

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru

Typ úloh: Různé metody řešení



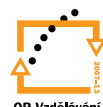
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	8
Metodický list 3	13
Metodický list 4	16

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

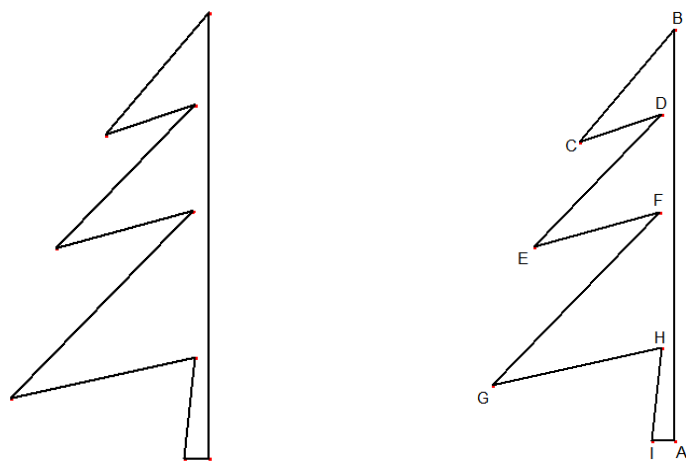
Klíčové pojmy: mnohoúhelník, osová souměrnost, osa souměrnosti

Úloha

Varianta 1. Na obrázku je znázorněna jen polovina stromečku. Doplň druhou polovinu (obrázek vlevo).

Varianta 2. Sestroj mnohoúhelník $ABCDEFGHI$ v osově souměrnosti s osou AB (obrázek vpravo, s popisem)

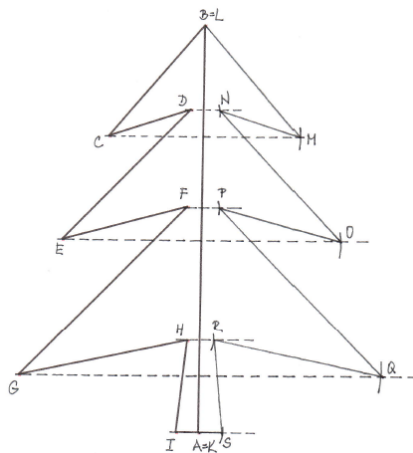
$$o_{AB}: ABCDEFGHI \mapsto KLMNOPQRS.$$



Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: konstrukce v osově souměrnosti pomocí pravítka a kružítka

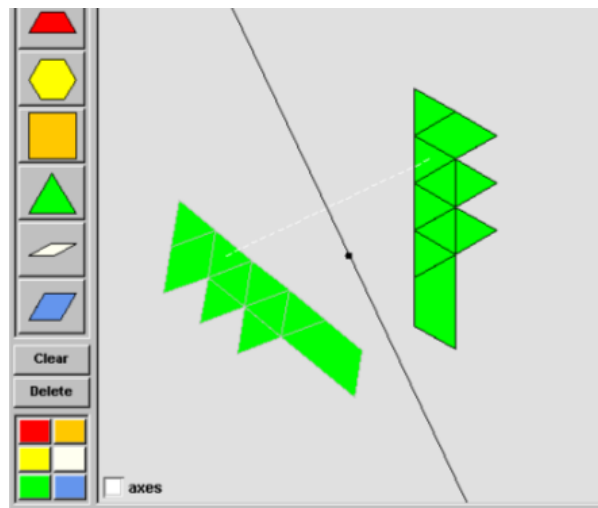
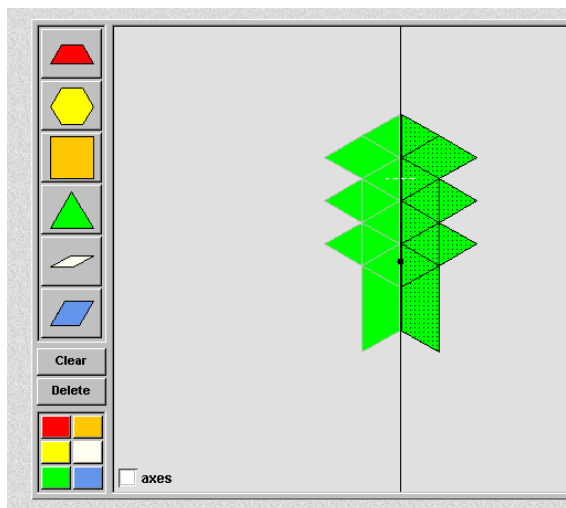
Pomocí pravítka sestrojíme kolmice k ose souměrnosti a kružítkem nanese potřebné vzdálenosti. Výsledné body spojíme lomenou čarou.



Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: konstrukce v osově souměrnosti

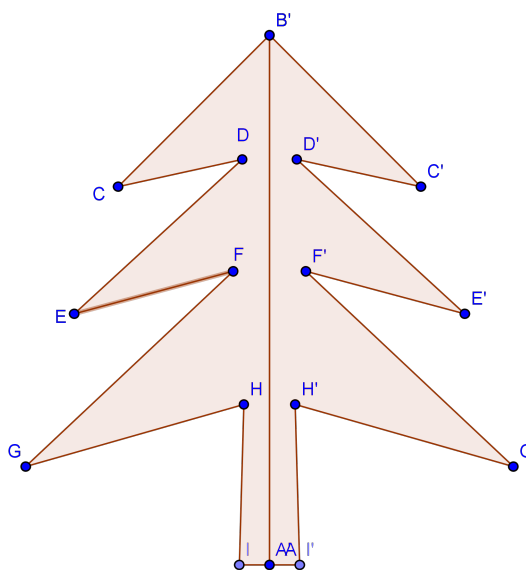
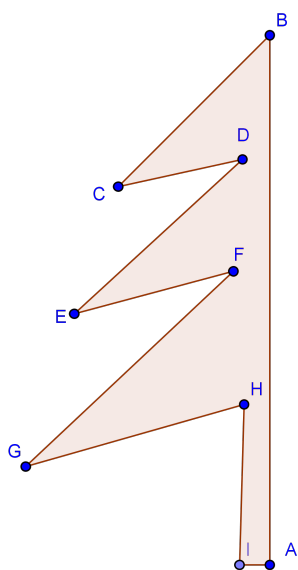
Internet nabízí velké množství materiálů ke shodným zobrazením. Mě zaujala zejména stránka nlvm.usu.edu, kde se nachází mnohá témata z geometrie. Učitel nebo žák si vytvoří vlastní obrázek a následně pohybem vidí, jakým způsobem se mění poloha vzoru a obrazu. Vzor je na obrázku vpravo, obraz vzniká změnou polohy osy vlevo.



Řešení 3 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: konstrukce v osově souměrnosti, GeoGebra

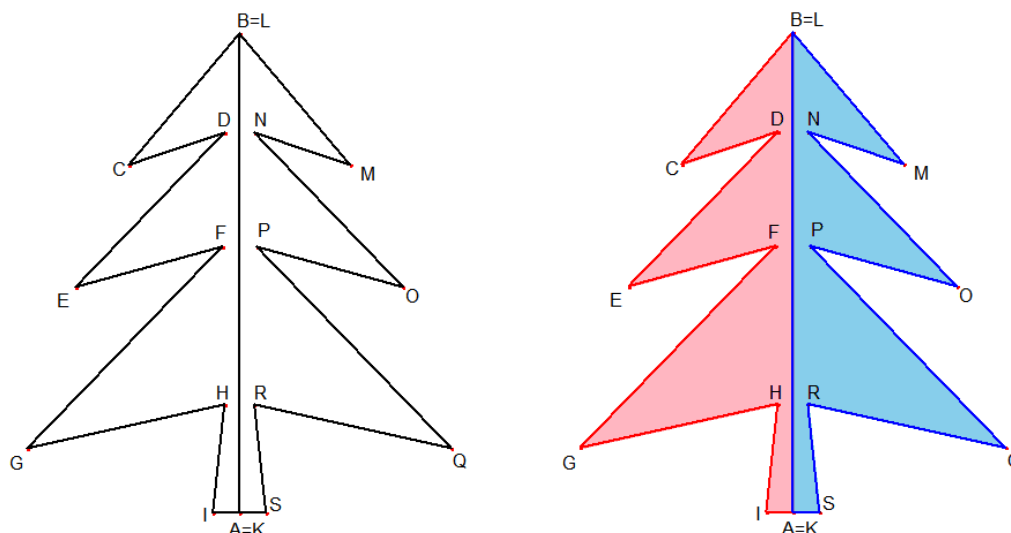
V programu GeoGebra nalezneme ikonu pro konstrukci osově souměrnosti. Klikneme na objekt, který chceme zobrazit a na osu souměrnosti. Program vytvoří shodné zobrazení. Program popíše vrcholy automaticky čárkovaně. Následně je možné názvy vrcholů změnit.



Řešení 4 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: konstrukce v osově souměrnosti, Cabri II+

V programu Cabri II+ nalezneme ikonu pro konstrukci osově souměrnosti. Klikneme na objekt, který chceme zobrazit, a na osu souměrnosti. Program vytvoří shodné zobrazení. Následně popíšeme vrcholy mnohoúhelníku. Pro větší zajímavost můžeme výsledný obrázek barevně zvýraznit.



