

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
----------------------------	---

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Klíčové pojmy: výrazy s proměnnou, obsah základních rovinných útvarů

Metodické poznámky

Uvedená série úloh vychází z práce s jednoduchým modelem geometrických útvarů, který si žáci mohou snadno a rychle vyrobit. Přestože úlohy 2 a 4 se dají řešit pouze algebraicky, využití modelu lze jednoznačně doporučit. Výroba modelu je popsána v úloze 1. Kromě níže uvedených tří úloh lze na základě vyrobeného modelu formulovat i další obdobné úlohy nebo model využít jako podnět k samostatné žákovské tvorbě úloh.

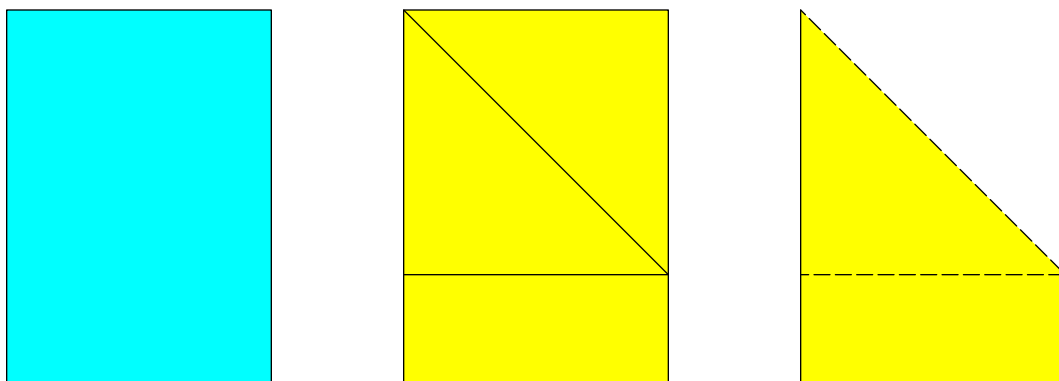
Úloha 1 (úroveň 0)

Předpokládané znalosti: motivační úloha, pomůcky – dva listy měkkého kartónového papíru (asi 160 g/m^2) formátu A4, nejlépe ve dvou různých barvách, nůžky

Vyrob kartónový model, který se skládá ze čtyř částí: jeden výchozí obdélník formátu A4, dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami shodnými s kratší stranou výchozího obdélníku, jeden obdélník, jehož delší strana je shodná s kratší stranou výchozího obdélníku a jehož kratší strana je rozdílem delší a kratší strany výchozího obdélníku.

Řešení

Použijeme dva listy formátu A4. Jeden list bude představovat velký (výchozí) obdélník. Druhý list rozdělíme nejprve na čtverec se stranou shodnou s kratší stranou papíru a malý obdélník, čtverec pak po úhlopříčce rozdělíme na dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. Nejvhodnější je měkký kartónový papír, který mohou žáci celkem snadno ohýbat, jak jsou zvyklí například ze skládání lodiček: kratší stranu papíru přehneme k delší, zarýhneme a podle naznačených přerušovaných čar rozstříhneme na tři díly.



Metodické poznámky

Po vytvoření modelu je vhodné poskytnout žákům prostor k samostatné manipulaci s modelem a k objevení některých vlastností modelovaných útvarů.

Úloha 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, úprava výrazů s proměnnou

Označme a délku strany čtverce. Urči délku u úhlopříčky tohoto čtverce.

Řešení

Úhlopříčka čtverce je zároveň přeponou v rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a , proto využijeme Pythagorovu větu

$$\begin{aligned}u^2 &= a^2 + a^2, \\u^2 &= 2a^2, \\u &= \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na využití Pythagorovy věty a na jednoduchých úpravách algebraických výrazů. Na modelu je možno demonstrovat rozložení čtverce na dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky.

Úloha 3 (úroveň 2)

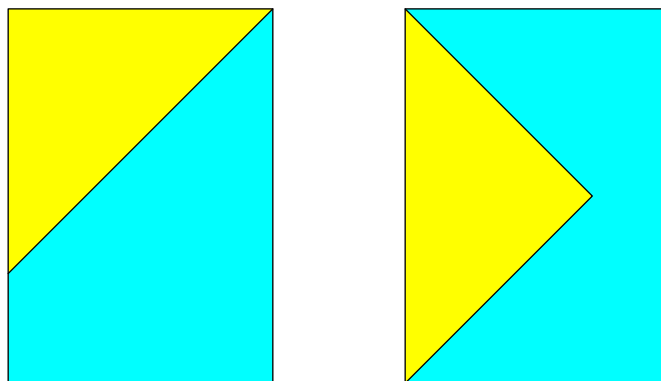
Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, obsah obdélníku, obsah trojúhelníku

Do obdélníku velikosti papíru A4 umístí rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami shodnými s kratší stranou obdélníku tak, aby právě dva vrcholy trojúhelníku splynuly s některými vrcholy velkého obdélníku. Kolik je možností různých umístění? Urči pro každé umístění obsah té části obdélníku, která není překryta trojúhelníkem.

