rovnost dvou poměrů.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice, dělitelnost

Převrátíme-li v dvojmístném čísle pořadí číslic, pak nové číslo se má k původnímu jako 3 : 8. Určete původní číslo.

Řešení (1)

Nechť jednotek původního čísla je x a desítek y . Číslo má tvar $10y + x$. Změnou pořadí číslic vznikne nové číslo $10x + y$. Platí

$$\frac{10x + y}{10y + x} = \frac{3}{8},$$

odtud

$$7x - 2y = 0.$$

Řešením rovnice je pouze jediná dvojice číslic, a to $x = 2$, $y = 7$.

Závěr. Číslo je 72.

Řešení (2)

Úsudkem. Nové číslo se má k původnímu jako $3 : 8$. Je tedy původní číslo větší než 50 a menší než 99. Navíc je násobkem čísel 8 a 3. Jsou to čísla 72 a 96, avšak pouze jedno, a to číslo 72 vyhovuje úloze, neboť $27 : 72 = 3 : 8 \neq 69 : 96$.

Závěr. Hledané číslo je 72.

Metodické poznámky

Rovnice řešená v (1) je příkladem tzv. diofantické rovnice. *Diofantická rovnice* (někdy též *diofantovská*) v matematice je neurčitá polynomiální rovnice, která dovoluje proměnným nabývat pouze hodnot z oboru celých čísel. Diofantovské problémy mají méně rovnic než neznámých a zahrnují nalezení celých čísel, která jsou řešením pro všechny rovnice soustavy. Slovo diofantické odkazuje k helénskému matematikovi z 3. století, *Diofantovi z Alexandrie* v Egyptě, který takové rovnice studoval a byl také jedním z prvních matematiků, který zavedl symboliku v algebře.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: znaky dělitelnosti celých čísel

Šestimístné číslo ve tvaru $5xy49z$ je dělitelné číslem 396. Určete jeho číslice x, y, z .

Řešení

Dělitelnost číslem $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ vyžaduje dělitelnost čísly 4, 9 a 11. Aby číslo ve tvaru $5xy49z$ bylo dělitelné čtyřmi musí být poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi, tedy číslice z musí být 2 nebo 6.

- Pro $z = 2$. Má-li číslo $5xy492$ být dělitelné devíti, musí $x + y = 7$ nebo 16; má-li být číslo $5xy492$ dělitelné jedenácti, musí $14 + y - 6 - x = 11$ nebo 0. Vyhovuje jen soustava $8 + y - x = 11$, $x + y = 7$, která má jediné řešení $x = 2$, $y = 5$. Číslo je 525492.
- Pro $z = 6$. Má-li číslo $5xy496$ být dělitelné devíti, musí $x + y = 3$ nebo 12; aby $5xy496$ bylo dělitelné jedenácti, musí $14 + y - 10 - x = 11$ nebo 0. Vyhovuje jen soustava $4 + y - x = 0$, $x + y = 12$, která má jediné řešení $x = 8$, $y = 4$. Číslo je 584496.

Závěr. Řešením jsou dvě trojice, a to číslice $x = 2$, $y = 5$, $z = 2$ nebo $x = 8$, $y = 4$, $z = 6$.

Metodické poznámky

Při řešení se uplatní některá kriteria dělitelnosti celých čísel v desítkové číselné soustavě. Zejména: Celé číslo je dělitelné čtyřmi, devíti nebo jedenácti, je-li po řadě jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi, součet jeho číslic dělitelný devíti nebo jestliže součet číslic lichých řádů se liší od součtu číslic sudých řádů o násobek jedenácti nebo jsou-li tyto součty sobě rovny.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: lineární rovnice, nejmenší společný násobek, slovní úlohy o společné práci

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice

Po vyčištění rybníka do něj opět začala přitékat voda z potoka. Zároveň bylo otevřeno stavidlo, kterým část vody odtékala. Kdyby se rybník pouze napouštěl, trvalo by to 14 dnů. Kdyby do rybníka voda nepřitékala a naplněný rybník by se pouze vypouštěl otevřeným stavidlem, trvalo by to 32 dnů. Za jakou dobu bude naplněn rybník ve skutečnosti?