Řešení 5 (úroveň 2)

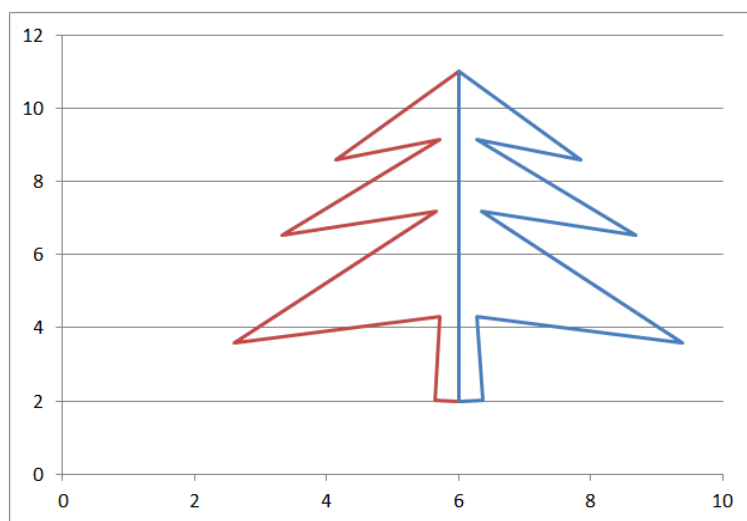
Předpokládané znalosti: konstrukce v osově souměrnosti, program MS Excel, pravoúhlá soustava souřadnic, souřadnice

Nejprve je potřeba zadat souřadnice bodů do tabulky MS Excel a vytvořit XY graf. Druhý úkol je složitější. Je potřeba pomocí rovnice vytvořit souřadnice obrazu a sestavit XY graf obrazu. Kopírováním se oba grafy sloučí do jednoho. Osa souměrnosti má rovnici $x = 6$, proto souřadnice y vzoru a souřadnice y obrazu jsou shodné a platí

$$x' = 6 + (6 - x)$$

	vzor		obraz	
	x	y	x	y
A	6	2	6	2
B	6	11	6	11
C	4,14	8,6	7,86	8,6
D	5,72	9,16	6,28	9,16
E	3,32	6,52	8,68	6,52
F	5,66	7,18	6,34	7,18
G	2,6	3,6	9,4	3,6
H	5,72	4,3	6,28	4,3
I	5,64	2,02	6,36	2,02
A	6	2	6	2

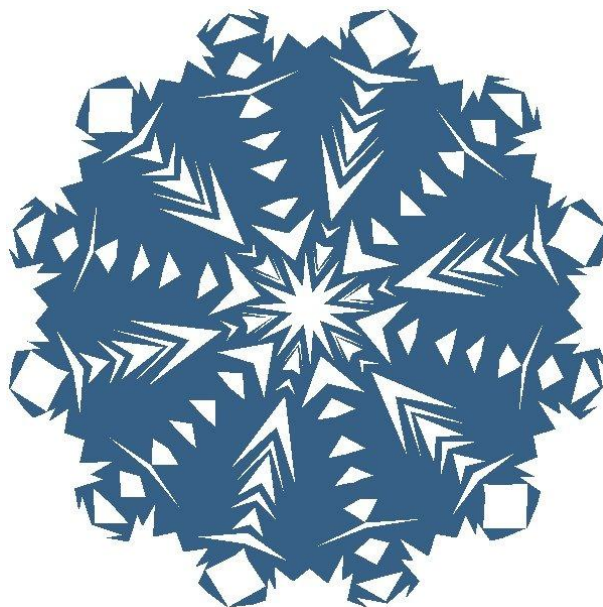
Graf vytvoří „strom“ v osové souměrnosti.



Metodické poznámky

Sestrojení obrazu geometrického útvaru v osové souměrnosti podle osy patří k základním poznatkům geometrie v rovině. Odlišná řešení ukáží žákům mezipředmětové vztahy. Při použití programu MS Excel navíc zopakujeme souřadnice bodu a rozvíjíme prostorovou představivost.

Doplnění 1. Pomocí papíru a nůžek vytvoř osově souměrný útvar.



Sněhová vločka na obrázku je souměrná podle šesti os souměrnosti. Obrázek je stažený <http://lucie.napady.net/image/15048011>

Doplnění 2. Hledej v přírodě příklady osové souměrnosti.



Zrcadlení na vodní hladině



Osová souměrnost

Metodické poznámky

Dodatky jsou zařazeny pro zpestření materiálu. Žáci si uvědomí, že osová souměrnost se běžně vyskytuje v přírodě. A sněhové vločky mnozí z nich stříhali již v mateřské školce. Tak dlouho už osovou souměrnost používají.

Zdroj: archiv autora

[1] *Transformations – Reflection*. In: *National Library of Virtual Manipulatives*. [online]. © 1999-2010 [cit. 2012-10-21]. Dostupné z: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_206_g_1_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html.