Řešení

Označme kratší stranu obdélníku a . Zadání vyhovují dva typy umístění. V obou případech je obsah nezakryté části obdélníku roven rozdílu obsahu obdélníku a obsahu trojúhelníku, tedy

$$S = S_1 - S_2 = a \cdot a \cdot \sqrt{2} - \frac{a \cdot a}{2} = a^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$



Metodické poznámky

Úloha má především poskytnout žákům prostor k řízené samostatné manipulaci s modelem. Nabízí se diskuze o chápání pojmu „různá umístění“, na němž závisí počet řešení úlohy. V jednom z možných umístění splývá přepona trojúhelníku s delší stranou obdélníku, čímž žáci experimentálně objeví zajímavou praktickou skutečnost, kterou využijí při řešení další úlohy: poměr délek stran papíru A4 je $1:\sqrt{2}$.

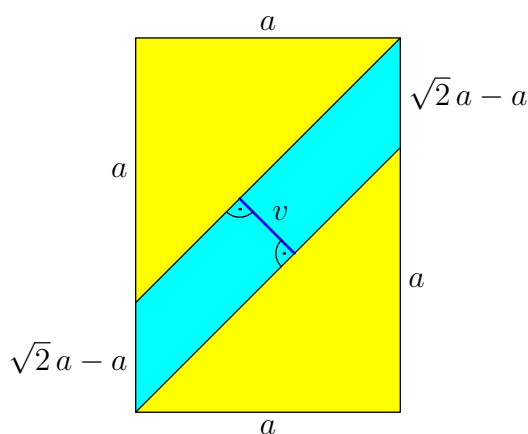
Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, obsah trojúhelníku, obsah rovnoběžníku

Do obdélníku s rozměry a , $\sqrt{2}a$ jsou vepsány dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délky a tak, že vrcholy pravých úhlů těchto trojúhelníků jsou umístěny ve dvou protějších vrcholech daného obdélníku. Urči vzdálenost v přepon těchto pravoúhlých trojúhelníků.

Řešení

Při umístění trojúhelníků do obdélníku podle zadání vznikne rovnoběžník, jehož jedna strana má délku $\sqrt{2}a - a$, druhá strana $\sqrt{2}a$. Hledaná vzdálenost v je pak délkou výšky na stranu $\sqrt{2}a$ v daném rovnoběžníku.



Obsah tohoto rovnoběžníku je roven součinu délky strany rovnoběžníku a výšky v na tuto stranu, tedy $S = \sqrt{2}a \cdot v$. Zároveň je tento obsah roven rozdílu obsahu velkého obdélníku a obsahů dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, tedy

$$S = S_1 - S_2 = a \cdot \sqrt{2}a - 2 \cdot \frac{a \cdot a}{2} = a^2 \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

Z uvedených dvou vyjádření obsahu téhož rovnoběžníku tak dostáváme

$$\begin{aligned}\sqrt{2}a \cdot v &= a^2 \cdot (\sqrt{2} - 1), & a &\neq 0, \\ \sqrt{2}v &= (\sqrt{2} - 1)a, \\ v &= \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{\sqrt{2}}, \\ v &= \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})a}{2}.\end{aligned}$$

Metodické poznámky

Řešení úlohy 4 je založeno na obdobném principu jako řešení úlohy 3, vyžaduje však náročnější manipulaci s geometrickými objekty a využití více řešitelských kroků. V řešení úlohy je využít vztah pro obsah rovnoběžníku, zároveň je však možno tento vztah na základě popsané konfigurace objektů modelu i odvodit: obsah daného rovnoběžníku je rozdílem obsahu velkého obdélníku a obsahů dvou trojúhelníků, tedy je stejný jako obsah obdélníku o stranách $\sqrt{2}a - a$, a , přičemž tyto dvě hodnoty charakterizují právě kratší stranu rovnoběžníku a výšku na tuto stranu.

Zdroj:

Růžičková, L.: *Užití podnětných úloh ve výuce matematiky*, Praha: PedF UK, 2012.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Lucie Růžičková; lucie_ruzickova@seznam.cz