Řešení

Přitékající vodou z potoka se za jeden den napustí $1/14$ rybníka. Při vypouštění rybníka odteče za jeden den $1/32$ rybníka. Označíme x počet dnů za který se rybník naplní, budou-li obě činnosti probíhat současně. Pak platí

$$\left(\frac{1}{14} - \frac{1}{32}\right) \cdot x = 1.$$

Jmenovatele zlomků rozložíme $14 = 2 \cdot 7$, $32 = 2^5$, určíme jejich nejmenší společný násobek $2^5 \cdot 7 = 224$ a vynásobíme jím obě strany rovnice. Tím odstraníme zlomky

$$(16 - 7)x = 224.$$

Rovnice má řešení

$$x = \frac{224}{9} = 24, \bar{8}.$$

Závěr. Rybník se zaplní za necelých 25 dnů.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů. Je známa doba, za kterou každý subjekt splní sám celý úkol. Počítá se doba, za kterou úkol splní společně. Žáci si osvojí pravidlo, že zlomek, tedy část z celku určíme, když tím zlomkem celek vynásobíme. Dále se procvičí rozklad přirozeného čísla na prvočinitele a řešení lineární rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice, nejmenší společný násobek

Při stavbě tunelu odvážela přebytečnou zeminu dvě auta s různou nosností. Aby byla veškerá zemina odvezena, muselo by první auto jet 36krát a druhé auto 54krát. Zpočátku jezdilo pouze druhé auto. Po jeho devíti jízdách přijelo i první auto a zbytek zeminy odvezla obě auta společně, přičemž vyjžděla a vracela se současně. Kolik společných jízd to bylo?

Řešení

Výkon prvního auta je $1/36$ zeminy a druhého $1/54$ zeminy. Druhé auto za 9 jízd odvezlo $1/54 \cdot 9 = 1/6$ zeminy. Zbývalo odvést ještě $1 - 1/6 = 5/6$. Tuto část odvážela obě auta, řekněme za x společných jízd. Platí

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{54}\right) \cdot x = \frac{5}{6}.$$

Jmenovatele rozložíme $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $54 = 2 \cdot 3^3$, $6 = 2 \cdot 3$, určíme jejich nejmenší společný násobek $2^2 \cdot 3^3 = 108$ a vynásobíme jím obě strany rovnice. Tím odstraníme zlomky

$$3x + 2x = 90.$$

Rovnice má řešení $x = 18$.

Závěr. Společných jízd bylo 18.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů, kdy jen část činnosti probíhá společně. Je znám výkon každého z nich a doba, za kterou jeden z nich splní část úkolu. Počítá se nejprve část úkolu, kterou splnil jeden z nich samostatně a pak doba, za kterou dokončili úkol společně. Žáci si osvojí pravidlo, že zlomek, tedy část z celku, určíme, když tím zlomkem celek vynásobíme. Dále se procvičí rozklad přirozeného čísla na prvočinitele, pojem nejmenšího společného násobku a řešení lineární rovnice. Úlohu lze řešit i jinak.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice

Voda do kašny s vodotryskem se může napouštět dvěma přívody. Prvním by to trvalo 1,5 hodiny. Když z jara po vyčištění znovu kašnu napouštěli, otevřeli oba přívody, takže napouštění trvalo jen 36 minut. Za jak dlouho by se kašna naplnila, kdyby byl otevřen jen druhý přívod?

Řešení

První přívod má výkon $1/90$ kašny za minutu. Společný výkon obou přívodů je $1/36$ kašny za minutu. Označíme-li x výkon druhého přívodu, pak platí:

$$\left(\frac{1}{90} + x\right) \cdot 36 = 1$$

Rovnice má jediné řešení

$$x = \frac{1}{60}.$$

Závěr. Kdyby byl otevřen jen druhý přívod, kašna by se naplnila za 60 minut.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů. Je známa doba, za kterou splní úkol jen jeden z nich a doba, za kterou splní úkol společně. Počítá se doba, za kterou splní úkol druhý subjekt samostatně.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: Rychlost, dráha, čas, slovní úloha, rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou

Za cyklistou, který jel rychlostí 16 km/h, vyjel o 3 hodiny později motocyklista průměrnou rychlostí 48 km/h. Kdy motocyklista dohonil cyklistu?