[2] Sněhové vločky. In: *Lucie nápady*. [online]. © 17. 11. 2010 [cit. 2012-10-21]. Dostupné <http://lucie.napady.net/snehove-vlocky>,

[3] *Poznáváme osovou souměrnost*. In: *ZŠ Kunratice*. [online]. © 2012 pilotmedia.cz [cit. 2012-10-21]. Dostupné <http://www.zskunratice.cz/ucitele/predmety/matematika/matematika-6-rocniky/21-2-4-3-318/>,

[4] *Motýl*. In: *Qark.net*. [online]. © Qark aka Bohumil Přecechtěl 2002 – 2012 [cit. 2012-10-21]. Dostupné <http://www.qark.net/clanek/motyl>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

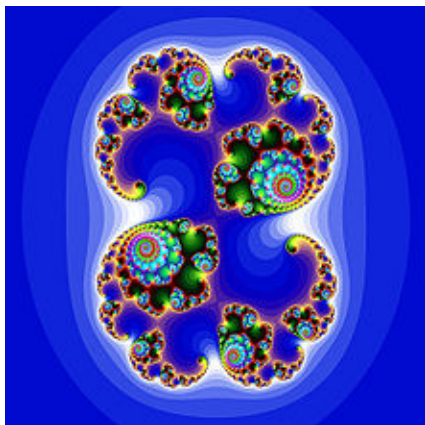
Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Různé metody řešení

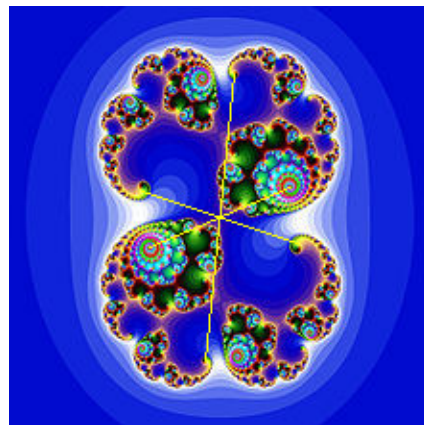
Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: mnohoúhelník, středová souměrnost, střed souměrnosti

Motivační úloha. Čím je zvláštní modrý obrázek 1a? Najdi část obrázku, která se opakuje. Zjisti geometrický útvar, podle kterého je část obrázku shodná s jinou částí obrázku.



Obr. 1a



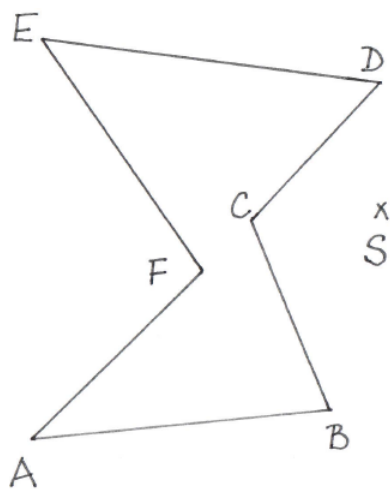
Obr. 1b

Řešení. „Horní část“ obrázku je shodná s „dolní částí“ ve středové souměrnosti. Střed souměrnosti najdeme v průsečíku „žlutých“ úseček, kterými jsme spojili odpovídající body shodných útvarů. Viz obr. 1b.

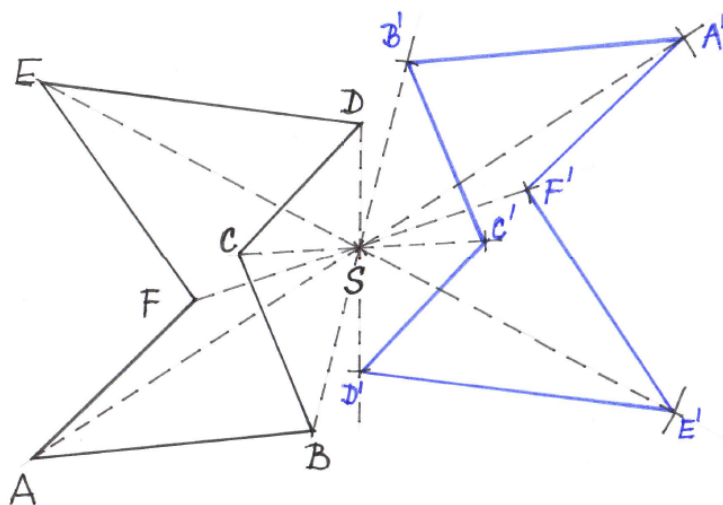
Poznámka. I zdánlivě složitý útvar může ukrývat nějakou pravidelnost. V tomto případě zjišťujeme, že horní část obrázku můžeme přesunout na spodní část. Obrázek je složen ze dvou stejných částí, jen vhodně umístěných v rovině.

Úloha

Sestroj mnohoúhelník $ABCDEF$ ve středové souměrnosti se středem S (viz obr. 2a)).



Obr. 2a



Obr. 2b

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: konstrukce ve středové souměrnosti pomocí pravítka a kružítka

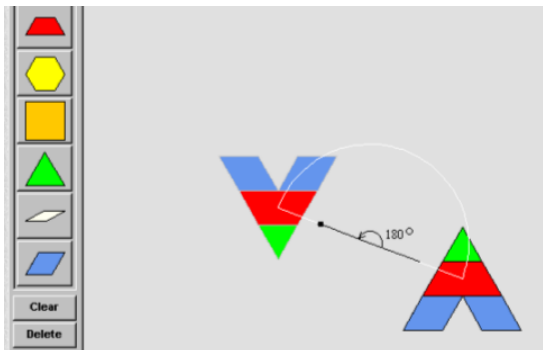
Pomocí pravítka sestrojíme polopřímky $AS, BS, \dots, FS$ a kružítkem (kružnice mají střed v bodě S) nanese potřebné vzdálenosti. Výsledné body spojíme lomenou čarou. (viz obr. 2b)

Řešení 2 (úroveň 2)

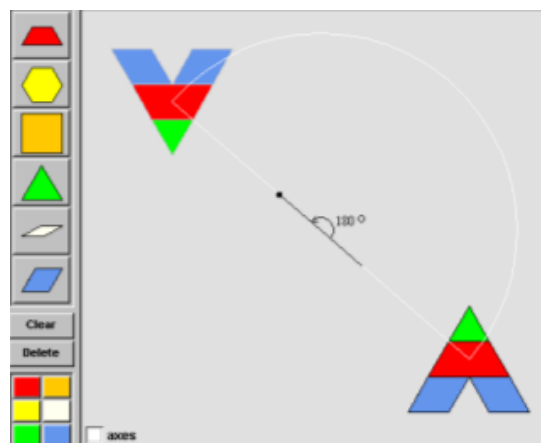
Předpokládané znalosti: konstrukce středové souměrnosti

Internet nabízí velké množství materiálů ke shodným zobrazením. Mě zaujala zejména stránka nlvm.usu.edu, kde se nachází mnohá témata z geometrie. Učitel nebo žák si vytvoří vlastní obrázek a následně pohybem vidí, jakým způsobem se mění poloha vzoru a obrazu. Středová souměrnost ve výběru není. Lze však použít rotaci o 180° .

Vzor je na obrázku 3a, obraz vzniká změnou polohy osy na obrázku 3b.



Obr. 3a



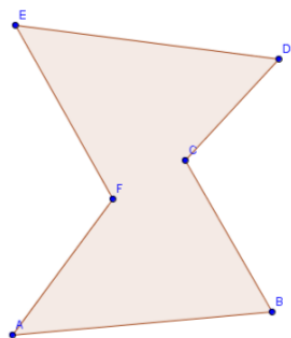
Obr. 3b

Řešení 3 (úroveň 3)

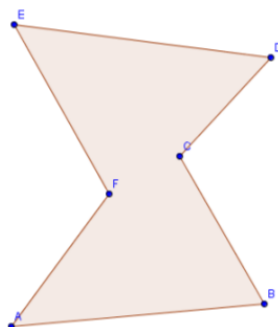
Předpokládané znalosti: konstrukce ve středové souměrnosti, GeoGebra

V programu GeoGebra nalezneme ikonu pro konstrukci středové souměrnosti. Klikneme na objekt, který chceme zobrazit a na osu souměrnosti. Program vytvoří shodné zobrazení. Program popíše vrcholy automaticky čárkovaně. Následně je možné názvy vr-

cholů změnit.



Obr. 4a

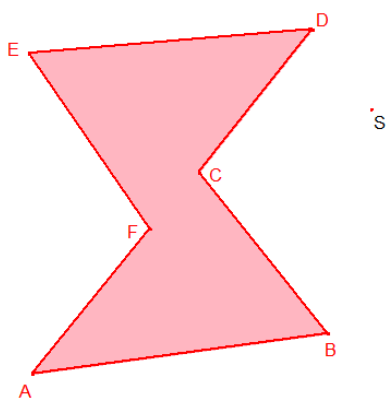


Obr. 4b

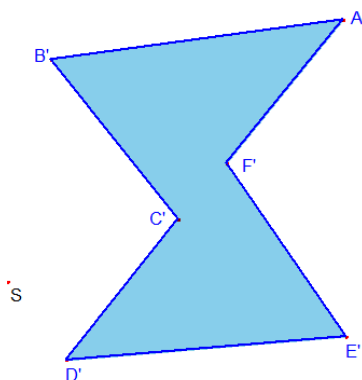
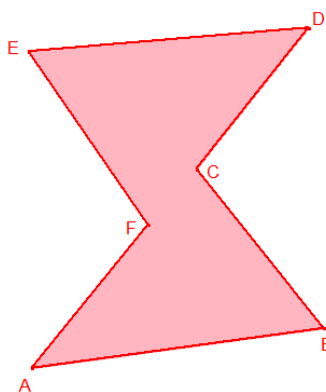
Řešení 4 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: konstrukce ve středové souměrnosti, Cabri II+

V programu Cabri II+ nalezneme ikonu pro konstrukci středové souměrnosti. Klikneme na objekt, který chceme zobrazit a na střed souměrnosti. Program vytvoří shodné zobrazení. Následně popíšeme vrcholy mnohoúhelníku. Pro větší zajímavost můžeme výsledný obrázek barevně zvýraznit.