Řešení

Označme t_1 dobu, po kterou jel cyklista, $v_1 = 16$ km/h jeho průměrnou rychlost a s_1 jím ujetou dráhu. Podobně označme $t_2 = t_1 - 3$ dobu, po kterou jel motocyklista, $v_2 = 48$ km/h jeho průměrnou rychlost a s_2 jím ujetou dráhu.

Cyklista a motocyklista ujedou stejnou dráhu, proto $s_1 = s_2$. Podle vztahu z fyziky platí $s = v \cdot t$ odtud $v_1 t_1 = v_2 t_2$. Dosadíme hodnoty v_1 , v_2 a t_2 , dostaneme rovnici s neznámou t_1

$$16t_1 = 48(t_1 - 3).$$

Jejím řešením je

$$t_1 = 4,5.$$

Závěr. Cyklista jel 4,5 hodiny, motocyklista jej dohonil za 1,5 hodiny.

Metodické poznámky

Jedná se o jednoduchou slovní úlohu na pohyb. Žák si musí uvědomit, že obě dráhy jsou stejně dlouhé. Dále je nutné zahrnout vztah mezi časy obou těles. V závěru slovní úlohy musí přemýšlet, k čemu se výsledek vztahuje (zda k cyklistovi nebo motocyklistovi), jinak nemusí mít slovní odpověď smysl.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou, desetinná čísla, jednotky času a jejich převody

Za traktorem, který jede rychlostí 12 km/h, bylo vysláno za 3 hodiny a 30 minut osobní auto, které má traktor dostihnout za 45 minut. Jakou nejnižší rychlostí musí auto jet?

Řešení

Označme s společnou dráhu, kterou oba stroje urazí. Dále označme $v_1 = 12$ km/h rychlost traktoru a $t_1 = 3,5$ h + 45 min = 4,15 h dobu, po kterou pojede. Dále označme v_2 rychlost, kterou má jet osobní auto a $t_2 = 45$ min = 0,75 h dobu, po kterou pojede.

Podle vztahu z fyziky platí : $s = v \cdot t$, odtud $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Dosadíme známé hodnoty (pozor na jednotky času), dostaneme

$$12 \cdot 4,15 = v_2 \cdot 0,75.$$

Řešením této rovnice s neznámou v_2 dostaneme

$$v_2 = 68.$$

Závěr. Auto musí jet průměrnou rychlostí aspoň 68 km/h.

Metodické poznámky

Úloha je podobná prvnímu příkladu, jen je ztížená o použití desetinných čísel. Pravidla používání desetinných čísel je potřeba neustále připomínat.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou, zlomky, jednotky času a jejich převody

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“ Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km/h. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“ Jak bylo daleko nádraží od horské chaty?

Řešení

Označme t dobu, za kterou pojede vlak a s délku cesty na nádraží. Pro 1. výpravu označme $v_1 = 4$ km/h její rychlost a $t_1 = t + 45 \text{ min} = t + \frac{3}{4} \text{ h}$ čas cesty, po kterou půjde. Podobně pro 2. výpravu označme $v_2 = 6$ km/h její rychlost a $t_2 = t - 30 \text{ min} = t - \frac{1}{2} \text{ h}$ dobu, po kterou půjde.

Vzdálenost mezi horskou chatou a nádražím je pro obě výpravy stejná, dosadíme podle fyzikálního vztahu, dostaneme $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Dosadíme za proměnné t_1 , t_2 , v_1 , v_2 (pozor, musíme převést jednotky), dostaneme

$$4 \cdot \left(t + \frac{3}{4}\right) = 6 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Řešením této rovnice obdržíme

$$t = 3.$$

Zjistili jsme, že vlak jede za 3 hodiny.

Vzdálenost chaty od nádraží dopočítáme dosazením vztahu pro vzdálenost, kterou ujde 1. výprava $s = v_1 \cdot \left(t + \frac{3}{4}\right)$, tedy $s = 15$ km nebo pro 2. výpravu $s = v_2 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$ se stejným výsledkem.

Závěr. Vzdálenost horské chaty od nádraží je 15 km.

Metodické poznámky

Vstupní rovnice je podobná jako v předchozích příkladech. Vyřešením rovnice jsme však nezískali řešení slovní úlohy. Je potřeba dopočítat další hodnoty.

Zdroj: archiv autora,

[1] Czudek, P. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 555 úloh*, Praha: HAV, 2005.