Obr. 5a



Obr. 5b

Řešení 5 (úroveň 2)

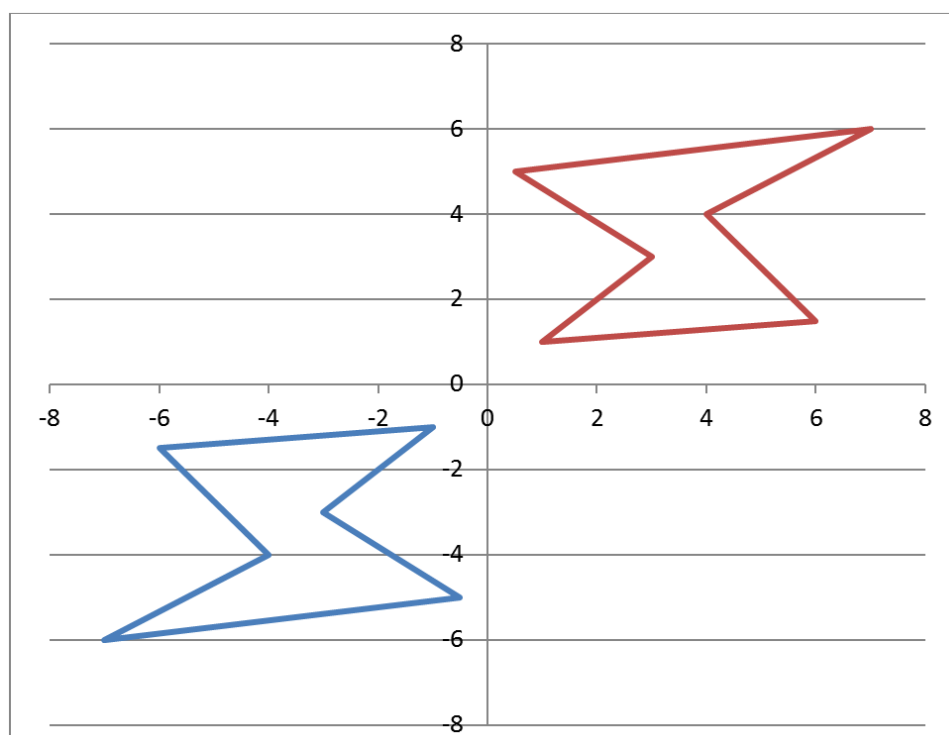
Předpokládané znalosti: konstrukce ve středové souměrnosti, program MS Excel, pravoúhlá soustava souřadnic, souřadnice bodu

Nejprve je potřeba zadat souřadnice bodů do tabulky MS Excel a vytvořit XY graf. Druhý úkol je složitější. Je potřeba pomocí rovnice vytvořit souřadnice obrazu a sestavit

XY graf obrazu. Kopírováním se oba grafy sloučí do jednoho. Středem souměrnosti volíme pro jednoduchost počátek pravoúhlé soustavy souřadnic. Potom platí $x' = -x$ a $y' = -y$. Graf vzoru a obrazu ukazuje obrázek 5a a 5b.

	vzor		obraz	
	x	y	x	y
A	1	1	-1	-1
B	6	1,5	-6	-1,5
C	4	4	-4	-4
D	7	6	-7	-6
E	0,5	5	-0,5	-5
F	3	3	-3	-3
A	1	1	-1	-1

Obr. 6a



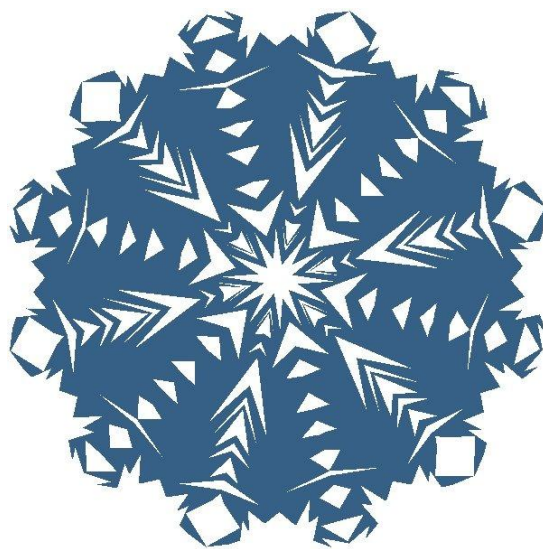
Obr. 6b

Doplnění.

Další příklady středové souměrnosti – například sněhové vločky z papíru.



Obr. 7a



Obr. 7b

Poznámka. Sněhová vločka vystřižená z papíru ukrývá nejen osovou souměrnost, ale je souměrná také podle středu.

Metodické poznámky

Sestrojení obrazu geometrického útvaru ve středové souměrnosti podle daného středu souměrnosti patří k základním poznatkům geometrie v rovině. Odlišná řešení ukáží žákům mezipředmětové vztahy a zapojení ICT techniky. Při použití programu MS Excel navíc zopakujeme souřadnice bodu a rozvíjíme geometrickou představivost.

Zdroj: archiv autora,

[1] Fraktál. In: *Wikipedia: the free encyclopedia*, [online]. 29. 12. 2012 v 09:55 [cit. 2013-1-13]. Dostupné <http://cs.wikipedia.org/wiki/Fraktál>, Publikováno pod licencí CC BY-SA.

[2] Transformations – Rotation. In: *National Library of Virtual Manipulatives*, [online]. © 1999-2010 [cit. 2013-01-13]. Dostupné http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_300_g_4_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html

[3] Sněhové vločky. In: *Lucie nápady*. [online]. © 17. 11. 2010 [cit. 2012-10-21]. Dostupné <http://lucie.napady.net/snehove-vlocky>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: obvod a obsah čtverce, obvod a obsah obdélníku, objem a povrch kváдру

Úloha

V bazénu 25 m dlouhém a 12,5 m širokém je 3 750 hl vody.

- a) Jaký je objem bazénu, sahá-li voda 30 cm pod okraj?
- b) Kolik dlaždic bylo potřeba na obložení celého bazénu, mají-li dlaždice tvar čtverce o straně 25 cm?

Řešení 1 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce, obvod a obsah obdélníku, objem a povrch kváдру

- a) Výpočet objemu. Nejdříve je nutné převést dané údaje na vhodné jednotky a vypočítat do jaké výšky sahá voda (označme c'), při současném objemu vody (označme V'). Dále nechť a , b , c jsou po řadě délka, šířka a hloubka bazénu a V je objem bazénu

$$a = 25 \text{ m} = 250 \text{ dm}, \quad b = 12,5 \text{ m} = 125 \text{ dm} \quad V' = 3\,750 \text{ hl} = 375\,000 \text{ dm}^3.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} V' &= a \cdot b \cdot c', \\ 375\,000 &= 250 \cdot 125 \cdot c', \\ c' &= 375\,000 : 31\,250, \\ c' &= 12 \text{ dm}. \end{aligned}$$

Voda sahá 30 cm pod okraj, proto je hloubka bazénu $c = 12 \text{ dm} + 30 \text{ cm} = 15 \text{ dm}$, odtud

$$V = a \cdot b \cdot c = 250 \cdot 125 \cdot 15 = 468\,750 \text{ dm}^3 = 4\,687,5 \text{ hl}.$$

- b) Počet dlaždic. Označme S obsah jedné čtvercové dlaždice o straně $x = 25 \text{ cm}$.

$$S = xc = 625 \text{ cm}^2 = 6,25 \text{ dm}^2.$$

Povrch bazénu S_b je určen vztahem

$$S_b = ab + 2bc + 2ac.$$

Po dosazení

$$S_b = 250 \cdot 125 + 2 \cdot 125 \cdot 15 + 2 \cdot 250 \cdot 15 = 42\,500 \text{ dm}^2.$$

Počet dlaždic nutných na obložení bazénu je $42\,500 : 6,25 = 6\,800$.

Závěr. Objem bazénu je 4 687,5 hl a na obložení bazénu je potřeba 6 800 kusů dlaždic.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce, obvod a obsah obdélníku, objem a povrch kvádru, trojčlenka

- a) Výpočet objemu. Ponecháme označení jako v Řešení 1 a stejným způsobem také vypočítáme výšku, do které sahá voda ($c' = 12$ dm, resp. $c = 15$ dm). Pro výpočet objemu vody nyní použijeme trojčlenku

$$\begin{array}{l} 12 \text{ dm} \dots\dots\dots 3\,750 \text{ hl} \\ 15 \text{ dm} \dots\dots\dots x \text{ hl} \end{array}$$

Odtud

$$x = \frac{3\,750 \cdot 15}{12} = 4\,687,5.$$

- b) Počet dlaždic. Dno bazénu je obdélník o stranách $25 \text{ m} = 2\,500 \text{ cm}$ a $12,5 \text{ m} = 1\,250 \text{ cm}$. Delší stranu dna je tedy možno rozdělit na $2\,500 : 25 = 100$ částí délky 25 cm , což je délka strany dlaždice. Obdobně můžeme kratší stranu dna rozdělit na $1\,250 : 25 = 50$ částí, odkud plyne, že počet dlaždic nutných na pokrytí dna je $100 \cdot 50 = 5\,000$. Stejným způsobem nalezneme počty částí, na něž lze rozdělit úsečku délky 15 dm , která představuje hloubku bazénu ($150 : 25 = 6$). Počet dlaždic na dvě delší boční stěny pak je $q = 2 \cdot 100 \cdot 6 = 1\,200$ a počet dlaždic na dvě kratší boční stěny je $r = 2 \cdot 50 \cdot 6 = 600$.