[2] *Matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2013-01-16]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/mo/Z/main.html>

Obrazový materiál:

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: rychlost, dráha, čas, slovní úloha, rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: logická úvaha, sčítání a odčítání přirozených čísel
Pythagoriáda 2000/2001, školní kolo, 6. Ročník, př. 15

Jachtař urazil na moři každý den průměrně 75 km v přímém směru. V noci, když spal, jej mořský proud zanesl vždy o 50 km zpět. Kolikátý den od vyplutí dorazí do přístavu vzdáleného 1275 km?

Řešení

Jachtař urazil 1. den dopředu 75 km, zpět 50 km, tedy za 1. den se posunul dopředu o $75 - 50 = 25$ km. Za 2. den se podobně dopředu posunul o 25 km, celkem už o 50 km. Touto úvahou bychom dospěli k závěru, že počet dní plavby je $1275 : 25 = 51$.

Když jachtař ale dorazil do cíle, nenechal se už v noci posunout o 50 km zpět.

Závěr. To znamená, že do cíle dorazil za 49 dní.

Metodické poznámky

Řešitel si musí dát pozor na cíl cesty, kdy po doplutí do přístavu už loď v noci žádný proud neodnese zpět.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztah z fyziky mezi rychlostí, dráhou a časem, násobení přirozených čísel, nejmenší společný násobek (lze i logickou úvahou)

Tři běžci vyběhli současně ze startovní čáry na okruh dlouhý 400 m. Nejrychlejší běžec předběhl nejpomalejšího vždy, když uběhl tři kola. Nejrychlejší běžec předběhl předposledního (druhého) vždy, když uběhl čtyři kola. Kolik kilometrů uběhl nejrychlejší běžec, když se všichni tři opět setkali na startovní čáře?

Řešení

Hledáme nejmenší společný násobek $n(3, 4) = 12$. Nejrychlejší běžec musel uběhnout 12 kol, než se znovu setkají.

$$12 \cdot 400 \text{ m} = 4800 \text{ m} = 4,8 \text{ km}.$$

Závěr. Nejrychlejší běžec uběhl 4,8 km.

Metodické poznámky

Nejmenší společný násobek je nejrychlejší cestou k získání počtu kol. Řešitel však může dojít k výsledku i „kreslením schematického obrázku“. Pozor na výpočet počtu kilometrů, počet kol nás jako výsledek nezajímá.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou, zlomky, jednotky času a jejich převody

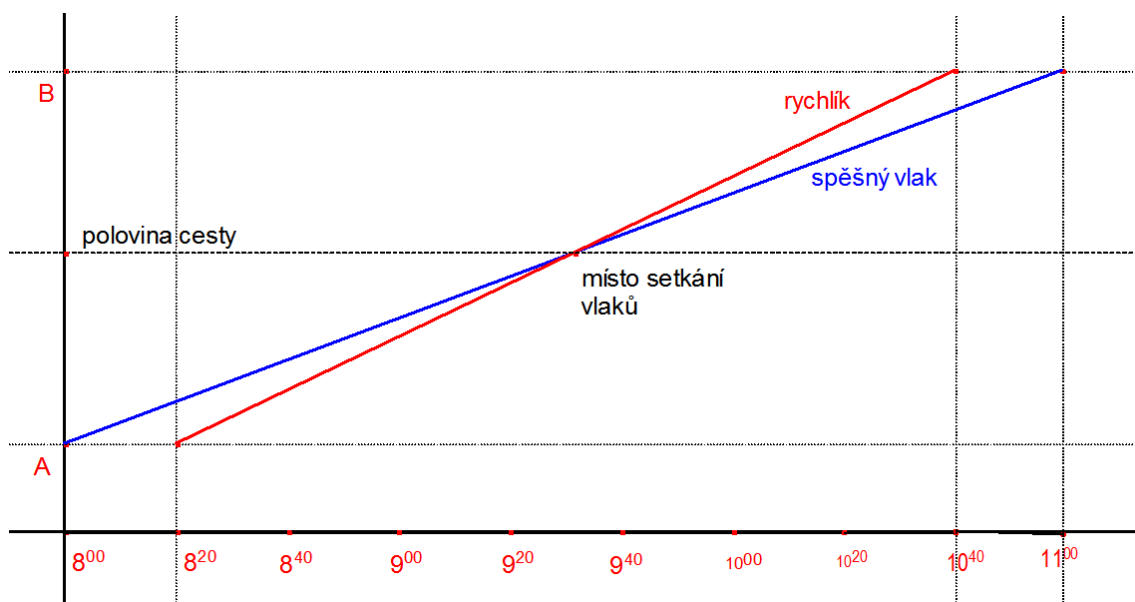
Z města *A* vyjel v 8:00 spěšný vlak, který přijel do města *B* v 11:00. V polovině trati ho předjel rychlík, který jel rovněž z města *A* do města *B* po stejné trati a který do města přijel v 10:40. V kolik hodin vyjel rychlík z města *A*? (Předpokládejme, že se oba vlaky pohybují stálou rychlostí.)