Celkový počet dlaždic je $p + q + r = 5\,000 + 1\,200 + 600 = 6\,800$.

Závěr. Objem bazénu je $4\,687,5 \text{ hl}$ a na obložení bazénu je potřeba $6\,800$ kusů dlaždic.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce, obvod a obsah obdélníku, objem a povrch kvádru

- a) Výpočet objemu. Ponecháme označení jako v Řešení 1 a stejným způsobem také vypočítáme výšku, do které sahá voda ($c' = 12$ dm, resp. $c = 15$ dm). Nyní vypočítáme objem části bazénu V'' , ve kterém voda není ($c' = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$) a přičteme k objemu vody.

$$V'' = a \cdot b \cdot c'' = 250 \cdot 125 \cdot 3 = 93\,750 \text{ dm}^3 = 937,5 \text{ hl} \quad \Rightarrow \quad V = 3\,750 + 937,5 = 4\,687,5 \text{ hl}.$$

- b) Počet dlaždic. Povrch bazénu S_b je určen vztahem

$$S_b = ab + 2bc + 2ac.$$

Po dosazení

$$S_b = 250 \cdot 125 + 2 \cdot 125 \cdot 15 + 2 \cdot 250 \cdot 15 = 42\,500 \text{ dm}^2.$$

Počet dlaždic nutných na obložení bazénu je $42\,500 : 6,25 = 6\,800$.

Závěr. Objem bazénu je $4\,687,5 \text{ hl}$ a na obložení bazénu je potřeba $6\,800$ kusů dlaždic.

Metodické poznámky

Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků ve skupinách a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Klíčové pojmy: tečna ke kružnici

16

K sestrojení tečny využijeme shodnost trojúhelníků (viz obr. 2).

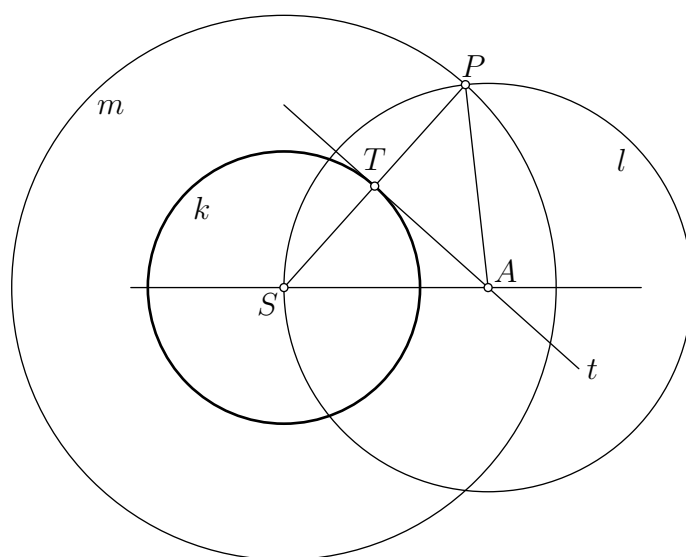
Trojúhelník SPQ je shodný s trojúhelníkem STA (podle věty *sus*), tedy $|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle STA|$, protože $|\sphericalangle SPQ| = 90^\circ$, je i $|\sphericalangle STA| = 90^\circ$, takže přímka AT je hledanou tečnou.

Bodem $P \in k \cap l \leftrightarrow SA$ sestrojíme kolmici m k přímce SA . Dále sestrojíme kružnici l se středem v bodě S a poloměrem $|SA|$. Průsečík přímky m s kružnicí l je bod Q . Bod dotyku T dostaneme jako průsečík kružnice k s polopřímku SQ .

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: osová souměrnost

K sestrojení tečny využijeme osovou souměrnost (viz obr. 3).



Obr. 3

Tečna AT je osou souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku ASP , je tedy osou úsečky SP . Hledanou tečnu AT sestrojíme jako osu úsečky SP .

Sestrojíme kružnici l se středem v bodě A a poloměrem $|SA|$. Dále sestrojíme kružnici m , která je soustředná s kružnicí k a jejíž poloměr je $2r$. Průsečík kružnic l a m je bod P . Hledaný bod dotyku T je středem úsečky SP .

Metodické poznámky

Řešení 1 (užití Thaletovy kružnice) je standardní postup při sestrojování tečny z bodu ke kružnici. Řešení 2 a 3 jsou méně známé postupy, ale pro jejich pochopení stačí žákům základní znalosti (věty o shodnosti trojúhelníků, resp. osová souměrnost).

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Macháčková; machacikova@gymz1.cz