Řešení

Spěšný vlak vyjel v 8:00 a přijel v 11:00, rychlík přijel v 10:40. Proto doba jeho pohybu po druhé polovině cesty byla o 20 minut kratší než doba, po kterou se pohyboval spěšný vlak. Vlaky se míjely v polovině trasy a jely stálou rychlostí. Musí být tedy i první část trasy rychlíku o 20 minut kratší než doba pohybu spěšného vlaku.

Závěr. Rychlík vyjel v 8:20.

Řešení (graficky)



Metodické poznámky

Zjistit dobu 20 minut je poměrně jednoduché. Pro některé žáky je složitější určit rozdíl mezi „odečtením 20 minut v jednom směru a přičtením 20 minut ve druhém směru“.

Zdroj: archiv autora,

[1] *Zadání matematických soutěží*, [On-line]. © Tomáš Konrády, 9. C, šk. rok 2004-5 [Cit. 2012-12-10]. Dostupné

<http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani>,

[2] *Pythagoriáda – archiv*. [On-line]. [Cit. 2012-12-10]. Dostupné

<http://www.kabinetfyziky.wz.cz/pythagora.htm>

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: rychlost, dráha, čas, slovní úloha, rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou

Dvě cyklistky vyjely současně ze stejného místa po stejné silnici, stejným směrem. Jedna jela stálou rychlostí 12 km/h, druhá stálou rychlostí 16 km/h. Jak daleko od sebe byly tyto cyklistky za 1,5 hodiny po výjezdu?

Řešení

Označme s_1 dráhu, kterou ujela první cyklistka, $v_1 = 12$ km/h její průměrnou rychlost a $t_1 = 1,5$ h čas, po který jela. Podobně označme s_2 dráhu, kterou ujela druhá cyklistka, $v_2 = 16$ km/h její průměrnou rychlost a $t_2 = 1,5$ h čas, po který jela.

První slečna ujela dráhu $s_1 = v_1 t_1 = 12 \cdot 1,5 = 18$ km. Druhá slečna ujela dráhu $s_2 = v_2 t_2 = 16 \cdot 1,5 = 24$ km. Vzdálenost cyklistek tak je $24 - 18 = 6$ km.

Závěr. Cyklistky jsou od sebe vzdálené 6 km.

Metodické poznámky

Stačí využít jednoduché fyzikální vztahy a dopočítat rozdíl drah.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou, Pythagoriáda 2007/2008, okresní kolo, 6. ročník, př. 13

Ze dvou měst jedou proti sobě stálou rychlostí dvě auta. Půl hodiny před jejich setkáním jsou od sebe vzdálena 58 km. Jakou rychlostí jede druhé auto, jestliže první se pohybuje rychlostí 45 km/h?

Řešení

Označme $s = 58$ km vzdálenost, která zbývá oběma autům ujet za dobu $t = 0,5$ h. Dále označme $v_1 = 45$ km/h, v_2 rychlost po řadě prvního a druhého auta, s_1 a s_2 dráhy, které za dobu t ujedou.

Obě auta se mají setkat za půl hodiny. To znamená, že $s_1 + s_2 = s$. Tedy platí

$$s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t,$$

odtud po dosazení plyne

$$58 = 22,5 + v_2 \cdot 0,5,$$

a vyřešením této lineární rovnice dostaneme $v_2 = 71$.

Závěr. Rychlost druhého auta je 71 km/h.

Metodické poznámky

Stačí využít jednoduché fyzikální vztahy a znalosti řešení lineárních rovnic s jednou neznámou.

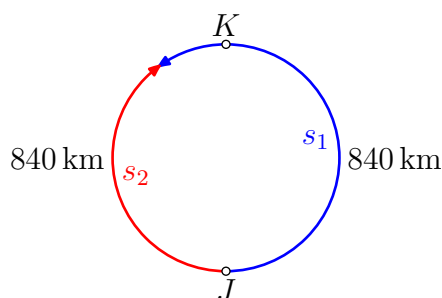
Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: vztahy z fyziky, řešení rovnic s jednou neznámou

Vzdálenost mezi městy J a K je 840 km. Z J do K vyjíždějí dva automobily současně. První jede rychlostí 84 km/h, druhý rychlostí 56 km/h. Po příjezdu do K se první automobil vydá na zpáteční cestu. V jaké vzdálenosti od K se oba automobily setkají?

Řešení

Uvažujme následující situaci. Předpokládejme, že auta vyjedou současně proti sobě po kruhové dráze z bodu J , přitom v polovině této dráhy se nachází bod K , tato situace je ekvivalentní původnímu zadání, kdy obě auta ve stejný okamžik vyjedou po stejné dráze do města K , přitom ve městě K se první automobil ihned vydá na zpáteční cestu.



Označme $s = 840 + 840 = 1680$ km délku celé kruhové dráhy (tedy od města J po město J) a t dobu, která uplyne od okamžiku výjezdu automobilů z J do doby, než se opět setkají. Označme dále $v_1 = 84$ km/h rychlost prvního automobilu a s_1 dráhu, kterou ujede, podobně označme $v_2 = 56$ km/h rychlost druhého automobilu a s_2 dráhu, kterou ujede.

Celková dráha, kterou oba automobily ujedou je $s = s_1 + s_2$, přitom první auto ujede dráhu $s_1 = v_1 t = 84t$ a druhé auto ujede dráhu $s_2 = v_2 t = 56t$. Odtud platí

$$1680 = s = s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = 84t + 56t.$$

Po úpravě dostáváme rovnici

$$1680 = 144t,$$

Obě auta se tak pohybovala po dobu $t = 12$ hodin. Druhé auto ujelo dráhu $s_2 = v_2 t = 56 \cdot 12 = 672$ km. Vzdálenost J a K je 840 km. Druhé auto je 672 km od J , tzn. $840 - 672 = 168$ km od K .

*Závěr.*auta se setkají 168 km od města K .

Metodické poznámky

Příklad je podobný, jako předchozí zadání. Na začátku je potřeba uvědomit si „situaci s dvojnásobnou dráhou“. Následuje využití vztahů z fyziky a řešení rovnic.

Zdroj: archiv autora,

[1] Czudek, P. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 555 úloh*, Praha: HAV, 2005,

[2] *Zadání matematických soutěží*, [On-line]. ©Tomáš Konrády, 9. C, šk. rok 2004-5 [Cit. 2012-12-10]. Dostupné

<http://www.zshorakhk.cz/index.php?page=matematika&sekce=zadani>,

[3] *Pythagoriáda–archiv*. [On-line]. [Cit. 2012-12-10]. Dostupné

<http://www.kabinetfyziky.wz.cz/pythagora.htm>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: rychlost, dráha, čas, slovní úloha, rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: vztah z fyziky mezi rychlostí, dráhou a časem, řešení rovnic

Pythagoriáda 2006/2007, školní kolo, 7. ročník, př. 15

Maminka jela autem pro Janu do školy průměrnou rychlostí 80 km/h. Kvůli poruše auta se domů vracela průměrnou rychlostí 20 km/h. Jízda tam i zpět jí trvala 2,5 hodiny. Jak daleko je škola od domova?

Řešení

Označme s vzdálenost domu od školy. Dále označme t_1 dobu, po kterou maminka jela do školy, a $v_1 = 80$ km/h její průměrnou rychlost. Podobně označme t_2 dobu, po kterou maminka jela ze školy, a $v_2 = 20$ km/h její průměrnou rychlost.

Pro jízdu do školy platí $s = v_1 t_1 = 80 t_1$, pro jízdu ze školy $s = v_2 t_2 = 20 t_2$. Celková doba je 2,5 hodiny. To znamená, že $t_2 = 2,5 - t_1$. Dobu t_2 dosadíme do vztahu pro s_2 . Navíc vzdálenost školy a domů je stejná při cestě do školy i ze školy. Dostaneme rovnici s neznámou t_1

$$80 t_1 = 20(2,5 - t_1),$$

kterou vyřešíme a dostaneme $t_1 = 0,5$ h.

Cestu do školy ujela maminka za 0,5 hodiny. Vzdálenost školy a domu dopočítáme ze vztahu

$$s_1 = v_1 t_1 = 80 \cdot 0,5 = 40 \text{ km.}$$

(Zkouška využitím cesty domů $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 20 \cdot 2 = 40$ km.)

Závěr. Škola je od domova vzdálená 40 km.

Metodické poznámky

Klíčovou myšlenkou je porovnání vzdálenosti školy a domova. Vše ostatní už je mechanické použití fyzikálních vztahů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztah z fyziky mezi rychlostí, dráhou a časem, řešení rovnic

Dvě letadla letí z letišť A a B , vzdálených 420 km, navzájem proti sobě. Letadlo z A odstartovalo o 15 minut později a letí průměrnou rychlostí o 40 km/h větší než letadlo z B . Určete průměrné rychlosti obou letadel, víte-li, že se setkají 30 minut po startu letadla z A .

Řešení

Označme s vzdálenost, kterou mají uletět obě letadla. Pro letadlo z letiště A označme $t_A = 30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$ dobu jeho letu, $v_A = v_B + 40 \text{ km/h}$ jeho průměrnou rychlost a s_A překonanou vzdálenost. Podobně pro letadlo z B označme $t_B = t_A + 15 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$ dobu jeho letu, v_B jeho průměrnou rychlost a s_B překonanou vzdálenost.

Pro dráhy letadel platí $s = s_A + s_B$. Dosazením dostaneme rovnici

$$420 = 0,5(v_B + 40) + 0,75v_B.$$

Jejím řešením je

$$v_B = 320 \text{ km/h}.$$

Rychlost druhého letadla získáme z rovnice

$$v_A = v_B + 40 = 320 + 40 = 360 \text{ km/h}.$$

Závěr. Letadla letěla rychlostí 360 km/h a 320 km/h.

Metodické poznámky

Největším problémem studentů je sjednotit jednotky (nejčastěji kombinují čas v minutách s rychlostí v km/h) a správně doplnit vztahy do rovnice. Typickou otázkou podobných úloh je: „Kde a kdy se letadla setkají.“ Zde se však ptáme na rychlost letadel.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: vztah z fyziky mezi rychlostí, dráhou a časem, řešení rovnic

Vzdálenost z Prahy do Příbrami je 80 km. Z obou měst vyjela současně proti sobě nákladní auta. Auto z Prahy jelo průměrnou rychlostí o 6 km/h větší než auto z Příbrami, a tak do okamžiku setkání ujelo o 4 km více. Určete průměrnou rychlost jednotlivých aut a dobu, za jak dlouho se setkala.

Řešení

Označme t dobu, po kterou auta pojedou, $s = 80 \text{ km}$ vzdálenost ujetou oběma auty, $v_1 = v_2 + 6 \text{ km/h}$ rychlost prvního auta a $s_1 = s_2 + 4 \text{ km}$ jím ujetou vzdálenost, kde v_2 , resp. s_2 , jsou rychlost a ujetá vzdálenost druhého auta.

Pro dráhy automobilů platí

$$s = s_1 + s_2 = s_2 + 4 + s_2,$$

dosazením dostaneme $80 = 4 + 2s_2$, tedy $s_2 = 38 \text{ km}$. Dosadíme podle známého fyzikálního vztahu

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}.$$

Po úpravě dostaneme $42v_2 = 38(v_2 + 6)$, tedy $v_2 = 57 \text{ km/h}$.

Rychlost auta z Příbrami je $v_2 = 57 \text{ km/h}$, rychlost auta z Prahy pak $v_1 = v_2 + 6 \text{ km/h} = 63 \text{ km/h}$. Dobu jízdy dopočítáme dosazením do známých fyzikálních vztahů

$$t_1 = s_1 : v_1 = 42 : 63 = (2 : 3) \text{ h} = 40 \text{ min.}$$

Závěr. Rychlost aut je 63 km/h a 57 km/h a doba jízdy je 40 minut.

Metodické poznámky

Musíme využít poznatků z předchozích úloh. V tomto příkladu je však důležité porovnání stejných časů. Teprve přes porovnání časů se dostaneme k rychlostem. V prvních příkladech jsme vycházeli z dráhy.

Zdroj: archiv autora,

Czudek, P.: *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 555 úloh*. Praha, HAV, 2005

Obrazový materiál:

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Závislosti, vztahy a práce s daty

Klíčové pojmy: aritmetický průměr

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: přirozené číslo, aritmetický průměr

Vypočtete aritmetický průměr čísel 15, 28, 37, 16 a 42 a jejich odchylky od tohoto průměru.

Řešení

Aritmetický průměr čísel vypočítáme tak, že tato čísla nejprve sečteme a výsledek pak vydělíme jejich počtem. Abychom určili odchylku příslušného čísla od aritmetického průměru, odečteme od každého vypočtený aritmetický průměr. Platí tedy

$$15 + 28 + 37 + 16 + 42 = 138 \quad \wedge \quad 138 : 5 = 27,6.$$

Aritmetický průměr daných čísel je 27,6.

Dále určíme odchylky. (Pokud je odchylka větší než průměr, pak u odchylek zapisujeme znaménko +. Je-li dané číslo menší než průměr, je jeho odchylka od průměru záporná.) Hledané odchylky jsou následující

$$15 - 27,6 = -12,6,$$

$$28 - 27,6 = +0,4,$$

$$37 - 27,6 = +9,4,$$

$$16 - 27,6 = -11,6,$$

$$42 - 27,6 = +14,4.$$

Metodické poznámky

Úloha žákům umožňuje seznámení se statistickými pojmy, a to aritmetický průměr, odchylka. Žákům můžeme na tabuli napsat několik úloh k samostatné práci, viz konec ML

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: přirozená čísla, aritmetický průměr

Skauti ušli první den 21 km. Na místě, kam došli, zůstali celý druhý den. Třetí den ušli o 4 km více než první den, čtvrtý den urazili 16 km. Pátý závěrečný den putovali po trase dlouhé 12 km. Vypočtete průměrnou délku denní trasy:

- a) za celou dobu trvání tábora,
- b) pouze za ty dny, kdy skutečně putovali.

Řešení

- a) Sečteme jednotlivé úseky v kilometrech a vydělíme počtem dní

$$(21 + 25 + 16 + 12) : 5 = 14,8.$$

Závěr. Průměrná délka denní trasy je 14,8 km.

- b) Protože druhý den skauti zůstali celý den na místě, tak celkový počet kilometrů, které skauti ušli, vydělíme číslem 4. Proto platí

$$(21 + 25 + 16 + 12) : 4 = 18,5.$$

Závěr. Průměrná délka denní trasy, kdy skauti skutečně putovali, činila 18,5 km.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce. Žáci si při řešení úlohy musí uvědomit, že jeden den volna ovlivní výsledný aritmetický průměr.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: průměr, aritmetický průměr

Petr hodil stokrát hrací kostkou. Jednička mu padla dvacetkrát, dvojka dvanáctkrát, trojka patnáctkrát, čtyřka osmnáctkrát a pětka také osmnáctkrát. Při ostatních hodech mu padla šestka. Kolik bodů mu průměrně padlo na jeden hod?

Řešení

Nejprve vypočteme součet všech bodů dosažených při 100 hodech, ten pak vydělíme počtem hodů

$$20 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 18 \cdot 4 + 18 \cdot 5 + 17 \cdot 6 = 353.$$

$$353 : 100 = 3,53.$$

Závěr. Petrovi padlo na jeden hod průměrně 3,53 bodů.

Metodické poznámky

Úloha ukazuje, jakým způsobem se vypočítá průměr, pokud máme k dispozici více hodnot a každá má jinou váhu či hodnotu. Takový průměr se nazývá *vážený aritmetický průměr*.

Úlohy k procvičení. Vypočtěte aritmetický průměr čísel:

- a) 3, 5; [4]
b) 2, 0, 7, 5; [3,5]

c) $3, 3, 3, 3, 3$; $[3]$

d) $-2, -18, -10, -6$; $[-9]$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz