

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	7
Metodický list 3	10
Metodický list 4	13
Metodický list 5	15
Metodický list 6	18
Metodický list 7	21
Metodický list 8	27
Metodický list 9	30
Metodický list 10	34
Metodický list 11	38
Metodický list 12	42
Metodický list 13	46
Metodický list 14	49
Metodický list 15	52
Metodický list 16	54
Metodický list 17	57
Metodický list 18	59
Metodický list 19	62
Metodický list 20	65
Metodický list 21	68
Metodický list 22	72
Metodický list 23	75
Metodický list 24	77
Metodický list 25	80
Metodický list 26	83
Metodický list 27	86
Metodický list 28	89
Metodický list 29	92
Metodický list 30	95
Metodický list 31	98
Metodický list 32	101
Metodický list 33	104
Metodický list 34	107
Metodický list 35	110
Metodický list 36	113
Metodický list 37	116

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

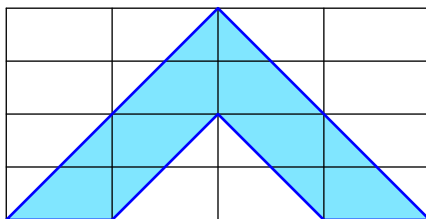
Klíčové pojmy: čtvercová síť, obvod a obsah rovinných útvarů

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku

Pythagoriáda, 2005/2006, školní kolo, 6. ročník, příklad 12

Vypočítej obsah vybarvené plochy, jestliže obdélníky obdélníkové sítě mají rozměr 4 cm a 2 cm.



Řešení

Jestliže vhodně sestavíme části obdélníkové sítě, zjistíme, že vybarvená plocha zabírá celkem 6 obdélníků, tedy

$$S = 6ab = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48.$$

Závěr. Obsah vybarvené plochy je 48 cm².

Metodické poznámky

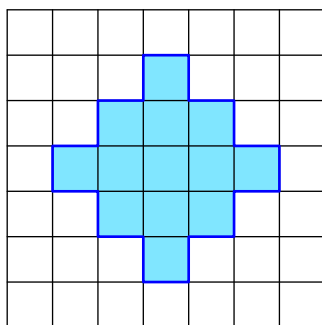
Příklad patří k jednoduchým úlohám, které řeší již žáci prvního stupně. Řešitel si musí dát pozor na spočítání správného počtu obdélníků.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce

Pythagoriáda, 2005/2006, okresní kolo, 6. ročník, příklad 12

Vybarvený obrazec ve čtvercové síti na obrázku má obvod 40 cm. Jaký je jeho obsah?



Řešení

Označme obvod útvaru o . Pro něj platí $o = 40 \text{ cm} = 20a$, kde a je strana čtverce. Odtud $a = 2 \text{ cm}$. Obsah útvaru vypočítáme jako součet obsahů obarvených čtverců

$$S = 13a^2 = 52.$$

Závěr. Obsah vybarvené části je 52 cm^2 .

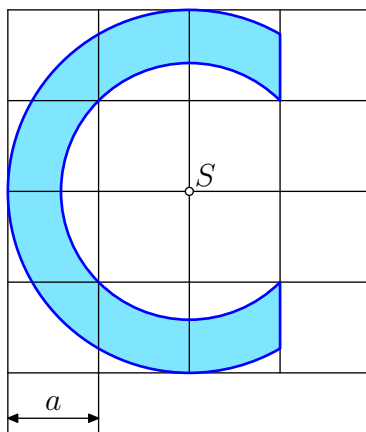
Metodické poznámky

Příklad je obtížnější ve využití nejdříve vztahu pro obvod čtverce a výpočtu neznámé strany a . Teprve v druhé části se vypočítá požadovaná hodnota obsahu obrazce.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Obvod a obsah kruhu a čtverce, vyjádření neznámé ze vzorce

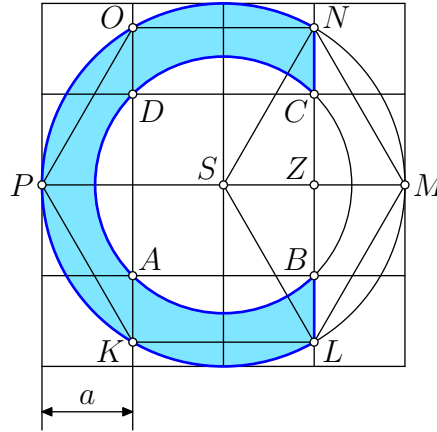
Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky a , jsou narýsovány dvě kružnice. Obě mají střed v bodě S a každá prochází čtyřmi mřížovými body. Vybarvený obrazec je vymezen částmi těchto kružnic a jednou síťovou přímkou. Vyjádřete obsah vybarveného obrazce pomocí délky a .



Řešení

Mřížové body, kterými prochází menší kružnice, označíme A, B, C a D . Na větší kružnici označíme body K, L, M, N, O a P podle obrázku. Šestiúhelník $KLMNOP$ je pravidelný, protože všechny body leží na jedné kružnici, strany KL a NO mají stejnou délku a tato délka je shodná s poloměrem kružnice. Ostatní strany mají shodnou délku.

Pro výpočet obsahu vyznačeného obrazce potřebujeme obsah S_1 většího kruhu a obsah S_2 jeho úseče vymezené tětivou LN . Dále označíme S_3 obsah menšího kruhu a S_4 obsah jeho úseče vymezené tětivou BC .



Větší kruh má poloměr $2a$, jeho obsah je

$$S_1 = \pi (2a)^2 = 4\pi a^2.$$

Obsah S_2 kruhové úseče je roven rozdílu obsahů kruhové výseče LSN a trojúhelníku LSN . Úhel LSN vymezuje třetinu šestiúhelníku $KLMNOP$, obsah kruhové výseče LSN je tedy třetina obsahu S_1 , tzn. $\frac{4}{3}\pi a^2$. Nyní vyjádříme obsah trojúhelníku LSN . Střed úsečky LN označíme Z . Podle Pythagorovy věty určíme délku strany ZN trojúhelníku SZN

$$|ZN| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow |LN| = 2a\sqrt{3}.$$

Obsah trojúhelníku LSN je

$$S_{LSN} = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot a = a^2\sqrt{3}.$$

Obsah kruhové úseče je

$$S_2 = \frac{4}{3}\pi a^2 - a^2\sqrt{3} = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) a^2.$$

Poloměr menšího kruhu odpovídá úhlopříčce čtverce o straně a , tzn. $a\sqrt{2}$, odtud vyjádříme obsah menšího kruhu jako

$$S_3 = \pi (a\sqrt{2})^2 = 2\pi a^2.$$

Pokud od obsahu S_3 odečteme obsah čtverce $ABCD$ a rozdíl vydělíme čtyřmi, dostaneme obsah kruhové úseče

$$S_4 = \frac{1}{4} (2\pi a^2 - 4a^2) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2.$$

Hledaný obsah je

$$\begin{aligned} S &= (S_1 - S_2) - (S_3 - S_4) = 4\pi a^2 - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) a^2 - 2\pi a^2 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2 = \\ &= \left(\frac{7}{6}\pi + \sqrt{3} - 1\right) a^2. \end{aligned}$$

Závěr. Obsah vyznačeného obrazce dostaneme pomocí vztahu $S = \left(\frac{7}{6}\pi + \sqrt{3} - 1\right) a^2$.

Metodické poznámky

Řešitel potřebuje znát obsah kruhu a jeho částí a musí umět upravovat výrazy s proměnnou. Navíc se projeví jeho trpělivost. Příklad není obtížný, ale studenti velmi neradi pracují s neznámou a s odmocninami.

Zdroj: archiv autora, *Matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2013-01-16]. Dostupné
<http://www.math.muni.cz/mo/Z/main.html>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

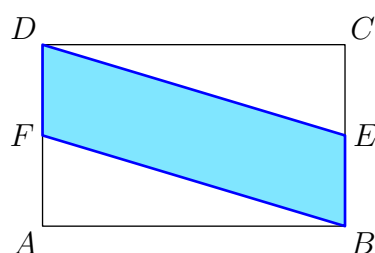
Klíčové pojmy: obvod a obsah rovinných útvarů

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, obsah trojúhelníku, obsah rovnoběžníku

Pythagoriáda, 2004/2005, školní kolo, 7. Ročník, příklad 8

Vypočítej obsah vybarvené plochy $BEDF$, jestliže obdélník $ABCD$ má rozměry 10 cm a 6 cm a body E, F jsou středy úseček BC a AD .



Řešení (1)

Označme $a = |AB|$ a $b = |BC|$. Vyznačený obrazec má obsah roven obsahu obdélníku $ABCD$ zmenšený o obsah trojúhelníku ABF a trojúhelníku CDE .

Obsah obdélníku $ABCD$ vypočítáme ze vztahu

$$S_1 = ab = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2.$$

Obsahy trojúhelníků ABF a CDE jsou shodné $S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot av$, kde $v = \frac{1}{2} \cdot b$, tedy

$$S_2 = 30 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Obsah vyznačené plochy činí $S = S_1 - S_2 = 30 \text{ cm}^2$.

Řešení (2)

Vyznačená plocha je rovnoběžník se základnou BE s délkou c rovnou polovině délky BC , tedy $c = 3 \text{ cm}$. Velikost výšky v_c rovnoběžníku je rovna délce strany AB , $v_c = |AB| = 10 \text{ cm}$. Platí $S = cv_c = 3 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.

Závěr. Obsah vyznačené plochy je 30 cm^2 .

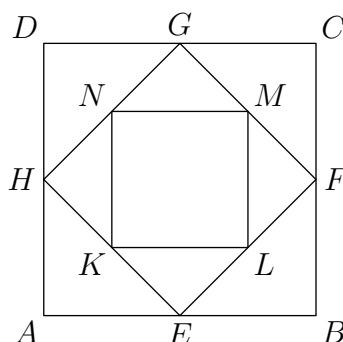
Metodické poznámky

Příklad ověřuje prostorovou představivost žáků. Žák musí „vidět“ obdélník a dva shodné trojúhelníky. Nebo může „vidět“ rovnoběžník, jehož základna je „vpravo“ – doporučuji otočit zadání o 90° , aby základna byla v tradiční vodorovné poloze.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce

Čtverec $KLMN$ má obvod 16 cm. Vypočítej obsah čtverce $ABCD$, jestliže body E, F, G, H jsou středy stran čtverce $ABCD$ a body K, L, M, N jsou středy stran čtverce $EFGH$.



Řešení

Označme $o = 16$ cm obvod čtverce $KLMN$.

Délka k strany čtverce $KLMN$ je $k = o/4 = 16/4 = 4$ cm. Délka a strany čtverce $ABCD$ je $a = 2k = 8$ cm, neboť např. čtyřúhelník $AELK$ je rovnoběžník ($KL \parallel AB$) $\wedge$ ($EL \parallel AC$).

Obsah čtverce $ABCD$ je $S = a \cdot a$, nebo-li $S = 8 \cdot 8 = 64$ cm².

Závěr. Obsah čtverce $ABCD$ je 64 cm².

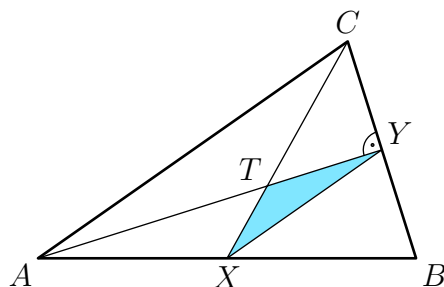
Metodické poznámky

Pro příklad je novinkou postup od vnitřního čtverce směrem k vnějšímu. Ve většině podobných příkladů se postupuje směrem k vnitřnímu čtverci.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obsah trojúhelníku, vlastnosti trojúhelníku

Je dán trojúhelník ABC . Na straně AB leží bod X a na straně BC leží bod Y tak, že CX je těžnice, AY je výška a XY je střední příčka trojúhelníku ABC . Vypočítej obsah vyznačeného trojúhelníku na obrázku, je-li obsah trojúhelníku ABC roven 24 cm².



Řešení

XY je střední příčka trojúhelníku ABC . Bod Y musí tedy být středem strany BC a tedy úsečka AY je podle zadání výška, ale současně je i těžnicí. Průsečík těžnic CX a AY je těžištěm trojúhelníku ABC , bod označíme T .

Každá těžnice rozdělí trojúhelník na dva trojúhelníky se stejným obsahem. Protože zde platí, že úsečka AY je těžnicí a současně výškou, dostaneme

$$S_{ABY} = S_{ACY} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Podobně XY je těžnice trojúhelníku ABY , proto

$$S_{AXY} = S_{BXY} = \frac{1}{2}S_{ABY} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2.$$

Trojúhelník AXY , jehož obsah známe, sestává z trojúhelníků AXT a YXT . Tyto dva trojúhelníky mají společnou výšku z bodu X , jejich obsahy jsou ve stejném poměru, v jakém je poměr délek stran AT a TY , tj. v poměru 2:1 (těžiště dělí těžnici v poměru 2:1). Obsah trojúhelníku YXT je třetinový vzhledem k obsahu trojúhelníku AXY , proto platí

$$S_{YXT} = \frac{1}{3}S_{AXY} = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Obsah vyznačeného trojúhelníku je 2 cm^2 .

Metodické poznámky

Zde se jasně ukáže rozvinutost prostorové představivosti a dokonalá znalost vlastností trojúhelníku. Klíčovým bodem je poznatek, že těžiště dělí těžnici v poměru 1:2.

Zdroj: archiv autora,

Matematická olympiáda. [online]. [cit. 2013-01-16]. Dostupné

<http://www.math.muni.cz/mo/Z/main.html>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

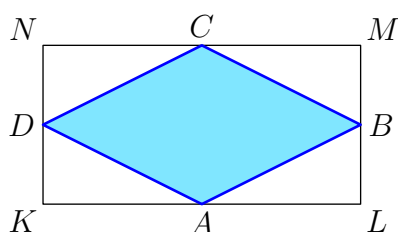
Klíčové pojmy: obvod a obsah rovinných útvarů

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, obsah trojúhelníku

Pythagoriáda, 2006/2007, školní kolo, 7. ročník, příklad 10

Body A, B, C, D jsou středy stran obdélníku $KLMN$ se stranami délek 6 cm a 3 cm. Vypočítejte obsah vybarveného obrazce.



Řešení (1)

Obsah obdélníku $KLMN$ je $S_o = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$ a obsah trojúhelníku ALB je $S_1 = \frac{1}{2} \cdot |AL| \cdot |BL|$. Všechny čtyři nevybarvené trojúhelníky jsou shodné, proto jejich obsah vypočítáme podle vztahu

$$S_t = 4S_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 = 9 \text{ cm}^2.$$

Obsah S vybarveného obrazce tak je

$$S = S_o - S_t = 18 - 9 = 9 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Obsah vybarveného obrazce je 9 cm^2 .

Řešení (2)

Označme S průsečík úseček AC a BD . Protože $LM \parallel AC$ a $KL \parallel BD$, je je čtyřúhelník $ALBS$ obdélník, tedy trojúhelník ABS je shodný s trojúhelníkem BAL a odtud už vidíme, že obsah vyznačeného obrazce $ABCD$ je polovinou obsahu obdélníku $KLMN$.

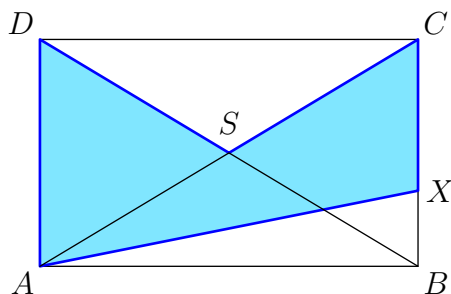
Metodické poznámky

K výpočtu opravdu stačí znát pouze obsah obdélníku a obsah trojúhelníku. A umět dosadit do vztahů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, obsah trojúhelníku
Pythagoriáda, 2005/2006, okresní kolo, 7. ročník, příklad 8

Vypočítej obsah vybarvené části obdélníku $ABCD$, jestliže $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|BX| = \frac{1}{3}|BC|$.



Řešení

Uvědomme si, že $|CX| = \frac{2}{3}|BC| = 4$ cm. Jestliže průsečík úhlopříček nazveme S , potom pro obsah vybarvené plochy platí

$$S = S_{ASD} + S_{AXC} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| + \frac{1}{2} \cdot |CX| \cdot |AB| = 15 + 20 = 35 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Obsah vybarvené části obdélníku je 35 cm^2 .

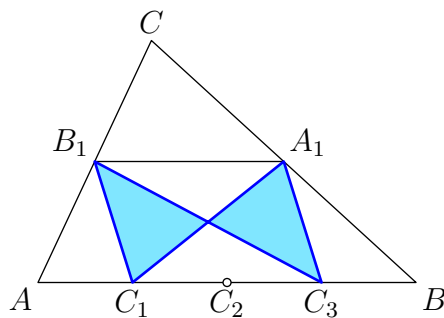
Metodické poznámky

Žák si musí vhodně rozdělit rovinné útvary a co nejjednodušším způsobem dopočítat neznámou.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obsah trojúhelníku, vlastnosti trojúhelníku, vyjádření neznámé ze vzorce
Matematická olympiáda, 62. ročník, 2012/2013, Z9-II-3

Vyznačme si v obecném trojúhelníku ABC následující body podle obrázku. Body A_1 a B_1 jsou postupně středy stran BC a AC , body C_1 , C_2 a C_3 dělí stranu AB na čtyři stejné díly. Spojíme body A_1 a B_1 po řadě s body C_1 a C_3 , takže nám vznikne „mašle“ ohraničená těmito spojnicemi. Jakou část obsahu celého trojúhelníku „mašle“ zabírá?



Řešení

Označme c délku strany AB a v výšku trojúhelníku na stranu AB . Potom platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv.$$

Úsečka B_1A_1 je střední příčkou trojúhelníku ABC . Je tedy rovnoběžná se stranou AB a poloviční velikosti. Body C_1 , C_2 a C_3 dělí stranu AB na 4 stejné díly. Úsečka C_1C_3 je polovinou strany AB a má stejnou délku jako úsečka A_1B_1 . Protože úsečky C_1C_3 a A_1B_1 jsou rovnoběžné a stejně dlouhé, je čtyřúhelník $C_1C_3A_1B_1$ rovnoběžníkem. Výška rovnoběžníku je polovinou výšky trojúhelníku. Potom obsah rovnoběžníku vypočítáme podle vztahu

$$S_{C_1C_3A_1B_1} = \frac{c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}cv = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Úhlopříčky rovnoběžníku jej rozdělují na čtyři trojúhelníky stejného obsahu. Mašle tvoří polovinu rovnoběžníku, proto

$$S_{mašle} = \frac{1}{2}S_{C_1C_3A_1B_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

Závěr. Obsah mašle je čtvrtinou obsahu trojúhelníku.

Metodické poznámky

Úloha ověří prostorovou představivost žáka a jeho znalosti vlastností trojúhelníku. Úloha není složitá, jen je potřeba nápad a vhodné doplnění chybějících úseček.

Zdroj: archiv autora,

Matematická olympiáda. [online]. [cit. 2013-01-16]. Dostupné

<http://www.math.muni.cz/mo/Z/main.html>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: obvod a obsah trojúhelníku, čtverce, obdélníku

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: převody jednotek obsahu, obsah trojúhelníku

Pan Ječmínek pěstuje pšenici na poli tvaru trojúhelníku se stranou 370 m a výškou k této straně 258 m. Kolik tun pšenice sklídil, jestliže hektarový výnos byl 5,2 tuny? (Výsledek zaokrouhlete na celé tuny).

Řešení

Nejdříve musíme vypočítat obsah pole, což je trojúhelník, pro jehož obsah platí $S = \frac{1}{2}av_a$, kde a je strana trojúhelníku a v_a je výška na stranu a . Po dosazení známých hodnot je obsah trojúhelníkového pole

$$S = \frac{370 \cdot 258}{2} = 47\,730 \text{ m}^2 = 4,773 \text{ ha.}$$

Protože z jednoho hektaru sklídí 5,2 tun pšenice, vynásobíme obsah pole hektarovým výnosem

$$4,773 \cdot 5,2 = 24,8196 \doteq 25 \text{ t.}$$

Závěr. Pan Ječmínek sklídil asi 25 tun pšenice.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže převádění jednotek.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a obsahu, obsah obdélníku, procenta

Novákovi koupili pozemek o rozloze $2\,400 \text{ m}^2$ a rozhodli se, že postaví domek o půdorysu tvaru obdélníku $24 \text{ m} \times 30 \text{ m}$, zbývající část pozemku bude zahrada. Kolik procent z plochy pozemku zabere zahrada?

Řešení

Nejdříve vypočítáme obsah obdélníku se stranami a , b představující půdorys domu podle vzorce

$$S = ab = 24 \cdot 30 = 720.$$

Na zahradu zůstane $2\,400 - 720 = 1\,680 \text{ m}^2$.

Pokud $2\,400\text{ m}^2$ představuje 100 %, pak $1\,680\text{ m}^2$ představuje

$$\frac{100 \cdot 1\,680}{2\,400} = 70\%.$$

Závěr. Plocha zahrady činí 70 % plochy pozemku.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem výpočet počtu procent.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah čtverce a obdélníku, druhá odmocnina

Janákoví mají čtvercový pozemek o rozloze $21\,024\text{ m}^2$, Hrabínovi vlastní pozemek ve tvaru obdélníku, jehož jedna strana má poloviční délku a druhá strana dvojnásobnou délku než je strana čtverce pozemku Janákových. Kolik zaplatí každá rodina za oplocení svého pozemku, je-li cena za oplocení jednoho metru 150 Kč?

Řešení

Nejdříve vypočítáme stranu x čtvercového pozemku Janákových. Ze vzorce pro obsah čtverce $S = x^2$ vyjádříme neznámou $x = \sqrt{S}$, odkud obvod O_J čtvercového pole Janákových činí

$$O_J = 4 \cdot x = 4 \cdot \sqrt{S} = 4 \cdot \sqrt{21\,024} = 128\text{ m}.$$

Hrabínovi mají pozemek tvaru obdélníku s následujícími rozměry. Kratší strana $a = \frac{1}{2}x = 16\text{ m}$ a delší strana $b = x \cdot 2 = 64\text{ m}$, odkud pro obvod O_H pole Hrabínových platí

$$O_H = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (16 + 64) = 160\text{ m}.$$

Cenu oplocení pozemků vypočítáme tak, že vynásobíme obvod cenou za oplocení jeden metr

$$\text{Janákoví} \dots\dots\dots 128 \cdot 150 = 19\,200,$$

$$\text{Hrabínovi} \dots\dots\dots 160 \cdot 150 = 24\,000.$$

Závěr. Cena za oplocení pozemku Janákových je 19 200 Kč a Hrabínových 24 000 Kč.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem výpočet rozměrů pozemků.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v prostoru a v rovině

Klíčové pojmy: obvod a obsah čtverce a obdélníku, poměr

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: obvod, obsah, čtverec a obdélník, zlomky, poměr

Obdélník i čtverec mají shodné obvody o velikosti 10 metrů. Obdélník má délku dvakrát větší než šířku. V jakém poměru jsou jejich obsahy?

Řešení

Označme a délku strany čtverce a d a s délky stran obdélníku, podle zadání $d = 2s$. Pro obvod O_c čtverce platí

$$10 \text{ m} = O_c = 4a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{2} \text{ m}.$$

Podobně pro obvod O_o obdélníku platí

$$10 \text{ m} = O_o = 2(d + s) = 6s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{5}{3} \text{ m}, \quad d = \frac{10}{3} \text{ m}.$$

Obsah S_c čtverce pak je

$$S_c = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} \text{ m}^2.$$

Obsah S_o obdélníku je

$$S_o = \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{9} \text{ m}^2.$$

Poměr

$$S_c : S_o = \frac{25}{4} : \frac{50}{9} = \frac{50}{8} : \frac{50}{9} = 9 : 8.$$

Závěr. Obsah čtverce a obsah obdélníku jsou v poměru 9 : 8.

Metodické poznámky

Materiál je určen pro práci se žáky 9. ročníku ZŠ, kteří řeší úlohy zaměřené na výpočty související s obdélníkem se zvyšující se náročností. V úloze 1 si žáci procvičují si výpočty se zlomky a poměrem.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obsah, obdélník, procenta

Výměra obdélníkového pozemku s rozměry 120 metrů a 300 metrů byla při stavbě dálnice zmenšena o 8,8 %. Jakou výměru má pozemek po zmenšení?

Řešení

Obsah původního pozemku byl

$$S_1 = 120 \cdot 300 = 36\,000 \text{ m}^2.$$

Obsah části, o kterou byl pozemek zmenšen je

$$S_2 = 36\,000 \cdot 0,088 = 3\,168 \text{ m}^2,$$

pro jeho novou výměru S tak dostaneme

$$S = S_1 - S_2 = 32\,832 \text{ m}^2.$$

Závěr. Pozemek má po zmenšení výměru $32\,832 \text{ m}^2 = 3,28 \text{ ha}$.

Metodické poznámky

Žákům je třeba připomenout výpočet počtu procent a převody jednotek obsahu.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, poměr

Změňte v poměru 4 : 3 délky strany obdélníku s rozměry 24 cm a 16 cm. V jakém poměru se změní obsah obdélníku?

Řešení

Původní obdélník měl obsah

$$S_1 = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2.$$

Strany nového obdélníku mají délky $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18 \text{ cm}$ a $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12 \text{ cm}$, jeho obsah tak je

$$S_2 = 18 \cdot 12 = 216 \text{ cm}^2.$$

Proto

$$S_1 : S_2 = 384 : 216 = 16 : 9.$$

Závěr. Obsahy obdélníků jsou v poměru 16 : 9.

Metodické poznámky

Je potřeba si uvědomit, zda obdélník zvětšujeme nebo zmenšujeme.

Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obvod obdélníku, poměr

Je dán obdélník $ABCD$, který má délku $a = 6 \text{ cm}$ a obvod $o = 20 \text{ cm}$. Jak dlouhé strany má obdélník $KLMN$ s obvodem $o' = 24 \text{ cm}$, jsou-li obdélníky $ABCD$ a $KLMN$ podobné?

Řešení

Šířka b obdélníku $ABCD$ je $b = 4$ cm. Koeficient podobnosti $p = \frac{o'}{o} = \frac{6}{5}$, proto podobný obdélník má strany délek $\frac{6}{5} \cdot 6 = 7,2$ cm a $\frac{6}{5} \cdot 4 = 4,8$ cm.

Závěr. Obdélník $KLMN$ má rozměry 7,2 cm a 4,8 cm.

Metodické poznámky

Žáci často chybují v určení koeficientu podobnosti.

Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, násobení mnohočlenů

Vyjádřete obsah obdélníku, který má jednu stranu o 10 větší než je trojnásobek čísla x a druhou stranu o 7 menší než polovina čísla x .

Řešení

Strany obdélníku jsou $3x + 10$ a $\frac{1}{2}x - 7$, pro jeho obsah S platí

$$S = (3x + 10)\left(\frac{1}{2}x - 7\right) = \frac{3}{2}x^2 - 16x - 70.$$

Závěr. Obsah obdélníku je $\frac{3}{2}x^2 - 16x - 70$.

Metodické poznámky

Je vhodné věnovat větší pozornost zadání úlohy, abychom správně určili velikost stran, případně můžeme pomoci žákům při sestavování rovnice.

Zdroj: archiv autorky

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: čtverec a obdélník v geometrii a algebře

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obsah čtverce, výpočet počtu procent

Školní dvůr měl tvar čtverce o straně 11 metrů. Dvůr byl zvětšen o 75 m^2 a má opět tvar čtverce.

- a) O kolik metrů byla zvětšena každá strana dvora?
- b) O kolik procent se zvětšil obsah dvora?

Řešení

- a) Vypočítáme obsah původního školního dvora $S_1 = 11^2 = 121 \text{ m}^2$. Zvětšíme velikost školního dvora $S_2 = 121 + 75 = 196 \text{ m}^2$. Odtud určíme velikost strany zvětšeného školního dvora $a = 14 \text{ m}$. Každá strana školního dvora byla zvětšena o 3 metry.
- b) Výpočet počtu procent 100% je 121 m^2 , $x \%$ je $75 : 1,21 = 61,98 \%$.

Závěr. Každá strana školního dvora byla zvětšena o 3 metry. Školní dvůr se zvětšil o 62 %.

Metodické poznámky

Žáci si zopakují obsah čtverce, druhou mocninu, počítání s procenty.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah obdélníku, sčítání mnohočlenů

Délka obdélníku je $4x + y$, šířka je o $x + y$ menší. Určete jeho obvod.

Řešení

Délka obdélníku je $4x + y$, šířka obdélníku je $(4x + y) - (x + y)$, obvod obdélníku pak

$$o = 2 \cdot (4x + y) + 2 \cdot (4x + y - x - y) = 14x + 2y$$

a obsah obdélníku

$$S = (4x + y) \cdot (3x) = 12x^2 + 3xy.$$

Závěr. Obdélník má obvod $14x + 2y$, jeho obsah je $12x^2 + 3xy$.

Metodické poznámky

Tato netradiční úloha spojuje učivo geometrie a algebry.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obsah čtverce, obdélníku, řešení rovnic, druhá mocnina dvojčlenu

Obsah obdélníku s rozměry 5 cm a 8 cm je stejně velký jako rozdíl obsahů dvou čtverců, z nichž druhý má stranu o 4 cm menší než první čtverec. Určete obsahy těchto čtverců.

Řešení

Obsah obdélníku je $S = 40 \text{ cm}^2$. Označíme velikost strany prvního čtverce x , velikost strany druhého čtverce zmenšíme o 4 cm, dostaneme $(x - 4)$. Sestavíme rovnici podle zadání

$$40 = x^2 - (x - 4)^2 \Rightarrow x = 7 \text{ cm.}$$

První čtverec má velikost strany 7 cm a velikost strany druhého čtverce je 3 cm.

Závěr. Strany čtverců mají velikosti 7 cm a 3 cm.

Metodické poznámky

Je důležité správně si přečíst zadání příkladu (čtení s porozuměním).

Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obsah obdélníku, řešení rovnic

V obdélníku je délka o 8 cm větší než šířka. Zmenšíme-li délku o 6 cm a zvětšíme-li šířku o 2 cm, dostaneme čtverec, jehož obsah je o 68 cm^2 menší než obsah obdélníku. Vypočtete rozměry obdélníku.

Řešení

Označme x šířku obdélníku, pak jeho délka je $x + 8$. Délka stran čtverce je $(x + 8) - 6 = x + 2$. Odtud podle zadání

$$(x + 2) \cdot (x + 2) + 68 = (x + 8) \cdot x \Rightarrow x = 18.$$

Závěr. Obdélník má šířku 18 cm a délku 26 cm.

Metodické poznámky

Pro žáky je obtížné sestavit správně rovnici.

Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obvod, obsah obdélníku, rovnice

Obvod obdélníku je 22 cm. Zvětšíme-li šířku obdélníku o 1 cm a současně zmenšíme délku o 1 cm, zvětší se obsah o 8 cm^2 . Jaké jsou rozměry původního obdélníku?

Řešení

Označme a , b délky stran původního obdélníku. Do vzorce pro výpočet obvodu obdélníku $o = 2a + 2b$ dosadíme ze zadání $o = 22$ cm. Dostaneme tak rovnici ve tvaru $22 = 2a + 2b$. Odtud $b = 11 - a$ a obsah původního obdélníku je $a(11 - a)$. Upravený obdélník má strany délek $a - 1$ a $(11 - a) + 1 = 12 - a$, jeho obsah tak je $(a - 1)(12 - a)$. Proto platí

$$a \cdot (11 - a) = (a - 1) \cdot (12 - a) - 8 \quad \Rightarrow \quad a = 10 \text{ cm.}$$

Dosadíme získanou hodnotu a a dostaneme šířku $b = 11 - a = 1$ cm.

Závěr. Rozměry původního obdélníku jsou 1 cm a 10 cm.

Metodické poznámky

Pro žáky je často problém správné sestavení rovnice.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: osová souměrnost

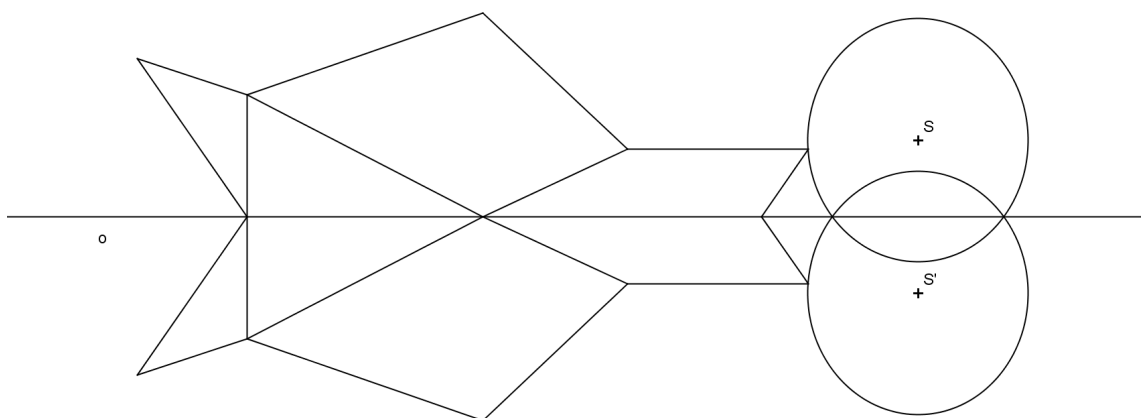
Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: konstrukce obrazu útvaru v osově souměrnosti s danou osou

Sestroj obraz nakresleného útvaru v osově souměrnosti s osou o (viz Pracovní list na konci metodického listu).

Řešení

Zobrazíme význačné body útvaru (vrcholy mnohoúhelníků, střed kružnice) v osově souměrnosti s danou osou, pak konstrukci doplníme.



Metodické poznámky

Řešení úlohy vyžaduje pouze opakované použití základních pravidel pro konstrukci útvaru v osově souměrnosti se zadanou osou. Až žáci konstrukci provedou, můžeme s nimi krátce diskutovat, co jim vzniklý obrázek připomíná. Mohl by to být třeba delfín, který si hraje se dvěma nafukovacími míči, nebo vrabec zobající třešně.

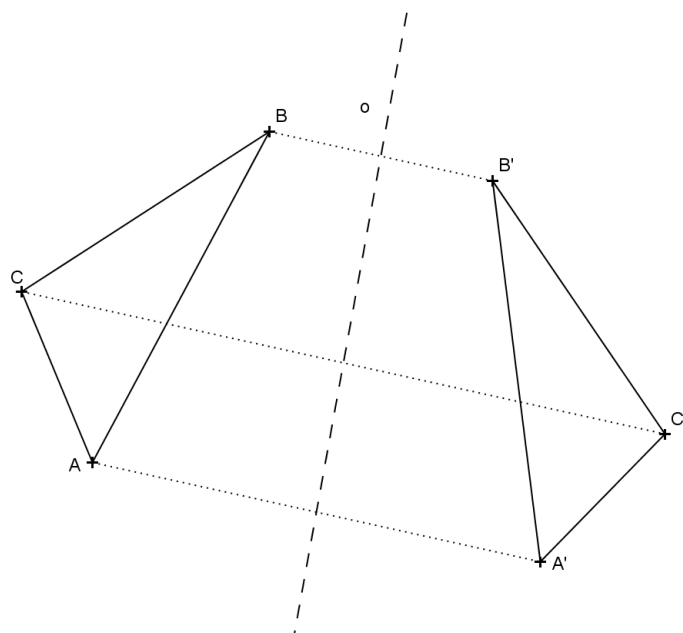
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: hledání osy souměrnosti na základě dvojice bodů vzor–obraz, konstrukce obrazu útvaru v osově souměrnosti s danou osou

Jsou dány body A , B , C a bod A' , který je obrazem bodu A v osově souměrnosti s neznámou osou o . Sestroj osu o , pak sestroj trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osově souměrnosti s osou o (viz Pracovní list).

Řešení

Hledaná osa o bude osou úsečky AA' . Dále sestrojíme obrazy bodů B, C v osové souměrnosti s osou o a doplníme požadované trojúhelníky.



Metodické poznámky

Řešení úlohy využívá základní vlastnosti dvojice bodů vzor–obraz v osové souměrnosti pro konstrukci osy, dále vyžaduje opakované použití základních pravidel pro konstrukci útvaru v osové souměrnosti. Úlohu je možno řešit s využitím některého softwaru dynamické geometrie.

Úloha 3 (úroveň 3)

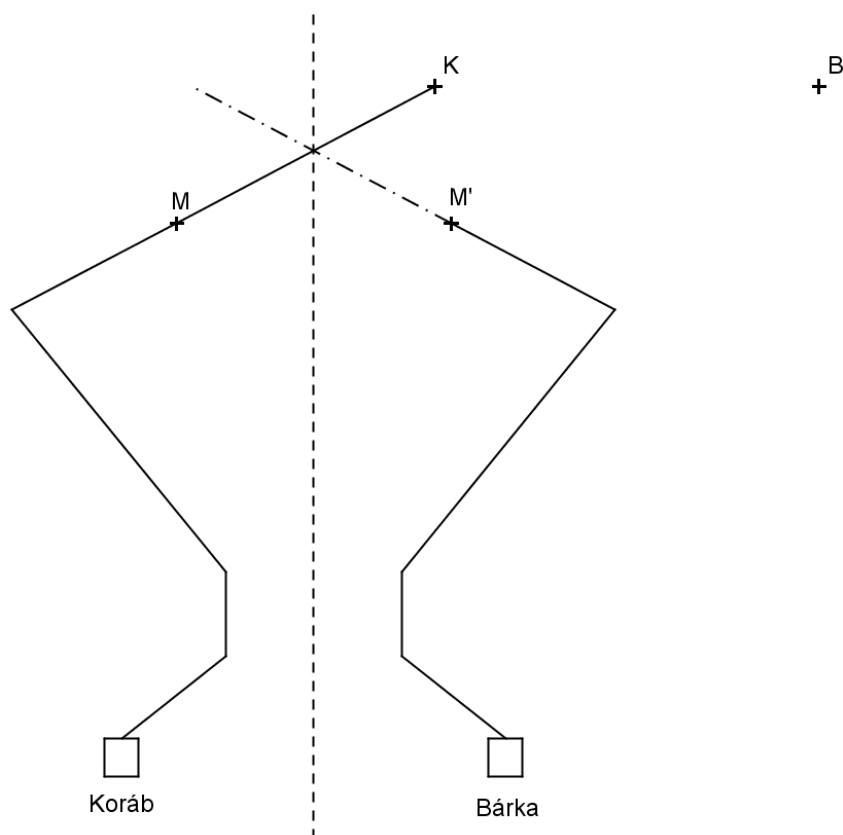
Předpokládané znalosti: vlastnosti obrazu útvaru v osové souměrnosti, samodružné body osové souměrnosti, hledání osy souměrnosti na základě dvojice bodů vzor–obraz, konstrukce obrazu útvaru v osové souměrnosti s danou osou

Dvě lodi *Koráb* a *Bárka* vyjely současně z přístavu směrem po proudu řeky. *Koráb* měl doplnout do bodu K a *Bárka* měla doplnout do bodu B . Vrchní admirál pozoruje plavbu ze břehu a vždy vydá vysílačkou rozkaz, zda mají lodi zatočit doleva nebo doprava a o kolik stupňů. Kapitán *Korábu* rozkazy plní. Kapitán *Bárky* si také myslí, že rozkazy plní, ale popletl si pravobok a levobok. *Bárka* tedy vždy zatočí o správný počet stupňů, ale na opačnou stranu (viz Pracovní list).

- Podle dosavadních rozkazů dojel *Koráb* do místa M , jeho dráha je zakreslena na obrázku. Dokresli dráhu *Bárky*.
- Podle dalšího admirálova rozkazu bude *Koráb* pokračovat přímoou cestou z místa M do svého cílového bodu K . Kam pojede *Bárka*? Co se stane? Zdůvodni.

Řešení

- a) Jestliže *Koráb* dojel do místa *M*, pak *Bárka* podle zadání úlohy došla do místa *M'* (viz obrázek), přičemž její dráha je osově souměrná s dráhou *Korábu* podle osy úsečky určené výchozími pozicemi obou lodí. Dráhu *Bárky* ovšem můžeme dokreslit i přímo podle zadání, bez využití osově souměrnosti, pouze postupným přenášáním úhlů a úseček odpovídajících jednotlivým úsekům.
- b) Obdobným postupem jako v části a) můžeme doplnit dráhu *Bárky* pro případ, kdy *Koráb* bude pokračovat do místa *K*. Vidíme tedy, že obě dráhy se protnou v bodě, který leží na ose souměrnosti těchto drah. V praktické interpretaci situace to znamená, že dané dvě lodi se v tomto místě srazí.

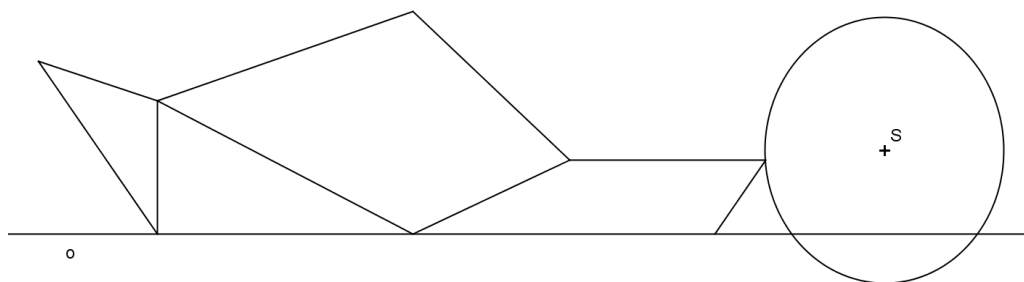


Metodické poznámky

Princip úlohy je sice založen na vlastnostech osově souměrnosti, její využití však není pro řešení úlohy nezbytné. Pro práci ve třídě je naopak výhodou, pokud aspoň někteří žáci úlohu řeší bez využití osově souměrnosti. V rámci diskuze a porovnávání různých postupů řešení pak žáci společně odhalí, že využití osově souměrnosti vedlo ke stejnému výsledku jako postupná konstrukce pomocí přenášání úhlů a úseček. To jim pak umožní objevit nebo prakticky si ukázat některé vlastnosti osově souměrnosti, například zachování délek úseček a velikostí úhlů, samodružné body, zobrazení jedné poloroviny do opačné. Úlohu je možno řešit s využitím některého softwaru dynamické geometrie.

Úloha 1

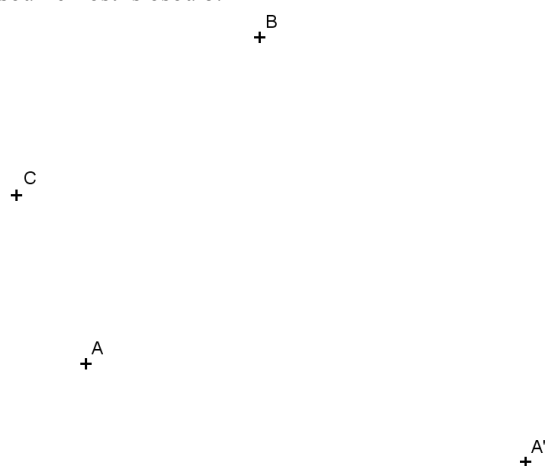
Sestroj obraz nakresleného útvaru v osově souměrnosti s osou o .



Úloha 2

Jsou dány body A, B, C a bod A' , který je obrazem bodu A v osově souměrnosti s neznámou osou o .

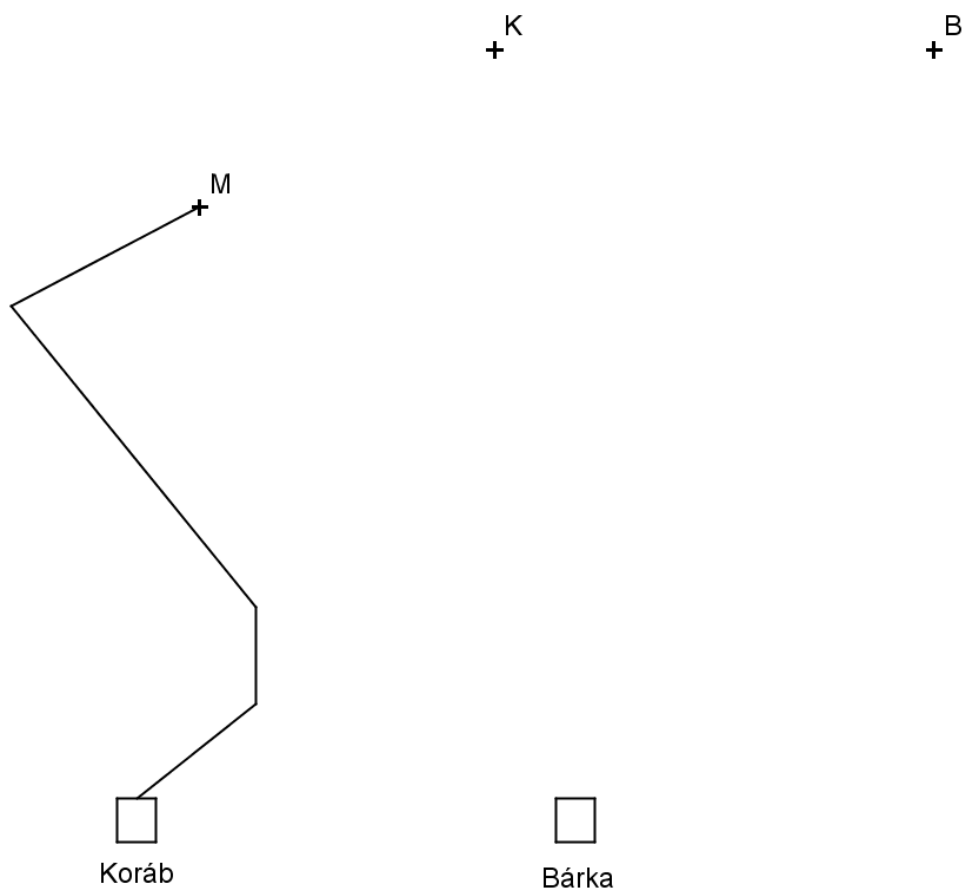
Sestroj osu o , pak sestroj trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC v osově souměrnosti s osou o .



Úloha 3

Dvě lodi *Koráb* a *Bárka* vyjely současně z přístavu směrem po proudu řeky. *Koráb* měl doplout do bodu *K* a *Bárka* měla doplout do bodu *B*. Vrchní admirál pozoruje plavbu ze břehu a vždy vydá vysílačkou rozkaz, zda mají lodi zatočit doleva nebo doprava a o kolik stupňů. Kapitán *Korábu* rozkazy plní. Kapitán *Bárky* si také myslí, že rozkazy plní, ale popletl si pravobok a levobok. *Bárka* tedy vždy zatočí o správný počet stupňů, ale na opačnou stranu.

- Podle dosavadních rozkazů dojel *Koráb* do místa *M*, jeho dráha je zakreslena na obrázku. Dokresli dráhu *Bárky*.
- Podle dalšího admirálova rozkazu bude *Koráb* pokračovat přímou cestou z místa *M* do svého cílového bodu *K*. Kam pojede *Bárka*? Co se stane? Zdůvodni.



Zdroj:

Růžicková, L.: *Užití podnětných úloh ve výuce matematiky*, Praha: PedF UK, 2012.

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: PhDr. Lucie Růžicková; lucie_ruzickova@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: podobnost trojúhelníků

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: věta sss o podobnosti trojúhelníků

Trojúhelník T_1 má délky stran 4 cm, 8 cm a 10 cm a je podobný trojúhelníku T_2 . Určete délky zbylých dvou stran trojúhelníku T_2 , jestliže jeho nejkratší strana je dlouhá 6 cm.

Řešení

Označme nejkratší strany trojúhelníků T_1, T_2 po řadě a_1, a_2 , tedy $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 6$ cm, dále zbývající strany b_1, c_1, b_2, c_2 , kde $b_1 = 8$ cm, $c_1 = 10$ cm. Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s poměrem podobnosti k .

Nejkratší strany podobných trojúhelníků T_1, T_2 si odpovídají, pro koeficient podobnosti k platí

$$k = \frac{a_2}{a_1}. \quad (1)$$

Po dosazení do vztahu (1) za $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 6$ cm dostaneme $k = \frac{3}{2}$. Pro zbývající strany trojúhelníku T_1 platí

$$b_2 = k \cdot b_1, \quad (2)$$

$$c_2 = k \cdot c_1. \quad (3)$$

Po dosazení do vztahů (2) a (3) za $k = \frac{3}{2}$, $b_1 = 8$ cm a $c_1 = 10$ cm dostaneme $b_2 = 12$ cm, $c_2 = 15$ cm.

Závěr. Trojúhelník T_2 má délky stran 6 cm, 12 cm a 15 cm.

Metodické poznámky

Základní úloha zaměřená na procvičení problematiky podobnosti trojúhelníků, kterou lze dále modifikovat.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: měřítko mapy, Pythagorova věta, věta sss o podobnosti trojúhelníků, převody jednotek

Pole tvaru pravoúhlého trojúhelníku je na plánu v měřítku 1:5000 zakresleno jako trojúhelník, jehož přepona je dlouhá 25 mm a jedna z odvěsen má délku 24 mm. Určete skutečnou rozlohu pole.

Řešení

Trojúhelník vymežující pole ve skutečnosti je podobný trojúhelníku, který znázorňuje pole na mapě (dle věty *sss* o podobnosti trojúhelníků). Měřítko mapy je 1:5000, pak poměr podobnosti k trojúhelníku vymežujícího pole a trojúhelníku znázorňujícího pole na mapě je $k = 5000$.

Označme strany trojúhelníkového pole ve skutečnosti a_0, b_0, c_0 , kde c_0 je přepona a zbývající dvě strany jsou odvěsny. Podobně a, b, c jsou strany trojúhelníku znázorňujícího pole na mapě, kde c je přepona a zbývající dvě strany jsou odvěsny, přičemž $a = 24$ mm, $c = 25$ mm.

Užitím Pythagorovy věty určíme délku odvěsny b , tj. platí

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Po dosazení do tohoto vztahu za $a = 24$ mm, $c = 25$ mm dostaneme $b = 7$ mm. Z podobnosti trojúhelníku vymežující pole ve skutečnosti s trojúhelníkem znázorňující pole na mapě plyne pro rozměry pole

$$a_0 = k \cdot a = 120\,000 \text{ mm} = 120 \text{ m},$$

$$b_0 = k \cdot b = 35\,000 \text{ mm} = 35 \text{ m},$$

$$c_0 = k \cdot c = 125\,000 \text{ mm} = 125 \text{ m}.$$

Obsah S pole tvaru pravoúhlého trojúhelníku vypočteme užitím vztahu

$$S = \frac{1}{2} a_0 b_0,$$

který lze dokázat doplněním trojúhelníku na obdélník. Po dosazení do vztahu za $a_0 = 120$ m, $b_0 = 35$ m dostaneme $S = 2\,100 \text{ m}^2$, tedy 21 arů.

Závěr. Rozloha pole činí 21 a.

Metodické poznámky

Úloha zaměřená na opakování a procvičování měřítka mapy a obsahů trojúhelníků. Úlohu je také možné využít při samostatné práci žáků a případně diskutovat odlišné žákovské řešení. Využití mezipředmětových vztahů zejména ze zeměpisem.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: věta *uu* o podobnosti trojúhelníků

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Dokažte, že výška k přeponě AB rozdělí trojúhelník ABC na dva podobné trojúhelníky.

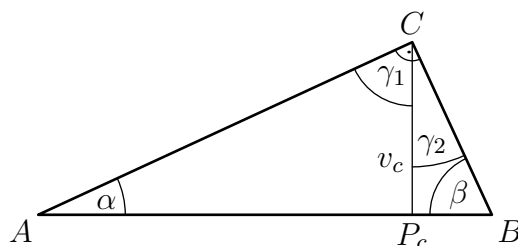
Řešení

Uvažujme standardní označení stran a vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , tj. a, b, c a α, β, γ . Trojúhelník ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , tedy vnitřní úhel

při vrcholu C je pravý, tj. $\gamma = 90^\circ$. Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je 180° , pak pro součet ostrých vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (4)$$

Výšku na stranu c označme v_c a P_c patu této výšky. Výška v_c v trojúhelníku ABC dělí úhel γ na dva úhly, označme je γ_1, γ_2 . Dále znázorníme obrázek trojúhelníku ABC , ve kterém vyznačíme délky jeho stran, vnitřní úhly, výšku na stranu c a patu této výšky a úhly γ_1, γ_2 .



Trojúhelník AP_cC je pravoúhlým trojúhelníkem s pravým úhlem při vrcholu P_c , kde pro velikosti vnitřních úhlů α, γ_1 platí

$$\alpha + \gamma_1 = 90^\circ. \quad (5)$$

Ze vztahů (4) a (5) plyne, že $\gamma_1 = \beta$. Pak pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků AP_cC a CP_cB platí

$$|\sphericalangle P_cCA| = |\sphericalangle P_cBC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle AP_cC| = |\sphericalangle CP_cB|.$$

Z věty *uu* o podobnosti trojúhelníků plyne, že $\triangle AP_cC \sim \triangle CP_cB$.

Závěr. Výška k přeponě pravoúhlého trojúhelníku ABC dělí tento trojúhelník na dva podobné trojúhelníky.

Metodické poznámky

Při řešení této důkazové úlohy využíváme základních vlastností pravoúhlých trojúhelníků a věty *uu* o podobnosti trojúhelníků.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: rovnice a jejich soustavy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 141 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: Pythagorova věta

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, konstrukce trojúhelníku podle věty (sus)

V zemi Halolandu se žáci v geometrii učí provádět pouze tři druhy konstrukcí:

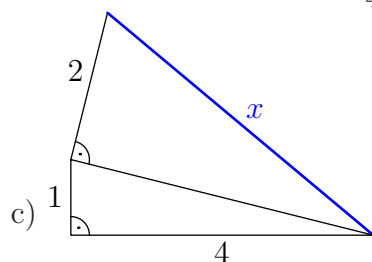
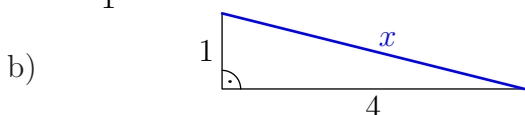
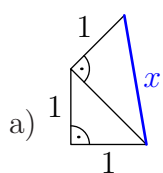
1. sestrojit úsečku, jejíž délka v centimetrech je celé číslo;
2. sestrojit úsečku, jejíž délka v centimetrech je celé číslo, která je kolmá na dříve sestrojenou úsečku a má s ní společný jeden krajní bod;
3. sestrojit úsečku, jejíž oba krajní body už jsou sestrojeny.

Popiš, jak mohou v Halolandu sestrojit úsečku, která má délku:

- a) $x = \sqrt{3}$ cm,
- b) $x = \sqrt{17}$ cm,
- c) $x = \sqrt{21}$ cm.

Řešení

Hledaná úsečka je vždy označena x . U každé úlohy je uvedeno jedno z možných řešení. Využijeme Pythagorovu větu. Sestrojujeme postupně pravoúhlé trojúhelníky, jejichž odvěsny mají celočíselnou délku nebo byly dříve sestrojeny. Přepona dříve sestrojeného trojúhelníku může být odvěsnou nově konstruovaného trojúhelníku, čímž získáváme při dodržení zadaných podmínek prostředek ke konstrukci úseček iracionálních délek.



Metodické poznámky

Při řešení úlohy je třeba propojit geometrickou interpretaci Pythagorovy věty s její algebraickou aplikací. Zároveň poskytuje žákům příležitost k získání zkušeností při práci s iracionálními čísly a ukazuje geometrický význam těchto čísel.

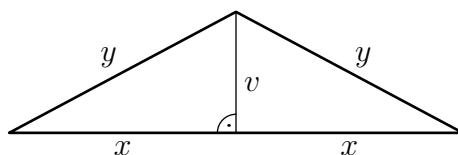
Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku, MS Excel

Délky stran i výšky na základnu rovnoramenného trojúhelníku jsou vyjádřeny v centimetrech celými čísly, obvod trojúhelníku je 64 cm. Urči délky stran. Najdi všechna řešení.

Řešení

Rovnoramenný trojúhelník se skládá ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, označme si celočíselné délky stran těchto trojúhelníků x , y , v podle obrázku 2. V tomto pravoúhlém trojúhelníku platí $y > x$.



Obr. 2

Podle zadání úlohy je obvod trojúhelníku $o = x + x + y + y = 64$ cm, tedy $x + y = 32$ cm. Těmto podmínkám vyhovuje 15 dvojic celočíselných hodnot x , y , u nichž je nutno ověřit platnost poslední podmínky, že v je celé číslo. Z Pythagorovy věty určíme $v^2 = y^2 - x^2$ a ověříme, pro které hodnoty x a y vychází v^2 jako druhá mocnina některého celého čísla. Výhodně lze užít např. program Microsoft Excel (viz tabulka 1).

x	y	x^2	y^2	$y^2 - x^2$	$v = \sqrt{y^2 - x^2}$	2x
1	31	1	961	960	30,98387	2
2	30	4	900	896	29,93326	4
3	29	9	841	832	28,84441	6
4	28	16	784	768	27,71281	8
5	27	25	729	704	26,533	10
6	26	36	676	640	25,29822	12
7	25	49	625	576	24	14
8	24	64	576	512	22,62742	16
9	23	81	529	448	21,16601	18
10	22	100	484	384	19,59592	20
11	21	121	441	320	17,88854	22
12	20	144	400	256	16	24
13	19	169	361	192	13,85641	26
14	18	196	324	128	11,31371	28
15	17	225	289	64	8	30

Tab. 1

Závěr. Zadání vyhovují tři rovnoramenné trojúhelníky.

rameno y [cm]	základna $2x$ [cm]	výška v [cm]
25	14	24
20	24	16
17	30	8

Metodické poznámky

Úloha poskytuje vhodné prostředí pro praktickou diskusi o některých geometrických i algebraických principech. Proto po vyřešení úlohy, můžeme žáky vést k tomu, aby se zamysleli například nad těmito otázkami:

1. Je nutné ověřovat, že pro zjištěné délky stran rovnoramenného trojúhelníku platí trojúhelníková nerovnost? [Není. Stačí, že je na základě Pythagorovy věty zaručena existence dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, z nichž se rovnoramenný trojúhelník skládá.]
2. Proč můžeme uvažovat pouze celočíselné hodnoty x , přestože podle zadání by délka základny $2x$ mohlo být liché číslo? [Jestliže by číslo x mělo necelou část rovnu 0,5, jeho druhá mocnina by měla necelou část rovnu 0,25 a spolu s celočíselnými hodnotami y a v by nemohla platit Pythagorova věta.]

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, vlastnosti obdélníku, obsah trojúhelníku

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je bod S střed přepony AB a platí $|SC| = 2$ cm, $|\sphericalangle ASC| = 60^\circ$. Urči obsah trojúhelníku ABC .

Řešení

Doplníme trojúhelník na obdélník $ADBC$ (viz obr. 3). Bod S je průsečíkem úhlopříček v tomto obdélníku, tedy jejich středem, proto je

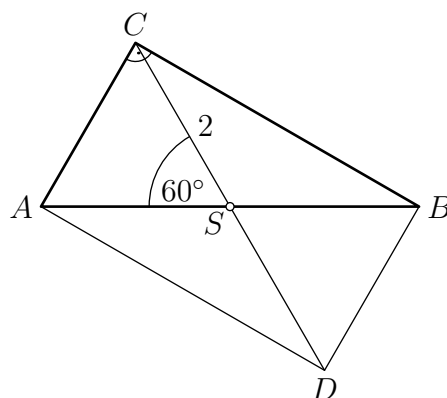
$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = 2 \text{ cm} \quad \text{a} \quad |AB| = |SA| + |SB| = 4 \text{ cm}.$$

(Případně lze přím využít Thaletovu větu. Bod S je středem Thaletovy kružnice nad průměrem AB , proto je $|SA| = |SB| = |SC| = 2$ cm.)

V rovnoramenném trojúhelníku ASC má úhel ASC při hlavním vrcholu velikost 60° , proto je tento trojúhelník rovnostranný, tedy i $|AC| = 2$ cm. Délku druhé odvěsny BC pravoúhlého trojúhelníku ABC určíme pomocí Pythagorovy věty při obvyklém označení stran trojúhelníku

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$\text{Závěr. Obsah pravoúhlého trojúhelníku } ABC \text{ je } S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$



Obr. 3

Metodické poznámky

Řešení úlohy sice není založeno na znalostech přesahujících rámec RVP ZV, jedná se však o obtížnější úlohu, protože její komplexní struktura vyžaduje propojení poznatků z různých oblastí matematiky a provedení několika řešitelských kroků. Pokud je úloha řešena bez znalosti Thaletovy věty doplněním na obdélník, je možno využít ji jako motivační úlohu před studiem Thaletovy kružnice. Při řešení úlohy lze výhodně využít i některý ze softwarů dynamické geometrie.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Lucie Růžicková; lucie_ruzickova@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: metrické úlohy v rovině

Úloha 1 (úroveň 1–2)

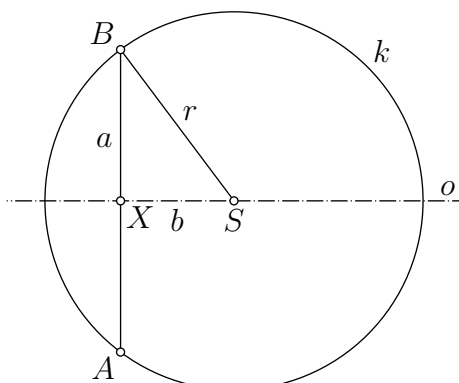
Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, vlastnosti osy tětiny kružnice

Určete poloměr kružnice, je-li její střed S vzdálen 9 cm od tětiny o délce 2,4 dm.

Řešení

Nejprve si znázorníme obrázek, kde navíc vyznačíme osu o tětiny AB (osa tětiny prochází středem kružnice), průsečík osy o a tětiny AB , který označíme X . Trojúhelník BXS je pravoúhlý s odvěsnami BX a SX a přeponou SB . Označme délky stran trojúhelníku BXS

$$a = |BX|, \quad b = |XS|, \quad r = |SB|.$$



Obr. 1

Délka tětiny AB je 2,4 dm. Bod X je středem úsečky AB , tedy platí

$$a = \frac{1}{2} |AB| = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}.$$

Vzdálenost tětiny AB od bodu S je 9 cm, tj. $b = 9 \text{ cm}$.

Užitím Pythagorovy věty určíme poloměr kružnice, zřejmě platí

$$r^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Vyjádřením r ze vztahu (1) a dosazením za $a = 12 \text{ cm}$ a $b = 9 \text{ cm}$ dostaneme

$$r = 15 \text{ cm}.$$

Závěr. Poloměr kružnice je 15 cm.

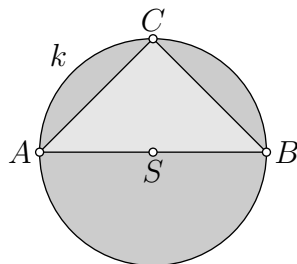
Metodické poznámky

Úloha je vhodná pro procvičení Pythagorovy věty. Při řešení úlohy využíváme vlastnosti osy tětiny kružnice.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obsah kruhu, obsah trojúhelníku

Do kruhu k o průměru $|AB| = c$ je vepsán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC (obr. 2). Určete poměr obsahů kruhu k a trojúhelníku ABC .



Obr. 2

Řešení

Průměr kruhu k je c , pak pro jeho obsah S_1 platí

$$S_1 = \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot c^2}{4}. \quad (1)$$

Označme v_c výšku na stranu c v trojúhelníku ABC . Velikost výšky v_c odpovídá délce úsečky SC , jelikož bod S je střed úsečky AB a trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB . Zřejmě platí, že $|SB| = |SC|$, tedy $v_c = \frac{c}{2}$. Pro obsah S_2 trojúhelníku ABC platí

$$S_2 = \frac{c \cdot v_c}{2}. \quad (2)$$

Po dosazení do vztahu (2) za $v_c = \frac{c}{2}$ dostaneme

$$S_2 = \frac{c^2}{4}. \quad (3)$$

Při vyjádření poměru $\frac{S_1}{S_2}$ využijeme vztahů (2) a (3), tedy

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi \cdot c^2}{4}}{\frac{c^2}{4}} = \frac{\pi}{1}.$$

Závěr. Poměr obsahů kruhu k a trojúhelníku ABC je $\pi : 1$.

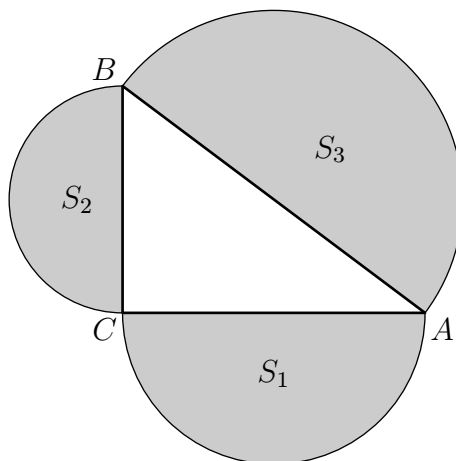
Metodické poznámky

Řešení úlohy je provedeno obecně, ale je možné ukázat žákům řešení při zvolení konkrétní hodnoty průměru kruhu. Úloha je vhodná pro procvičení nejen určování obsahů rovinných útvarů, ale i úprav výrazů. Úlohu lze též řešit užitím Thaletovy a Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABC .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta

Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C uvažujme polokruhy. Dokažte, že platí $S_1 + S_2 = S_3$ (viz obr. 3).



Obr. 3

Řešení

Označme délky stran trojúhelníku ABC $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Půlkruh sestrojený nad stranou AC má poloměr $\frac{b}{2}$, pak

$$S_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot b^2}{8}. \quad (1)$$

Půlkruh sestrojený nad stranou BC má poloměr $\frac{a}{2}$, pak

$$S_2 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot a^2}{8}. \quad (2)$$

Půlkruh sestrojený nad stranou AB má poloměr $\frac{c}{2}$, pak

$$S_3 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot c^2}{8}.$$

Při vyjádření součtu $S_1 + S_2$ využijeme vztahů (1) a (2), tedy

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot b^2}{8} + \frac{\pi \cdot a^2}{8} = \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2).$$

Dále užitím Pythagorovy věty dostaneme

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi \cdot c^2}{8} = S_3.$$

Závěr. Pro obsahy polokruhů uvažovaných nad stranami pravoúhlého trojúhelníku platí $S_1 + S_2 = S_3$, kde S_1 , S_2 jsou obsahy polokruhů sestrojených nad odvěsnami a S_3 je obsah polokruhu uvažovaného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku ABC .

Metodické poznámky

Důkazová úloha zaměřená na procvičení určování obsahů půlkruhů a úprav výrazů.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: kruhy a válce*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: trojúhelník, těžnice, střed strany, konstrukce trojúhelníku

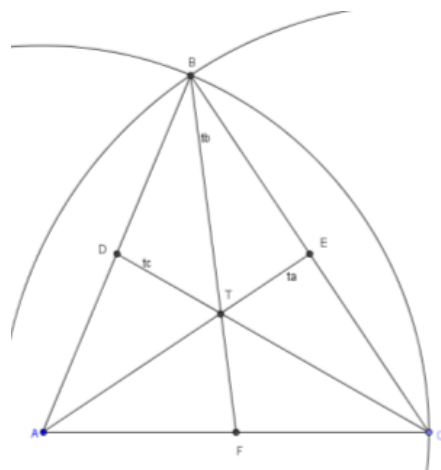
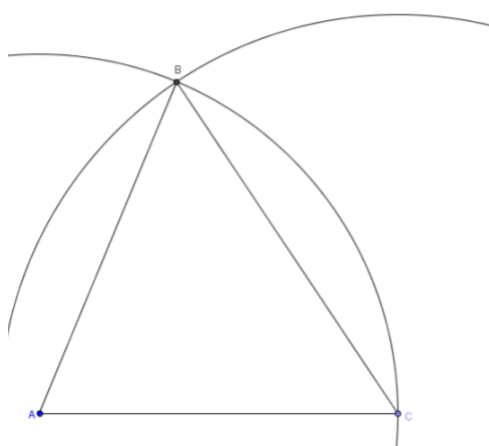
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: konstrukce trojúhelníku podle věty (sss), konstrukce středu úsečky, těžnice trojúhelníku

Sestroj těžnice trojúhelníku ABC , kde při obvyklém označení prvků trojúhelníku $a = 5\text{ cm}$, $b = 4,5\text{ cm}$, $c = 2,8\text{ cm}$.

Řešení

Sestrojíme trojúhelník podle věty (sss). Nalezneme středy stran trojúhelníku (konstrukce pomocí kružítka). Těžnice vznikne jako spojnice středu strany s protějším vrcholem.



Metodické poznámky

Na jednoduchém příkladu užití věty (sss) zopakujeme vlastnosti a konstrukci těžnic trojúhelníku.

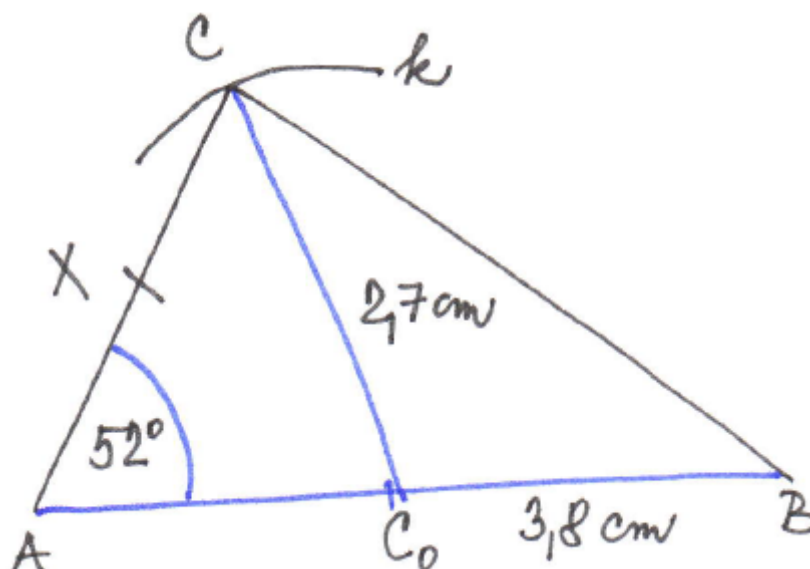
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vlastnosti těžnice trojúhelníku, konstrukce úhlu pomocí úhlooměru, matematická symbolika pro konstrukci rovinných útvarů

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno při obvyklém označení prvků trojúhelníku $c = 3,8\text{ cm}$, $t_c = 2,7\text{ cm}$, $\alpha = 52^\circ$.

Řešení

- a) *Rozbor.* Bod C leží současně na ramenu AX úhlu XAB o velikosti α a na kružnici $k(C_0, t_c)$, kde C_0 je střed strany AB .



- b) *Konstrukce.*

- AB ; $|AB| = c = 3,8 \text{ cm}$,
- $\sphericalangle XAB$ $|\sphericalangle XAB| = 52^\circ$,
- C_0 , kde C_0 je střed úsečky AB ,
- $k(C_0, 2,7 \text{ cm})$,
- C , kde C je průsečík polopřímky AX s kružnicí k ,
- $\triangle ABC$.

- c) *Diskuse a ověření.* Protože $t_c > \frac{1}{2}a$, má kružnice k a polopřímka AX právě jeden společný bod. Správným řešením je právě jeden trojúhelník v polorovině ABX .

Metodické poznámky

Pomocí těžnice lze sestrojit trojúhelník. Zadání odpovídá jednoduché konstrukční úloze ve vyšších ročnících ZŠ.

Úloha 3 (úroveň 3)

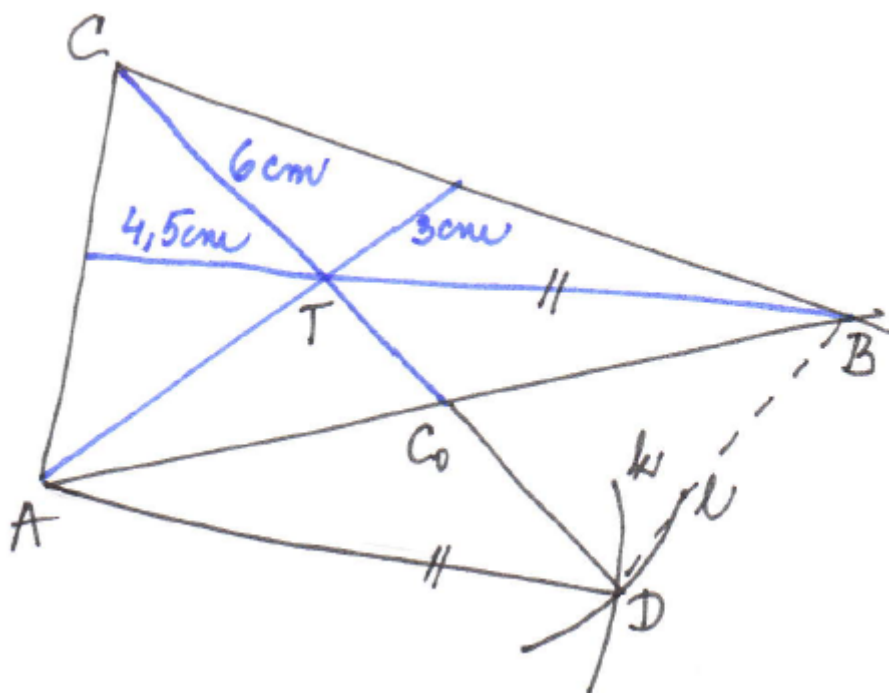
Předpokládané znalosti: vlastnosti těžnice trojúhelníku, matematická symbolika pro konstrukci rovinných útvarů, středová souměrnost

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno při obvyklém označení prvků trojúhelníku $t_a = 3 \text{ cm}$, $t_b = 4,5 \text{ cm}$, $t_c = 6 \text{ cm}$.

Řešení

- a) *Rozbor.* Budeme řešit užitím středové souměrnosti S v bodě C_0 a pomocného trojúhelníku ADT (podle věty (sss) viz obr.). Uvažujeme bod D souměrně sdružený

s těžištěm T trojúhelníku ABC podle středu C_0 strany AB . Potom pro délky stran trojúhelníku ADT platí $|AT| = \frac{2}{3}t_a$, $|AD| = \frac{2}{3}t_b$, $|TD| = \frac{2}{3}t_c$, čímž je tento trojúhelník jednoznačně určen.



b) *Konstrukce.*

- AT ; $|AT| = \frac{2}{3}t_a = 2\text{ cm}$,
- $k(A, r = \frac{2}{3}t_b = 3\text{ cm})$,
- $l(T, r = \frac{2}{3}t_c = 4\text{ cm})$,
- D , $D = k \cap l$,
- C , kde C je souměrně sdružený s bodem D podle středu T ,
- C_0 , kde C_0 je střed úsečky DT ,
- B , kde B je souměrně sdružený s bodem A podle středu C_0 ,
- $\triangle ABC$.

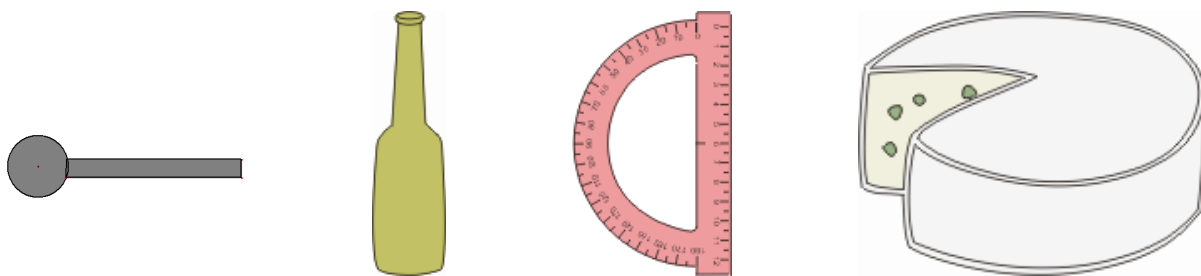
c) *Diskuse.* Úloha má jedno řešení.

Metodické poznámky

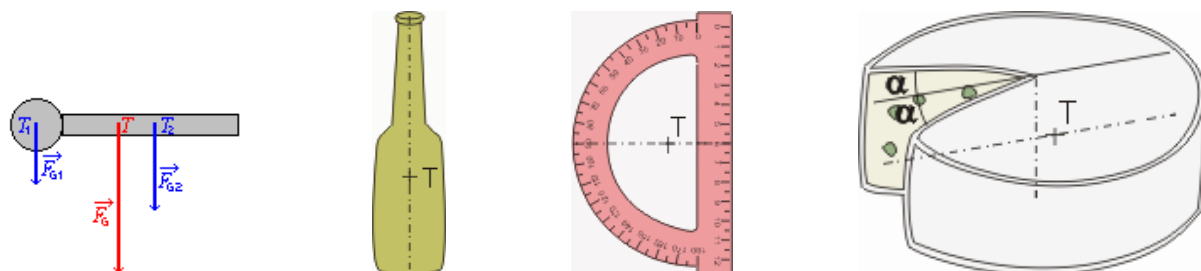
Konstrukce trojúhelníku pomocí tří těžnic vyžaduje nápad na využití středové souměrnosti a převod na konstrukci pomocí věty *sss*. Dále je dobré připomenout rozdělení těžnice v těžišti v poměru 1 : 2.

Doplnění.

Hledej těžiště různých těles.



Řešení.



Metodické poznámky

Doplnění je do materiálu zařazeno, aby si žáci uvědomili, že těžiště může měnit svou polohu. Kromě toho, těžiště nemusí být nutně uvnitř studovaného objektu.

Zdroj: archiv autora,

[1] Bernaciková, M., Kalichová, M., Beránková, L.: *Základy sportovní kineziologie*, [online]. [cit. 2012-10-25]. Dostupné http://is.muni.cz/do/1451/e-learning/kineziologie/elportal/pages/segmenty_teziste.html,

[2] *Mechanika tuhého tělesa*, In: *Fyzika.smolula.net*. [online]. © 2004 - 2012 [cit. 2012-10-25]. Dostupné z: <http://fyzika.smolula.net/maturitni-temata-3>,

[3] Těžiště, In: *O silách nejen na Rapa Nui*. [online]. M. Jílek © 22. 5. 2009 [cit. 2012-10-25]. Dostupné z: <http://fyzweb.cuni.cz/dilna/sily/tezist/tezist.htm>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: síť krychle a kvádrů, povrch krychle a kvádrů

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: síť krychle, vztah pro výpočet povrchu krychle

Načrtněte síť krychle s hranou délky 3 cm a vypočtěte obsah její stěny a povrch krychle.

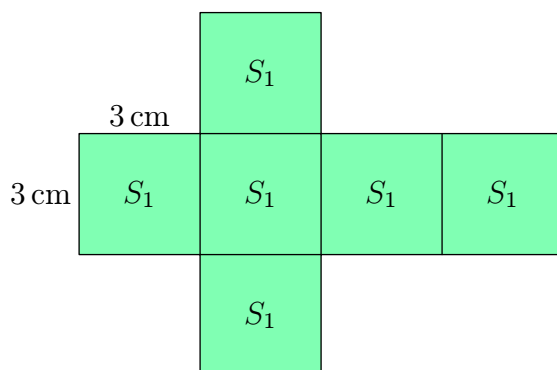
Řešení

Obsah jedné stěny krychle S_1 vypočteme jako obsah čtverce se stranou délky 3 cm, tedy

$$S_1 = a^2 = 3^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Povrch krychle je podle obrázku roven součtu obsahů všech jeho stěn, a protože má krychle 6 stěn, platí pro její povrch:

$$S = 6S_1 = 6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2.$$



Závěr. Obsah jedné stěny krychle je 9 cm^2 , povrch krychle je 54 cm^2 .

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu síť krychle a jeho souvislost s jejím povrchem. Síť tělesa lze využít při modelování těles, např. z lepenky nebo papíru.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: síť kvádrů, vztah pro výpočet povrchu kvádrů

Načrtněte síť kvádrů o rozměrech 2,5 cm, 4 cm a 6 cm a vypočtěte jeho povrch.

Řešení

Sít kváдру je tvořena třemi typy obdélníků. První typ obdélníku má strany délek 4 cm a 6 cm a jeho obsah S_1 vypočteme jako

$$S_1 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2.$$

Druhý typ obdélníku má strany délek 2,5 cm a 6 cm a jeho obsah S_2 vypočteme jako

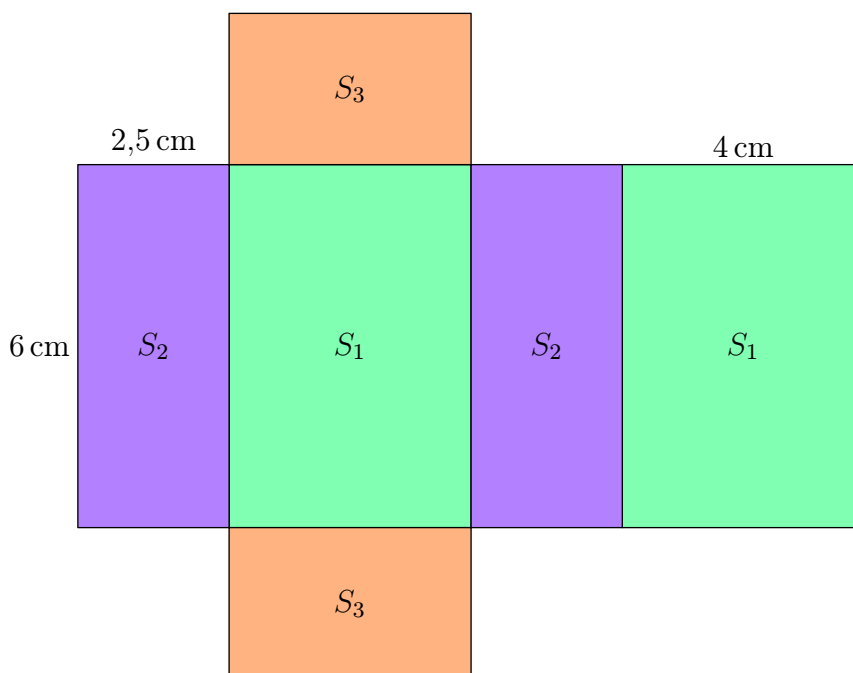
$$S_2 = 2,5 \cdot 6 = 15 \text{ cm}^2.$$

Třetí typ obdélníku má strany délek 2,5 cm a 4 cm a jeho obsah S_3 vypočteme jako

$$S_3 = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ cm}^2.$$

Povrch kváдру je roven součtu obsahů všech jeho stěn. Sít kváдру je tvořena třemi typy různých obdélníků a každý typ je zde obsažen dvakrát. Povrch kváдру tak vypočteme podle vztahu:

$$S = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 = 98 \text{ cm}^2.$$



Závěr. Povrch uvedeného kváдру je 98 cm².

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu sít kváдру a jeho souvislost s jeho povrchem. Sít tělesa lze využít při modelování těles, např. z lepenky nebo papíru.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: síť kvádrů, vztah pro výpočet povrchu kvádrů

Eliška si vyrábí vlastní kvarteto, a aby se jí jednotlivé obdélníkové karty o rozměrech 4 cm a 6 cm neztratily, sehnala si na ně krabičku, do které karty uloží. Krabička má tvar kvádrů, jehož podstava má vnější rozměry 4,2 cm a 6,2 cm a jeho výška je 3 cm. Krabička je bez horního víčka. Eliška si chce krabičku zvnějšku polepit barevným papírem. Postačí jí k polepení jeden list barevného papíru formátu A6? Rozměry takového papíru vyhledejte např. pomocí internetu.

Řešení (1)

Eliška bude postupovat tak, že z barevného papíru vystřihne celkem 5 obdélníků, kterými poté krabičku zvnějšku polepí. První typ obdélníku tvoří dno krabičky a bude obsažen pouze jednou. Má rozměry 4,2 cm a 6,2 cm a jeho obsah S_1 vypočteme jako

$$S_1 = 4,2 \cdot 6,2 = 26,04 \text{ cm}^2.$$

Druhý typ obdélníku má rozměry 3 cm a 4,2 cm a jeho obsah S_2 vypočteme jako

$$S_2 = 3 \cdot 4,2 = 12,6 \text{ cm}^2.$$

Třetí typ obdélníku má rozměry 3 cm a 6,2 cm a jeho obsah S_3 vypočteme jako

$$S_3 = 3 \cdot 6,2, 2S_3 = 18,6 \text{ cm}^2.$$

Množství potřebného papíru v cm^2 je rovno součtu obsahů jednotlivých obdélníků. Jeden je zde zastoupen pouze jedenkrát (dno) a dva typy (boční stěny) jsou zde obsaženy dvakrát. Množství potřebného papíru tedy vypočteme podle vztahu:

$$S = S_1 + 2 \cdot S_2 + 2 \cdot S_3 = 26,04 + 2 \cdot 12,6 + 2 \cdot 18,6 = 88,44 \text{ cm}^2.$$

Formát papíru A6 má rozměry 10,5 cm a 14,8 cm. Jeho obsah tedy spočteme jako obsah obdélníku

$$S_4 = 10,5 \cdot 14,8 = 155,4 \text{ cm}^2 > S.$$

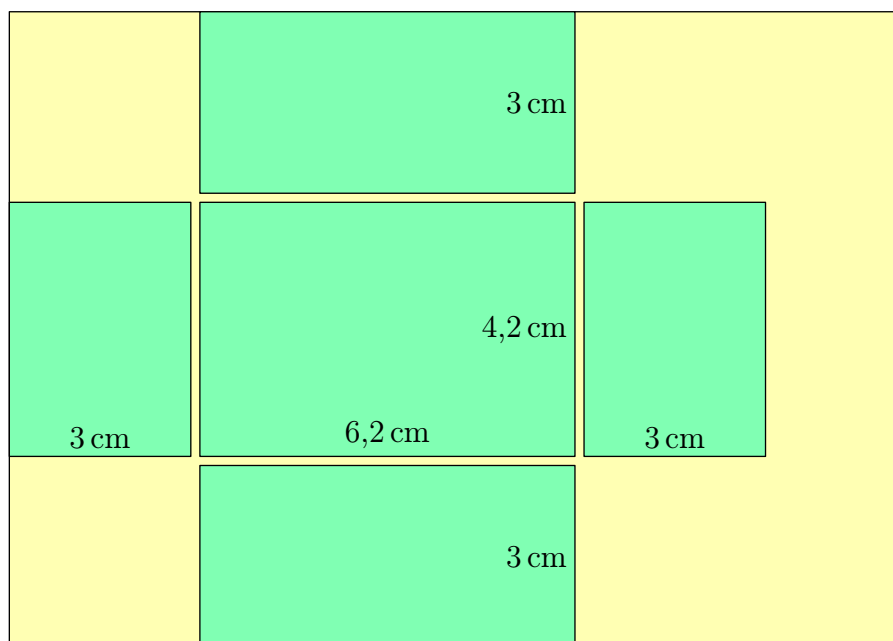
Řešení (2)

Eliška může také postupovat tak, že si zkusí rozmístit 5 obdélníků nutných k polepení na papír formátu A6.

Závěr. Obsah listu papíru formátu A6 je větší než celkové množství potřebného papíru k polepení krabičky, Eliška bude tedy jeden list stačit.

Metodické poznámky

Úloha ukazuje souvislost teoretického pojmu síť tělesa a praktického využití tohoto pojmu při vytváření modelů těles. Jsou předvedeny dva různé přístupy řešení. První způsob představuje exaktní řešení s využitím základních matematických pojmů, druhý způsob představuje pravděpodobněji postup v případě výroby krabičky dle zadání. S žáky můžeme potom vést diskusi, zda první postup zajistí, že každou stranu krabičky můžeme polepit jedním *celým* obdélníkem papíru [Ne, stačí uvažovat proužek papíru o rozměrech 3,7 cm a 42 cm se stejným obsahem jako A6.]



Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@org.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: povrch a objem kváдру

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: procentový počet, povrch kváдру

V továrně se balí léky do papírových krabiček tvaru kváдру. Krabičky jsou dlouhé 8 cm, široké 4 cm a vysoké 5 cm. Určete, jaká je denní spotřeba papíru v m^2 , když se za den vyrobí 2 200 kusů a počítá se navíc 20 % na lepení a záložky.

Řešení

Označme rozměry krabičky $a = 8 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, dále nechť povrch jedné krabičky je P_0 . Krabička je tvaru kváдру, pak platí

$$P_0 = 2(ab + ac + bc).$$

K výrobě jedné krabičky potřebujeme 20 % papíru navíc, pak spotřeba papíru na jednu krabičku je $P_1 = 1,2 \cdot P_0$. Pro celkovou denní spotřebu papíru P platí

$$P = 2\,200 \cdot P_1 = 2\,200 \cdot 1,2 \cdot 2(ab + ac + bc). \quad (1)$$

Po dosazení do vztahu (1) za $a = 8 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ dostaneme

$$P = 485\,760 \text{ cm}^2 \doteq 49 \text{ m}^2.$$

Závěr. Celková denní spotřeba papíru je po zaokrouhlení na jednotky 49 m^2 .

Metodické poznámky

Úloha je vhodná pro samostatnou práci, při řešení si žáci procvičí učivo: procentový počet, povrch kváдру. Úlohu je možné modifikovat a řešit jako reálný problém.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: objem kváдру, výpočet hmotnosti

Určete, jakou hmotnost má sklo ve výloze obchodu. Rozměry výlohy jsou 8,6 m a 5,5 m. Tloušťka použitého skla je 15 mm a hmotnost 1 cm^3 skla je 2,4 g.

Řešení

Rozměry skla převedeme na stejné jednotky a označíme $a = 8,6 \text{ m}$, $b = 5,5 \text{ m}$, $c = 0,015 \text{ m}$. Objem skla určíme dle známého vztahu pro určení objemu kváдру, tj.

$$V = abc. \quad (2)$$

Po dosazení do vztahu (2) za $a = 8,6 \text{ m}$, $b = 5,5 \text{ m}$, $c = 0,015 \text{ m}$ dostaneme

$$V = 0,7095 \text{ m}^3.$$

Dále víme, že 1 cm^3 skla má hmotnost $2,4 \text{ g}$. Převedeme objem skla na centimetry krychlové. Pro celkovou hmotnost skla m ve výloze zřejmě platí

$$m = V \cdot \frac{2,4 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = 1\,702\,800 \text{ g} \doteq 1,7 \text{ t}.$$

Závěr. Sklo ve výloze má hmotnost po zaokrouhlení $1,7 \text{ t}$.

Metodické poznámky

Slovní úloha zaměřená na určení hmotnosti kvádru, je-li zadána hustota materiálu. Při řešení úlohy je možné diskutovat odlišnost fyzikálního postupu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem kvádru (pravidelného čtyřbokého hranolu)

Maminka koupila zeminu do pěti stejných truhlíků. Každý dřevěný truhlík je tvaru kvádru a tloušťka dřeva je 1 cm . Syn Ondřej změřil mamince vnější rozměry truhlíků: délka 112 cm , šířka 32 cm a výška 31 cm . V obchodě měli zeminu po 50 l za 125 Kč . Kolik balení musela koupit a kolik za ně zaplatila?



Řešení

Označme vnější rozměry truhlíku $a_0 = 112 \text{ cm}$, $b_0 = 32 \text{ cm}$, $c_0 = 31 \text{ cm}$ a tloušťku dřeva $d = 1 \text{ cm}$. Pro vnitřní rozměry truhlíku platí

$$a = a_0 - 2d = 110 \text{ cm},$$

$$b = b_0 - 2d = 30 \text{ cm},$$

$$c = c_0 - d = 30 \text{ cm}.$$

Část truhlíku, kterou maminka vyplní zeminou je tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož rozměry jsou $a \times b \times b$. Objem vnitřní části truhlíku V_1 určíme dle známého vztahu pro určení objemu pravidelného čtyřbokého hranolu, tj.

$$V_1 = ab^2.$$

Po dosazení do vztahu za $a = 110$ cm, $b = 30$ cm dostaneme

$$V_1 = 99\,000\text{ cm}^3 = 99\text{ dm}^3.$$

Pro celkový objem zeminy V , kterou maminka potřebuje, platí

$$V = 5V_1 = 5 \cdot 99 = 495\text{ dm}^3.$$

Jedno balení obsahuje 50 l zeminy a stojí 125 Kč, maminka tedy musela celkem koupit 10 balení, za které celkem zaplatila 1 250 Kč.

Závěr. Maminka koupila celkem 10 balení zeminy, za které zaplatila 1 250 Kč.

Metodické poznámky

Úloha vychází z reálné situace, při jejímž řešení je nutné uvažovat vnitřní objem truhlíku. Žáci se seznámí s rozdílem mezi kvádrem a pravidelným čtyřbokým hranolem. Úlohu je možné zadat pro samostatnou práci žáků a následně diskutovat odlišné přístupy k řešení.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: hranoly*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál: http://www.upetrusek.cz/data/product/1050_275.jpg

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

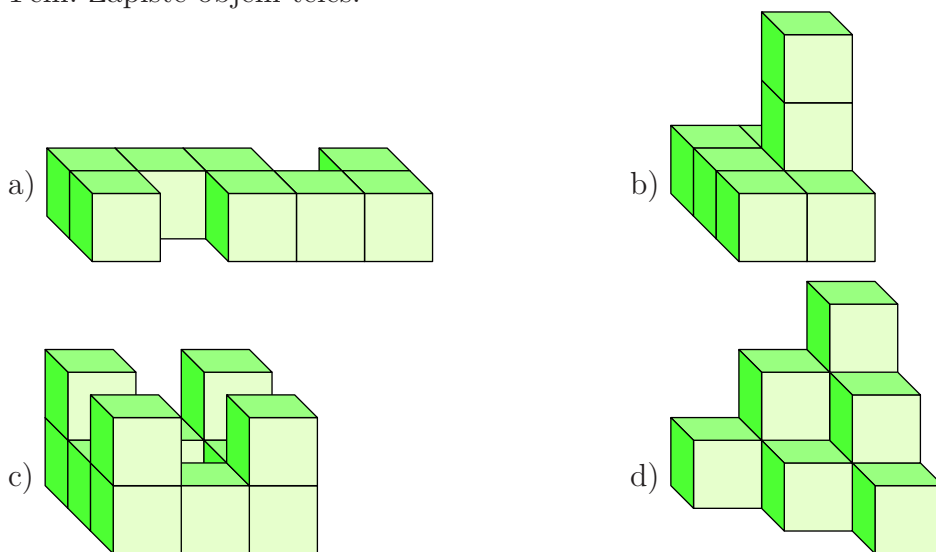
Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem krychle a kvádrů

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: objem krychle, objem tělesa

Tělesa na obrázku jsou postavena z dřevěných kostiček tvaru krychle o délce hrany 1 cm. Zapište objem těles.



Řešení

Krychlička o hraně 1 cm je tzv. jednotková krychle a má objem 1 cm^3 . Objem tělesa složeného z jednotkových krychlí je určen jejich počtem.

- a) Těleso je složeno z 8 shodných krychlí. Každá krychle s hranou délky 1 cm má objem 1 cm^3 . Těleso jako celek má tedy objem 8 cm^3 .
- b) Těleso je složeno z 8 shodných krychlí. Ve spodní vrstvě je celkem 6 krychlí, ve druhé vrstvě 1 krychle a ve třetí také 1 krychle. Každá krychle s hranou délky 1 cm má objem 1 cm^3 . Těleso jako celek má tedy objem 8 cm^3 .
- c) Těleso je složeno z 12 shodných krychlí. Ve spodní vrstvě je celkem 8 krychlí a ve druhé vrstvě 4 krychle. Každá krychle s hranou délky 1 cm má objem 1 cm^3 . Těleso jako celek má tedy objem 12 cm^3 .
- d) Těleso je složeno z 10 shodných krychlí. Ve spodní vrstvě je celkem 6 krychlí, ve druhé vrstvě 3 krychle a ve třetí vrstvě 1 krychle. Každá krychle s hranou délky 1 cm má objem 1 cm^3 . Těleso jako celek má tedy objem 10 cm^3 .

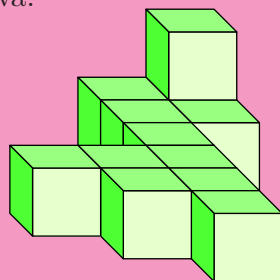
Závěr. Objemy jednotlivých těles jsou postupně 8 cm^3 , 8 cm^3 , 12 cm^3 a 10 cm^3 .

Metodické poznámky

Úloha je míněna jako propedeutika pojmu objem tělesa, graduje i obtížnost jednotlivých částí úlohy.

U úlohy d) lze uvést také alternativní řešení, pokud připustíme, že se neomezujeme pouze na tělesa, jejich jednotlivé vrstvy tvoříme ve čtverci 3×3 . Za těleso na obrázku lze postupně poskládat až 6 krychlí navíc, takže těleso může mít také objem 11 cm^3 , 12 cm^3 , 13 cm^3 , 14 cm^3 , 15 cm^3 , 16 cm^3 .

Řešení je patrné z následujícího obrázku, na kterém je z původní sestavy odstraněna druhá a třetí vrstva.

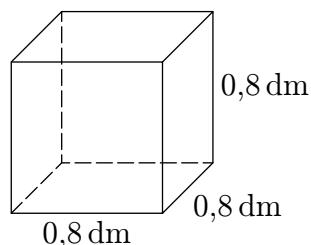


Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: objem krychle, vztah pro výpočet objemu krychle

Vypočítejte objem krychle s hranou délky $0,8 \text{ dm}$ a vyjádřete jej v mililitrech.

Řešení



Označme $a = 0,8 \text{ dm}$ délku hrany krychle. Objem krychle vypočteme podle vztahu

$$V = a \cdot a \cdot a.$$

Po dosazení délky hrany krychle

$$V = a \cdot a \cdot a = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512 \text{ dm}^3.$$

Objem krychle postupně převedeme na litry a mililitry takto

$$V = 0,512 \text{ dm}^3 = 0,512 \text{ l} = 512 \text{ ml}.$$

Závěr. Objem krychle s hranou délky $0,8 \text{ dm}$ je 512 ml .

Metodické poznámky

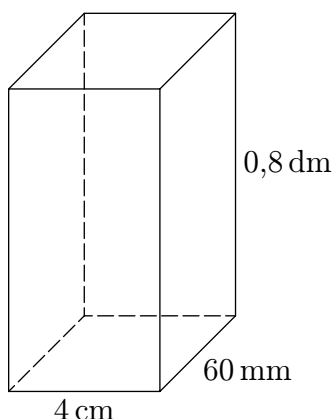
Úloha je zaměřena na využití vztahu pro výpočet objemu krychle a na opakování převodů mezi jednotkami objemu.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: objem kváдру, vztah pro výpočet objemu kváдру

Vypočítejte objem kváдру o rozměrech 4 cm, 60 mm a 0,8 dm a vyjádřete jej v mililitrech.

Řešení



Rozměry kváдру musíme nejdříve vyjádřit ve stejných jednotkách. V tomto případě bude nejvýhodnější převést všechny rozměry na centimetry.

$$a = 4 \text{ cm}, \quad b = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}, \quad c = 0,8 \text{ dm} = 8 \text{ cm}.$$

Objem kváдру vypočteme podle vztahu:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Po dosazení délek hran kváдру

$$V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^3.$$

Objem kváдру převedeme na mililitry takto

$$V = 192 \text{ cm}^3 = 192 \text{ ml}.$$

Závěr. Objem kváдру o rozměrech 4 cm, 60 mm a 0,8 dm je 192 ml.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na využití vztahu pro výpočet objemu kváдру a na opakování převodů mezi jednotkami objemu.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@rg.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: kvádr

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: znalost vzorce pro výpočet povrchu a objemu kvádrů, převody jednotek

Vypočítejte povrch a objem kvádrů s hranami délky $a = 2$ dm, $b = 30$ cm a $c = 0,7$ m.

Řešení

Platí $b = 30$ cm = 3 dm, $c = 0,7$ m = 7 dm. Napíšeme vzorec pro výpočet povrchu kvádrů, dosadíme a vypočítáme

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7) = 82 \text{ dm}^2.$$

Obdobně pro objem platí

$$V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \text{ dm}^3.$$

Závěr. Povrch kvádrů je 82 dm^2 , objem kvádrů je 42 dm^3 .

Metodické poznámky

Jedná se o základní úlohu – výpočet povrchu a objemu kvádrů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet povrchu kvádrů, poměr

Vypočítejte délky tří různých hran kvádrů, jejichž rozměry jsou v poměru $4 : 3 : 2$, když víte, že povrch kvádrů je $S = 1\,300 \text{ cm}^2$.

Řešení

Označme x délku jednoho dílku při rozdělení rozměrů hran kvádrů v daném poměru, pak

$$a = 4 \cdot x, \quad b = 3 \cdot x, \quad c = 2 \cdot x.$$

Dosadíme do známého vzorce pro výpočet povrchu kvádrů.

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c), \\ 1\,300 &= 2 \cdot (4x \cdot 3x + 4x \cdot 2x + 3x \cdot 2x), \\ x &= 5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Vypočítali jsme velikost jednoho dílku, nyní zjistíme velikosti jednotlivých hran

$$a = 4 \cdot 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}, \quad b = 3 \cdot 5 \text{ cm} = 15 \text{ cm}, \quad c = 2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$

Závěr. Kvádr má rozměry 20 cm, 15 cm, 10 cm.

Metodické poznámky

Tato úloha nabízí jiný pohled na výpočet povrchu kvádrů pomocí poměru, je možné řešit obdobnou úlohu, zadána bude hodnota objemu kvádrů a úkolem bude určit rozměry daného tělesa.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: objem kvádrů, výpočet hmotnosti tělesa, je-li zadána hustota tělesa a objem, převody jednotek

Vypočítej hmotnost dřevěného kvádrů s délkou $a = 4,5$ dm, šířkou $b = 35$ cm a výškou $c = 0,3$ m.

Řešení

Převědeme zadané rozměry na stejné jednotky – je vhodné na metry.

$$a = 0,45 \text{ m}, \quad b = 0,35 \text{ m}, \quad c = 0,3 \text{ m}.$$

Dosadíme do vztahu pro výpočet objemu kvádrů

$$V = a \cdot b \cdot c = 0,45 \cdot 0,35 \cdot 0,3 = 0,04725 \text{ m}^3.$$

Objem dřevěného kvádrů je $0,04725 \text{ m}^3$.

Vyhledáme hustotu dřeva v MFCH tabulkách pro ZŠ v tabulce F 10 „Hustota látky“

$$\rho = 700 \text{ kg/m}^3 \quad - \quad \text{dřevo dubové.}$$

Použijeme známý vztah pro výpočet hmotnosti z hodin fyziky, kde m je hmotnost tělesa a ρ je hustota látky

$$m = V \cdot \rho = 0,04725 \cdot 700 = 33,075 \text{ kg}.$$

Závěr. Hmotnost dřevěného hranolu je 33,075 kg.

Metodické poznámky

Jedná se o úlohu, která využívá znalosti z fyziky, vzhledem k tomu, že budeme dále pracovat s hustotou, je výhodné převést zadané veličiny na metry.

Zdroj: archiv autora,

Kolářová, R. *Tabulky pro základní školu*. Praha: Prometheus, 1994.

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: kvádr, objem kvádrů

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: povrch, objem kvádrů, poměr

Vypočítejte povrch a objem kvádrů, jestliže délky jeho hran jsou v poměru $a : b : c = 2 : 3 : 4$, součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu je 8,1 m.

Řešení

Délky hran jsou v poměru $a : b : c = 2 : 3 : 4$, rozdělíme součet délek těchto hran na 9 dílků, jeden dílek má tedy délku 0,9 m. Vypočítáme velikosti jednotlivých hran

$$a = 2 \cdot 0,9 = 1,8 \text{ m}, \quad b = 3 \cdot 0,9 = 2,7 \text{ m}, \quad c = 4 \cdot 0,9 = 3,6 \text{ m}.$$

Dosadíme do vztahů pro výpočet objemu a povrchu kvádrů

$$V = a \cdot b \cdot c = 1,8 \cdot 2,7 \cdot 3,6 = 17,496 \text{ m}^3,$$

$$S = 2(ab + bc + ca) = 42,12 \text{ m}^2.$$

Závěr. Objem daného kvádrů je $17,496 \text{ m}^3$, jeho povrch je $42,12 \text{ m}^2$.

Metodické poznámky

Při řešení dané úlohy žáci pracují s poměrem, dělí součet délek hran kvádrů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kvádr, objem, převody jednotek, procenta

Nádrž na pohonné hmoty má tvar kvádrů s rozměry dna 12 m a 9 m. Potrubím zatím přiteklo 648 hl benzínu. Nádrž je naplněna na 20 % svého objemu.

- a) Jaká je výška nádrže?
- b) Za jak dlouho se nádrž naplní, přitéká-li každou sekundu 80 litrů benzínu?

Řešení

Jestliže potrubím přiteklo 648 hl benzínu a nádrž je naplněna z 20 % svého objemu, pak k naplnění celé nádrže je potřeba $5 \cdot 648 \text{ hl} = 5 \cdot 64,8 \text{ m}^3 = 324 \text{ m}^3$.

- a) K určení výšky nádrže využijeme vzorce pro výpočet objemu kvádrů se stranami a, b, c .

$$324 \text{ m}^3 = V = abc = 12 \cdot 9 \cdot c \text{ m}^3 \Rightarrow c = 3 \text{ m}.$$

- b) Přitéká 80 litrů za sekundu, to je $4,8 \text{ m}^3$ za minutu. V nádrži je $64,8 \text{ m}^3$, zbývá napustit $259,2 \text{ m}^3$. Tedy

$$259,2 \text{ m}^3 : 4,8 \text{ m}^3/\text{min} = 54 \text{ min}.$$

Závěr. Nádrž je vysoká 3 m, naplní se za 54 minut.

Metodické poznámky

Žáci často chybují v určení množství benzínu, které přitéká za 1 minutu. Procvičení výpočtu procent, propedeutika pojmu funkce.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kvádr, krychle, hydrostatická tlaková síla

Kvádr se dvěma hranami délek $a = 9 \text{ cm}$ a $b = 3 \text{ cm}$ má tentýž objem jako krychle o hraně $a = 9 \text{ cm}$. Vypočtete třetí rozměr kvádru. Do jedné třetiny kvádru nalijeme vodu, určete výpočtem velikost hydrostatické tlakové síly působící na dno nádoby.

Řešení

Vypočítáme objem krychle

$$V_{\text{krychle}} = a^3 = 9^3 = 729 \text{ cm}^3.$$

Pomocí vztahu pro výpočet objemu kvádru s hranami délek a , b , c dostaneme

$$V_{\text{kvádru}} = 729 = abc.$$

Odtud určíme velikost třetí hrany $c = \frac{729}{27} = 27 \text{ cm}$.

Pro výpočet hydrostatické tlakové síly použijeme vztah

$$F = S \cdot h \cdot \rho \cdot g,$$

kde S je obsah plochy, na níž síla působí, h je výška hladiny kapaliny, ρ je hustota kapaliny a g je tíhové zrychlení. Vypočítáme obsah dna kvádru

$$S = a \cdot b = 9 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 27 \text{ cm}^2 = 0,0027 \text{ m}^2,$$

Do jedné třetiny kvádru nalijeme vodu, výška vody je $h = 9 \text{ cm} = 0,09 \text{ m}$. Vyhledáme hustotu vody v MFCH tabulkách pro ZŠ v tabulce F 10 „Hustota látky“ $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ a dosadíme do výše uvedeného vztahu

$$F = 0,0027 \cdot 0,09 \cdot 1000 \cdot 9,81 \doteq 2,43 \text{ N}.$$

Závěr. Výška kvádru je 27 cm, velikost hydrostatické tlakové síly působící na dno nádoby je přibližně 2,43 N.

Metodické poznámky

V této úloze žáci používají vztah pro výpočet objemu krychle a kvádrů, v druhé části úlohy uplatní své vědomosti z výuky fyziky z učiva o kapalinách.

Zdroj: archiv autora,

Kolářová, R. *Tabulky pro základní školu*. Praha: Prometheus, 1994.

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: pravidelný čtyřboký hranol, kvádr, podstava, plášť hranolu

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a objemu, objem a povrch hranolu, procenta

V papírové krabici tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož podstavná hrana má délku 35 mm a výška krabice je 12 cm, je lahvička obsahující 125 ml voňavky. Kolik procent objemu krabice tvoří voňavka?

Řešení

Objem pravidelného čtyřbokého hranolu vypočítáme podle vzorce $V = S_p v_h$, kde S_p je obsah podstavy a v_h je výška hranolu. Známe délku podstavné hrany (což je strana čtverce) $a = 35 \text{ mm} = 3,5 \text{ cm}$ a výšku hranolu $v_h = 12 \text{ cm}$. Podstavou je čtverec, takže obsah podstavy

$$S_p = a^2 = 3,5^2 = 12,25 \text{ cm}^2.$$

Objem krabice je $V = 12,25 \cdot 12 = 147 \text{ cm}^3$. Voňavka má objem $125 \text{ ml} = 125 \text{ cm}^3$.

Pokud objem krabice 147 cm^3 představuje 100 %, potom 125 cm^3 představuje

$$\frac{100 \cdot 125}{147} \doteq 81,63 \text{ \%}.$$

Závěr. Voňavka tvoří přibližně 81,63 % objemu krabice.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže výpočet počtu procent.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a objemu, objem a povrch hranolu, mocniny, vyjádření neznámé ze vzorce

Kolik hektolitrů vody se vejde do nádrže tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu, jehož dno a boční stěna mají stejný obsah, který je roven $2,25 \text{ m}^2$.

Řešení

Je nutné si uvědomit, že má-li boční stěna i dno stejný obsah, má nádrž tvar krychle. Délku hrany krychle vypočítáme z obsahu stěny krychle, která je $2,25 \text{ m}^2$.

Obsah stěny je obsah čtverce, který počítáme podle vzorce

$$S = a^2 = 2,25 \quad \Rightarrow \quad a = 1,5 \text{ m},$$

kde a je délka strany čtverce. Protože máme vypočítat, kolik hektolitrů vody se vejde do nádrže, vypočítáme objem krychle podle vzorce

$$V = a^3 = 1,5^3 = 3,375 \text{ m}^3 = 33,75 \text{ hl}.$$

Závěr. Do nádrže se vejde 33,75 hl vody.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit, že nádrž má tvar krychle.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: povrch hranolu, mocniny, vyjádření neznámé ze vzorce, zlomky

Obsah jedné podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu je 36 cm^2 . Výška hranolu je rovna čtyřem pětinám délky podstavné hrany. Vypočítej jeho povrch.

Řešení

Povrch pravidelného čtyřbokého hranolu vypočítáme podle vzorce $S = 2S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} je obsah pláště.

Známe obsah podstavy $S_p = 36 \text{ cm}^2$. Obsah pláště můžeme vypočítat podle vzorce $S_{pl} = o_p v_h$, kde o_p je obvod podstavy hranolu a v_h je výška hranolu. Podstava hranolu má tvar čtverce, vypočítáme tedy délku strany čtverce, obdobně jako v předchozí úloze

$$S = a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}.$$

Délka podstavné hrany je 6 cm a protože výška hranolu je rovna $\frac{4}{5}$ délky podstavné hrany, je $v_h = \frac{4}{5} \cdot 6 = 4,8 \text{ cm}$ a obvod podstavy je $o = 4 \cdot a = 24 \text{ cm}$.

Nyní už můžeme vypočítat povrch hranolu

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot S_p + o_p \cdot v_h = 2 \cdot 36 + 24 \cdot 4,8 = 72 + 115,2 = 187,2 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Povrch hranolu je $187,2 \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit, že nejdříve je nutné vypočítat délku podstavné hrany a výšku hranolu. Někteří mohou mít problém s postupným dosazováním pro výpočet obsahu pláště hranolu.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru kosočtverce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru kosočtverce, obsah pláště

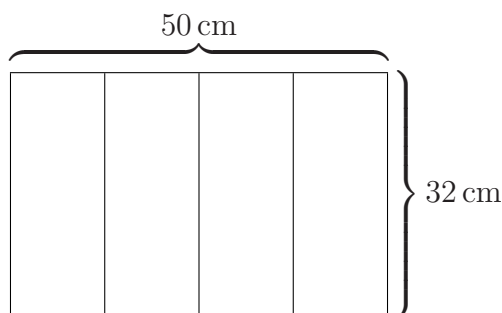
Podstava kolmého čtyřbokého hranolu je kosočtverec. Obsah pláště je 16 dm^2 a výška 32 cm . Vypočítejte délku hrany podstavy.

Řešení

Podle vztahu pro výpočet obsahu pláště S_{pl} určíme obvod podstavy o , známe-li výšku hranolu v_h . Ze zadání platí $S_{pl} = 16 \text{ dm}^2 = 1\,600 \text{ cm}^2$, $v_h = 32 \text{ cm}$. Tedy

$$S_{pl} = o \cdot v_h, \quad \Rightarrow \quad o = S_{pl} : v_h = 1\,600 : 32 = 50 \text{ cm}$$

a vypočítáme délku hrany podstavy $a = o : 4 = 50 : 4 = 12,5 \text{ cm}$.



Závěr. Hrana podstavy čtyřbokého hranolu je dlouhá $12,5 \text{ cm}$.

Metodické poznámky

Seznámení s daným mnohostěnem. Pro snadnější řešení dané úlohy využíváme náčrtky, případně pracujeme s modelem tělesa.

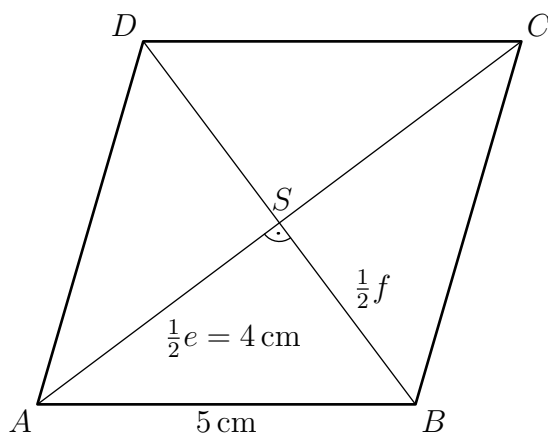
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru kosočtverce, povrch hranolu, Pythagorova věta, procenta

Papírem chceme polepit krabičku tvaru čtyřbokého hranolu s podstavou tvaru kosočtverce, přičemž délka jeho strany je 5 cm a jedné úhlopříčky 8 cm . Výška krabičky je 15 cm . Kolik dm^2 papíru budeme potřebovat, jestliže počítáme na překrytí a spoje 15% .

Řešení

Podstavou hranolu je kosočtverec, vypočítáme nejprve délku druhé úhlopříčky pomocí Pythagorovy věty – strana kosočtverce je dlouhá 5 cm, jedna úhlopříčka 8 cm.



Dle obrázku platí

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2, \\ 5^2 &= 4^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2, \\ f &= 6 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Dále platí:

- obsah podstavy je $S_p = \frac{1}{2}ef = 24 \text{ cm}^2$;
- obsah pláště je $S_{pl} = 4 \cdot |AB| \cdot v_h = 4 \cdot 5 \cdot 15 = 300 \text{ cm}^2$, kde v_h značí výšku hranolu.

Dosadíme do vztahu pro výpočet povrchu hranolu

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 48 + 300 = 348 \text{ cm}^2.$$

Vzhledem k faktu, že potřebujeme 15 % papíru navíc na překrytí, je nutné použít celkem $115 \% = 1,15$ povrchu krabíčky.

$$1,15 \cdot 348 \text{ cm}^2 = 400,2 \text{ cm}^2 = 4,002 \text{ dm}^2.$$

Závěr. Na polepení krabíčky bude potřeba přibližně 4 dm^2 papíru.

Metodické poznámky

Jedná se o komplexnější úlohu, problémy činí přechod s porozuměním zadání úlohy (čtenářská gramotnost).

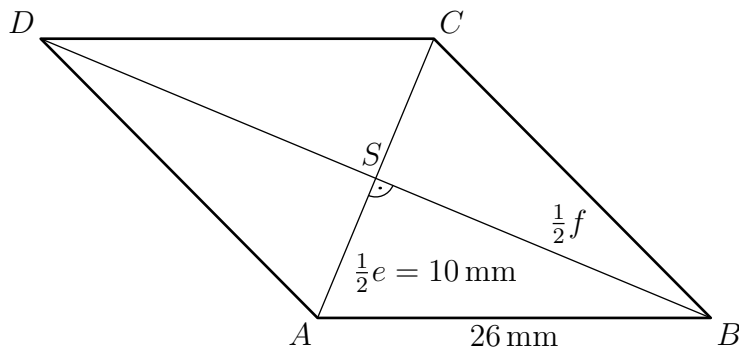
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru kosočtverce, objem hranolu, poměr, Pythagorova věta

Skleněný model krystalu má tvar kolmého hranolu s podstavou tvaru kosočtverce, přičemž jedna úhlopříčka podstavy má délku 20 mm a hrana podstavy má délku 26 mm. Poměr hrany podstavy a výšky hranolu je 2 : 3. Určete hmotnost modelu.

Řešení

Pomocí Pythagorovy věty určíme velikost druhé úhlopříčky (viz obr.)



$$|AB|^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

$$26^2 = 10^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

$$f = 48 \text{ mm}.$$

Podle zadání určíme velikost výšky hranolu v_h , víme-li, že poměr hrany podstavy a výšky je 2 : 3.

$$v_h = \frac{26}{2} \cdot 3 = 39 \text{ mm}.$$

Vypočítáme objem hranolu V , kde S_p značí obsah podstavy.

$$V = S_p \cdot v_h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot v_h = 18\,720 \text{ mm}^3 = 0,000\,018\,720 \text{ m}^3.$$

Hustota tabulového skla je $2\,400 \text{ kg/m}^3$, proto pro hmotnost modelu m platí

$$m = 0,000\,018\,720 \text{ m}^3 \cdot 2\,400 \text{ kg/m}^3 = 0,044\,928 \text{ kg}.$$

Závěr. Skleněné model krystalu má hmotnost přibližně 45 g.

Metodické poznámky

Aplikační úloha na určení hmotnosti. Pro správné řešení dané úlohy je nutné provést převody jednotek.

Zdroj: archiv autora,

Kolářová, R. *Tabulky pro základní školu*. Praha: Prometheus, 1994.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: pravidelný trojboký hranol

Úloha 1 (úroveň 2)

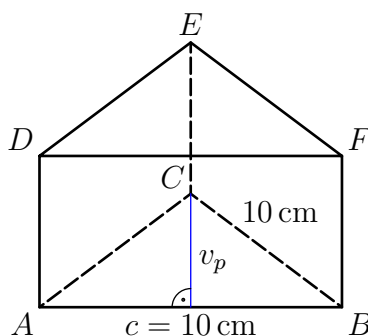
Předpokládané znalosti: rovnostranný trojúhelník, Pythagorova věta, objem a povrch hranolu

Je dán kolmý hranol s podstavou tvaru rovnostranného trojúhelníku (pravidelný trojboký hranol) o straně $a = 10$ cm. Určete jeho objem a povrch, je-li obsah podstavy roven obsahu jedné pobočné stěny hranolu.

Řešení

Nejprve vypočítáme obsah podstavy, pomocí Pythagorovy věty určíme velikost výšky podstavy v_p .

$$5^2 + v_p^2 = 10^2 \Rightarrow v_p^2 = 75. \Rightarrow v_p \doteq 8,66 \text{ cm.}$$



Obsah podstavy tak je

$$S_p = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2.$$

Obsah boční stěny hranolu je

$$S = a \cdot v \doteq 43,3 \text{ cm}^2,$$

výška hranolu v je

$$v = \frac{S}{a} \doteq \frac{43,3}{10} \doteq 4,33 \text{ cm}$$

a jeho objem je

$$V = S_{ABC} \cdot v \doteq 43,3 \cdot 4,33 \doteq 187,5 \text{ cm}^3.$$

Nyní určíme povrch hranolu. Označme obsah podstavy S_p a obsah pláště S_{pl} , pak

$$S = 2S_p + S_{pl} \doteq 2 \cdot 43,3 + 30 \cdot 4,33 \doteq 216,5 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Objem daného trojbokého hranolu s podstavou rovnostranného trojúhelníku je $187,5 \text{ cm}^3$, jeho povrch má velikost $216,5 \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Jedná se o aplikační úlohu, řešení lze usnadnit vhodnými náčrtky. Nabízí se i jiné řešení dané úlohy $S = 5 \cdot 43,3 = 216,5 \text{ cm}^2$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: trojboký kolmý hranol s podstavou rovnostranného trojúhelníku, Pythagorova věta, převody jednotek

Podstavou trojbokého kolmého hranolu je rovnostranný trojúhelník o straně $a = 8 \text{ cm}$. Výška hranolu je rovna polovině obvodu podstavy. Vypočítej objem a povrch tohoto trojbokého hranolu. Vypočítej velikost vztlakové síly působící na hranol ve vodě a v glycerolu v případě, že je hranol zcela ponořen. Vyslov závěr.

Řešení

Náčrtněme rovnostranný trojúhelník o straně $a = 8 \text{ cm}$. Velikost výšky v podstavě se určí pomocí Pythagorovy věty

$$v_p^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow v_p \doteq 6,93 \text{ cm},$$

odkud dopočítáme obsah podstavy

$$S_p \doteq \frac{8 \cdot 6,93}{2} \doteq 27,72 \text{ cm}^2.$$

Výška hranolu v_h podle zadání je rovna polovině obvodu podstavy, kde obvod podstavy $o = 24 \text{ cm}$, tedy $v_h = 12 \text{ cm}$. Obsah pláště činí $S_{pl} = o \cdot v_h = 24 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^2$. Celkem pro povrch S a objem V hranolu platí

$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 27,72 + 288 = 343,44 \text{ cm}^2;$$

$$V = S_p \cdot v_h = 27,72 \cdot 12 = 332,64 \text{ cm}^3 = 0,000\,332\,64 \text{ m}^3.$$

Vypočítáme velikost vztlakové síly F_{vz} působící na trojboký kolmý hranol, který je zcela ponořen ve vodě a v glycerolu. Využijeme vztah známý z hodin fyziky

$$F = V \cdot \rho \cdot g,$$

kde V je objem ponořené části tělesa, ρ je hustota kapaliny a g je tíhové zrychlení. Vztlaková síla:

a) ve vodě

$$F_v = 0,000\,332\,64 \cdot 1\,000 \cdot 9,81 \doteq 3,26 \text{ N směrem vzhůru},$$

b) v glycerolu

$$F_g = 0,000\,332\,16 \cdot 1\,260 \cdot 9,81 \doteq 4,11 \text{ N směrem vzhůru}.$$

Závěr. Na trojboký kolmý hranol působí vztlaková síla směrem vzhůru, její velikost závisí na objemu a na kapalině. Je-li těleso ponořeno v kapalině o větší hustotě, působí větší vztlaková síla.

Metodické poznámky

Jedná se o aplikační úlohu, při které žáci využívají náročnější vztahy z učiva fyziky, které pro jistotu se žáky zopakujeme. Vhodná úloha na posílení mezipředmětových vazeb mezi matematikou a fyzikou.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravidelný trojboký hranol, objem, hustota látky, Pythagorova věta

Ze dřeva je vyroben pravidelný trojboký hranol. Délka hrany podstavy je 6 cm. Hmotnost hranolu je 156 g a hustota dřeva je 500 kg/m^3 . Určete jeho výšku.

Řešení

Podstavou pravidelného trojbokého hranolu je rovnostranný trojúhelník. Výšku podstavy určíme výpočtem pomocí Pythagorovy věty

$$v_p^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Rightarrow \quad v_p = 5,2 \text{ cm},$$

kteřou dosadíme do vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníkové podstavy

$$S_p = \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6 \text{ cm}^2.$$

Objem V pravidelného dřevěného trojbokého hranolu lze vyjádřit ze vztahu pro výpočet hustoty ρ

$$V = \frac{m}{\rho}, \quad \text{kde } m \text{ značí hmotnost tělesa}$$

a také ze vztahu

$$V = S_p \cdot v_h, \quad \text{kde } v_h \text{ značí výšku hranolu.}$$

Odtud

$$v_h = \frac{m}{\rho \cdot S_p} = \frac{156}{0,5 \cdot 15,6} = 20 \text{ cm},$$

kde jsme hustotu dřeva ρ převedli na jednotky g/cm^3 .

Závěr. Výška hranolu je 20 cm.

Metodické poznámky

Žáky upozorníme na nutnost počítat ve stejných jednotkách, převedeme hustotu látky na g/cm^3 . Opět se posilují mezipředmětové vazby M a F.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; sschubertova@email.cz

Gradované úlohy

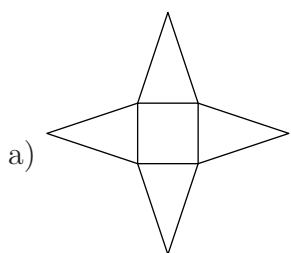
Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: síť a povrch jehlanu

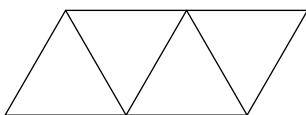
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: síť pravidelného jehlanu

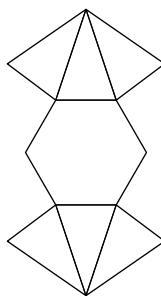
Na následujících obrázcích jsou znázorněny sítě některých pravidelných jehlanů. Načrtněte tyto jehlany a pojmenujte je.



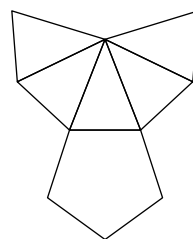
b)



c)

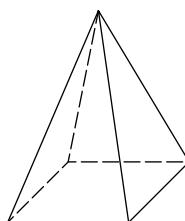


d)

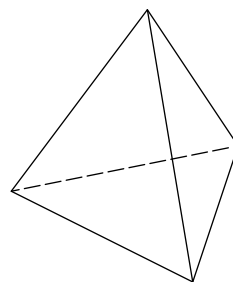


Řešení

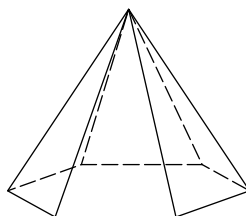
a) pravidelný čtyřboký jehlan



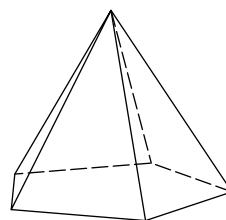
b) pravidelný trojboký jehlan (čtyřstěn)



c) pravidelný šestiboký jehlan



d) pravidelný pětiboký jehlan



Metodické poznámky

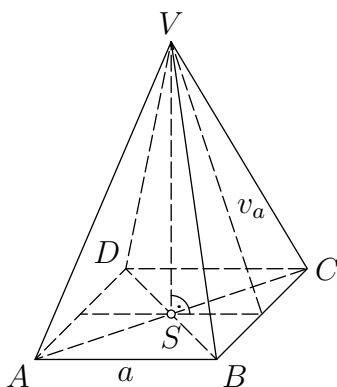
Úloha je zaměřena na pochopení pojmu síť a povrch tělesa. Žáci procvičí prostorovou představivost a současně schopnost znázornit těleso ve volném rovnoběžném promítání. Řešení úlohy je vhodné podpořit výrobou papírových modelů uvedených těles.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: pravidelný čtyřboký jehlan, síť jehlanu, povrch jehlanu, vztah pro výpočet povrchu jehlanu

Vypočítejte povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavná hrana má délku 4 cm a výška stěny má délku 10 cm.

Řešení



Označme $a = 4$ cm délku hrany podstavy jehlanu a $v_a = 10$ cm velikost výšky jeho stěny. Obsah podstavy vypočteme jako obsah čtverce se stranou délky a .

$$S_p = a^2 = 4^2, \quad S_p = 16 \text{ cm}^2.$$

Plášť je tvořen čtyřmi rovnoramennými trojúhelníky se základnou a a výškou v_a , jeho obsah je

$$S_{pl} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 10}{2}, \quad S_{pl} = 80 \text{ cm}^2.$$

Pro povrch jehlanu tak dostaneme

$$S = S_p + S_{pl} = 16 + 80, \quad S = 96 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Povrch jehlanu je 96 cm^2 .

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet povrchu jehlanu. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s určováním obsahů rovinných útvarů (čtverec, trojúhelník).

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: přímá úměrnost, povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu

Starosta obce chce vyměnit všechny tašky na střeše místní kapličky. Střecha má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstava má tvar čtverce s délkou strany 4 m a výška jedné stěny střechy je 8 m. Na pokrytí střechy chce použít tašky s označením Brněnka 14. V katalogu zjistil, že na pokrytí 1 m^2 bude potřebovat 14 tašek a na jedné paletě je 240 tašek. Kolik palet tašek musí starosta objednat, aby mohl nově pokrýt střechu kapličky?

Řešení

Uvažujme následující označení

$$a = 4 \text{ m},$$

$$v = 8 \text{ m},$$

$$n = 14,$$

$$p = 240,$$

P značí hledaný počet palet, N značí počet tašek.

Střecha je tvořena pláštěm pravidelného čtyřbokého jehlanu a ten pak 4 shodnými rovnoramennými trojúhelníky se základnou délkou 4 m a výškou délky 8 m. Obsah pláště S_{pl} vypočteme podle vztahu

$$S_{\text{pl}} = 4 \cdot \frac{av}{2} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 8}{2}, \quad S_{\text{pl}} = 64 \text{ m}^2.$$

Nyní vypočteme, kolik tašek bude potřeba na pokrytí celé střechy

$$N = n \cdot S_{\text{pl}} = 14 \cdot 64 = 896.$$

Počet palet, které musí starosta objednat, určíme podle vztahu

$$P = \frac{N}{p} = \frac{896}{240} = 3,7\overline{3} \doteq 4.$$

Závěr. Starosta obce musí na opravu střechy objednat 4 palety tašek Brněnka 14.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na praktickou aplikaci určení povrchu jehlanu. Údaje o střešní krytině odpovídají skutečnosti, takže žák získá reálnou představu o řešení jednoho konkrétního praktického úkolu. Současně úlohy využívá pojem přímá úměrnost, žáci si též upevní pravidla pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@rg.prostejov.cz

Gradované úlohy

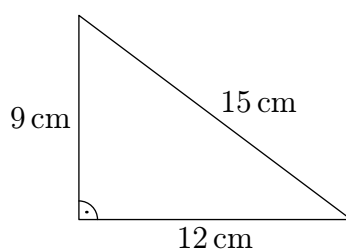
Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem jehlanu

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: jehlan, objem jehlanu, vztah pro výpočet objemu jehlanu

Jehlan má výšku 2 dm a jeho podstava je znázorněna na následujícím obrázku. Určete objem jehlanu.



Řešení

Označme $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 15$ cm délky hran podstavy jehlanu, $v = 2$ dm = 20 cm jeho výšku. Obsah podstavy vypočteme jako obsah pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a a b

$$S_p = \frac{ab}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \text{ cm}^2.$$

Objem jehlanu s výškou v pak vypočteme podle vztahu

$$V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 20 = 360 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem jehlanu je 360 cm^3 .

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem jehlanu. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu jehlanu. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s určováním obsahů rovinných útvarů (pravoúhlý trojúhelník) a převody jednotek délk.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: objem jehlanu

Vypočtete výšku čtyřbokého jehlanu, který má objem 32 cm^3 a jeho podstavou je kosočtverec s úhlopříčkami 4 cm a 6 cm.

Řešení

Označme $e = 4\text{ cm}$ a $f = 6\text{ cm}$ délky úhlopříček podstavy jehlanu a $V = 32\text{ cm}^3$ jeho objem. Obsah podstavy určíme jako obsah kosočtverce podle vztahu

$$S_p = \frac{ef}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12\text{ cm}^2.$$

Objem jehlanu vypočteme podle vztahu

$$V = \frac{1}{3}S_p v,$$

kde v je velikost jeho výšky. Odtud pro výšku jehlanu platí

$$v = \frac{3V}{S_p} = \frac{3 \cdot 32}{12} = 8\text{ cm}.$$

Závěr. Výška jehlanu je 8 cm.

Metodické poznámky

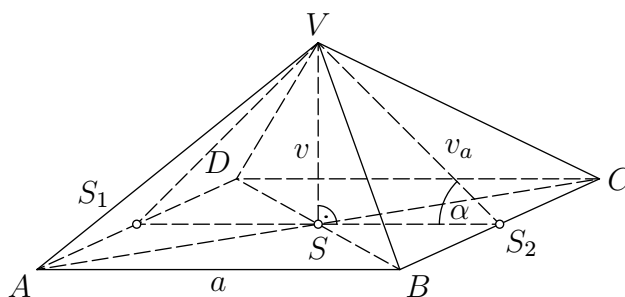
Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem jehlanu. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu jehlanu. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s určováním obsahů rovinných útvarů (kosočtverec). Jisté problémy mohou mít žáci při obecném vyjádření výšky ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, Pythagorova věta (goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku).

Vypočítejte objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavní hrana má délku 1,2 dm a jeho boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel o velikosti 45° .

Řešení (1. způsob)



Označme $a = 1,2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$ délku podstavné hrany jehlanu a $\alpha = 45^\circ$ velikost úhlu který svírá boční stěna s podstavou. Obsah podstavy spočteme jako obsah čtverce se stranou délky a

$$S_p = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

Jelikož je trojúhelník S_1S_2V rovnoramenný, znamená to, že u vrcholů S_1 a S_2 mají úhly velikost 45° . U zbylého vrcholu V má tedy vnitřní úhel velikost 90° . Trojúhelník S_1S_2V je pravoúhlý, podle Pythagorovy věty máme

$$v_a^2 + v_a^2 = a^2.$$

Odtud platí

$$2v_a^2 = a^2 \Rightarrow v_a^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{12^2}{2}} \Rightarrow v_a = \sqrt{72} \text{ cm}.$$

Trojúhelník SS_2V je rovněž pravoúhlý a tedy

$$v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v_a^2.$$

Odtud platí

$$v^2 = v_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow v = \sqrt{72 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} \Rightarrow v = 6 \text{ cm}$$

a objem jehlanu tak je

$$V = \frac{1}{3}S_pv = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6 = 288 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem jehlanu je 288 cm^3 .

Řešení (2. způsob)

Obsah podstavy spočteme jako obsah čtverce se stranou délky a

$$S_p = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

Úhel, který svírá boční stěna s rovinou podstavy, je roven úhlu α v trojúhelníku S_1S_2V . Tělesovou výšku v vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku SS_2V užitím funkce tangens

$$\text{tg } \alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{2v}{a}.$$

Odtud pro tělesovou výšku v dostáváme

$$v = \frac{a \text{ tg } \alpha}{2} = \frac{12 \cdot \text{tg } 45^\circ}{2} = 6 \text{ cm}$$

a objem jehlanu tak je

$$V = \frac{1}{3}S_pv = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6 = 288 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem jehlanu je 288 cm^3 .

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem jehlanu. Úloha je také řešena (2. způsob) užitím goniometrické funkce, což je nad rámec RVP ZV. Lze jej ale využít jako jisté seznámení s goniometrickými funkcemi v pravoúhlém trojúhelníku. Jisté problémy mohou mít žáci při obecném vyjádření výšky ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@org.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

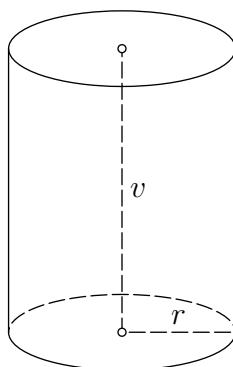
Klíčové pojmy: povrch válce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: rotační válec, povrch válce, plášť válce, vztah pro výpočet povrchu rotačního válce

Určete povrch rotačního válce s poloměrem 4 cm a výškou 16 cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení



Označme $r = 4$ cm poloměr válce a $v = 16$ cm jeho výšku. Jeho povrch pak je

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 16 \doteq 502,65 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Povrch daného válce je $502,65 \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu povrch válce. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet povrchu rotačního válce. Úloha současně vede k upevnění pravidel pro zaokrouhlování.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rotační válec, povrch válce, plášť válce, vztah pro výpočet povrchu rotačního válce

Určete povrch rotačního válce, jehož plášť má obsah 16 dm^2 a jeho výška je 50 cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $S_{pl} = 16 \text{ dm}^2$ obsah pláště a $v = 50 \text{ cm} = 5 \text{ dm}$ výšku válce. Pro obsah pláště rotačního válce platí vztah

$$S_{pl} = 2\pi r v.$$

Odtud spočteme nejprve poloměr válce podle vztahu

$$r = \frac{S_{pl}}{2\pi v} = \frac{16}{2 \cdot \pi \cdot 5} r = \frac{8}{5\pi} \text{ dm}.$$

Povrch válce pak vypočteme dosazením

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v) = 2\pi \cdot \frac{8}{5\pi} \left(\frac{8}{5\pi} + 5 \right) \doteq 17,63 \text{ dm}^2.$$

Závěr. Povrch daného válce je $17,63 \text{ dm}^2$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu plášť a povrch válce. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet povrchu rotačního válce. Úloha současně vede k upevnění pravidel pro zaokrouhlování. Jisté problémy mohou mít žáci při obecném vyjádření poloměru ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet pláště válce.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rotační válec, povrch válce, plášť válce, vztah pro výpočet povrchu rotačního válce

Pan Kutil dostal od manželky za úkol natřít jednu stěnu v obývacím pokoji žlutou barvou. Stěna je široká 4 m a vysoká 2,8 m. Stěnu bude natírat malířským válečkem šířky 20 cm s průměrem 8 cm. Vypočtete, kolikrát se otočí malířský váleček na rukojeti, bude-li pan Kutil napojovat jednotlivé tahy těsně vedle sebe a předpokládáme-li, že váleček po stěně neprokluzuje.

Řešení

Označme $a = 4 \text{ m}$ šířku stěny, $b = 2,8 \text{ m}$ její výšku, $v = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ šířku válečku a $d = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$ jeho průměr. Malířský váleček má tvar rotačního válce. Nejdříve zjistíme, kolik tahů válečkem těsně vedle sebe provede pan Kutil na celé šířce stěny

$$t = \frac{a}{v} = \frac{4}{0,2} = 20.$$

Celkovou délku stopy, kterou urazí váleček při natírání, vypočteme jako součin počtu tahů a výšky stěny:

$$l = t \cdot b = 20 \cdot 2,8 = 56 \text{ m}.$$

Při jednom otočení válečku po stěně natře váleček stopu délky rovné obvodu podstavy válečku

$$l_1 = \pi d = 0,08\pi \text{ m.}$$

Počet otáček válečku nakonec zjistíme jako podíl celkové délky stopy a obvodu válečku

$$n = \frac{l}{l_1} = \frac{56}{0,08\pi} \doteq 223.$$

Závěr. Při natírání stěny se malířský váleček otočí přibližně 223krát.

Metodické poznámky

Úloha do jisté míry využívá i fyzikální poznatky související s otáčením tělesa kolem osy. Velmi vhodné je proto celou úlohu uvést jednoduchým experimentem, při kterém vyučující po podložce otáčí např. dřevěným modelem válce a vyznačí na podložce a válci značky odpovídající jedné otáčce. Žákům tento experiment umožní snáze pochopit vztah mezi obvodem podstavy válce a uraženou dráhou po podložce.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@org.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: válec, povrch válce

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek, povrch válce, procenta

Broskvový kompot se prodává v plechovkách tvaru válce. Mají výšku 16 cm a průměr dna 10 cm. Vypočítejte, kolik m^2 plechu je třeba k výrobě 100 000 těchto plechovek. Počítejte 5 % materiálu navíc.

Řešení

Povrch válce vypočítáme podle vzorce $S = 2\pi r(r + v)$, kde r je poloměr podstavy a v je výška válce. Ze známého průměru podstavy válce, určíme poloměr $r = 5 \text{ cm}$ a pro povrch válce S tak platí

$$S = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (5 + 16) \doteq 659,4 \text{ cm}^2.$$

Plechovek je 100 000, spotřeba plechu na výrobu 100 000 plechovek tak bude

$$659,4 \cdot 100\,000 = 65\,940\,000 \text{ cm}^2 = 6\,594 \text{ m}^2.$$

Je třeba ještě započítat 5 % materiálu navíc: $\frac{6\,594 \cdot 105}{100} = 6\,923,7 \text{ m}^2$.

Závěr. K výrobě 100 000 takových plechovek je potřeba přibližně $6\,923,7 \text{ m}^2$ plechu.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže převádění jednotek.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a obsahu, povrch válce

Na úpravu při pokládání asfaltového koberce se používá kovový válec, který má průměr 120 centimetrů a šířku 5 metrů. Kolik m^2 urovná, otočí-li se tisíckrát?

Řešení

Je nutné si uvědomit, že počítáme pouze plášť válce (podstavy se asfaltového koberce nedotýkají). Pro obsah pláště válce platí $S_v = \pi dv$, kde d je průměr válce a v je jeho výška (v našem případě šířka). Obsah pláště válce je

$$S = \pi \cdot 1,2 \cdot 5 \doteq 18,84 \text{ m}^2.$$

Válec se otočí 1 000-krát, proto obsah uválcované plochy je $18,84 \cdot 1\,000 = 18\,840 \text{ m}^2$.

Závěr. Kovový válec urovná 18 840 m² asfaltového koberce.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit, že počítáme pouze plášť válce (je vhodné názorně ukázat).

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a objemu, objem a povrch válce, vyjádření neznámé ze vzorce

Vnitřek sudu je válec s průměrem podstavy 0,8 m. Je v něm 3 hl vody. Voda sahá 20 cm od okraje válce. Kolik m² plechu bylo třeba k výrobě tohoto otevřeného sudu?

Řešení

Známe průměr podstavy válce $d = 0,8$ m, odkud vypočítáme poloměr podstavy $r = 0,4$ m. Objem vody je $V = 3$ hl = 0,3 m³, který můžeme vyjádřit podle vzorce $V = \pi r^2 v_v$, kde v_v je výška hladiny vody. Vyjádříme neznámou v_v

$$v_v = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{0,3}{\pi \cdot 0,4^2} \doteq 0,597 \text{ m.}$$

Protože voda sahá 20 cm = 0,2 m od okraje, je nutné je připočítat k v_v , abychom dostali skutečnou výšku válce $v = 0,597 + 0,2 = 0,797$ m.

Ze vzorce pro výpočet povrchu válce $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$, který musíme upravit vzhledem k podmínce, že se jedná o otevřený sud, tedy bez horní podstavy, odvodíme vzorec pro povrch sudu

$$S_s = \pi r^2 + 2\pi r v = \pi \cdot 0,4^2 + 2 \cdot \pi \cdot 0,4 \cdot 0,797 \doteq 2,505 \text{ m}^2.$$

Závěr. Na výrobu tohoto sudu bylo třeba asi 2,505 m² plechu.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit, že nejdříve je nutné vypočítat výšku. Mohou chybovat i ve vyjádření neznámé ze vzorce a převodech jednotek.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

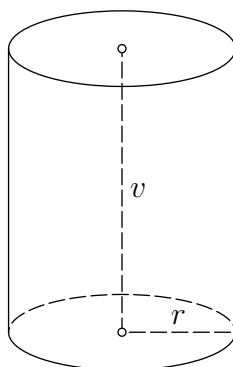
Klíčové pojmy: objem válce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: rotační válec, objem válce, vztah pro výpočet objemu rotačního válce

Určete objem rotačního válce s poloměrem 0,4 dm a výškou 1,6 dm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení



Označme $r = 0,4$ dm poloměr válce a $v = 1,6$ dm jeho výšku. Jeho objem je

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 0,4^2 \cdot 1,6 \doteq 0,80 \text{ dm}^3.$$

Závěr. Objem daného válce je $0,80 \text{ dm}^3$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem válce. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu válce. Úloha současně vede k upevnění pravidel pro zaokrouhlování.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rotační válec, objem válce, vztah pro výpočet objemu rotačního válce

Určete poloměr rotačního válce s objemem 225 cm^3 a výškou 0,5 dm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $V = 225 \text{ cm}^3$ objem válce a $v = 0,5 \text{ dm} = 5 \text{ cm}$ jeho výšku. Pro objem rotačního válce platí vztah

$$V = \pi r^2 v \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi v}} = \sqrt{\frac{225}{\pi \cdot 5}} \doteq 3,78 \text{ cm}.$$

Závěr. Poloměr daného válce je 3,78 cm.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem válce. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu válce. Úloha současně vede k upevnění pravidel pro zaokrouhlování a pro převody mezi jednotkami objemu. Jisté problémy mohou mít žáci při obecném vyjádření poloměru ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet objemu válce.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rotační válec, objem válce, vztah pro výpočet objemu rotačního válce

Pavel soutěží v táborové hře, ve které má za úkol naplnit desetilitrové vědro pomocí plechovky tvaru rotačního válce s průměrem podstavy 10 cm a výškou 12 cm. S jednotlivými plechovkami běhá od rybníka k vědru a jedna cesta s plechovkou tam a zpět včetně nabití vody z rybníka a vylití mu trvá 25 s. Aby vodu při běhu nevytil, naplňuje ji pouze do výšky 10 cm. Určete, kolik plechovek musí do vědra přelít a jak dlouho mu bude úkol trvat?

Řešení

Označme $V_0 = 10 \text{ l} = 10 \text{ dm}^3 = 10000 \text{ cm}^3$ objem vědra, $r = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ poloměr podstavy plechovky, $v = 10 \text{ cm}$ výšku hladiny vody v plechovce a $t_1 = 25 \text{ s}$ délku cesty. Nejdříve vypočteme objem vody, který Pavel přenesl při jedné cestě

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 \doteq 785,4 \text{ cm}^3.$$

Nyní vypočteme, kolik plechovek musí Pavel do vědra donést, aby ho naplnil

$$n = \frac{V_0}{V} = \frac{10000}{785,4} = 12,7 \doteq 13.$$

Pavel bude muset od rybníka ke vědru doběhnout celkem 13krát. Celkový čas, který k tomu bude potřebovat, určíme takto

$$t = nt_1 = 13 \cdot 25 = 325 \text{ s} = 5 \text{ min } 25 \text{ s}.$$

Závěr. Pavlovi bude úkol v rámci táborové soutěže trvat celkem 5 minut a 25 sekund.

Metodické poznámky

Úloha využívá intuitivní chápání objemu jako typického příkladu extenzivní veličiny, tedy veličiny, kterou si lze představit složenou z většího počtu veličin téhož druhu. Úloha je také zaměřena na převody jednotek objemu a času.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@org.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: válec, objem válce

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a objemu, objem válce

Vnitřek sudu je válec s průměrem podstavy 0,9 m a výškou 1,4 m. Je v něm 6 hl vody. Kolik desetilitrových kbelíků vody je třeba do sudu vylít, aby byl zcela naplněn?

Řešení

Objem vody v sudu je $6 \text{ hl} = 600 \text{ l} = 600 \text{ dm}^3$. Objem sudu V vypočítáme podle vzorce $V = \pi r^2 v$, kde r je poloměr podstavy a v je výška sudu. Známe průměr podstavy válce $d = 0,9 \text{ m} = 9 \text{ dm}$, odkud poloměr podstavy je $r = 9 : 2 = 4,5 \text{ dm}$. Výška sudu je $v = 1,4 \text{ m} = 14 \text{ dm}$.

$$V = \pi \cdot 4,5^2 \cdot 14 \doteq 890,19 \text{ dm}^3 = 890,19 \text{ l}.$$

Jestliže máme v sudu pouze 600 litrů vody, je třeba dolít ještě 290,19 litrů, což při objemu kbelíku 10 litrů představuje přibližně 29 kbelíků.

Závěr. Do sudu je třeba vylít přibližně 29 kbelíků vody.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže převádění jednotek.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: převody jednotek, objem válce, procenta

Meruňkový kompot se prodává v plechovkách tvaru válce. Mají výšku 9 cm a průměr dna 6 cm. Vypočítejte, kolik litrů kompotu je na paletě, na které je 800 takových plechovek a každá plechovka je naplněna na 90 % svého objemu.

Řešení

Objem plechovky vypočítáme podle vzorce $V = \pi r^2 v$, kde r je poloměr podstavy a v je výška plechovky. Známe průměr podstavy válce $d = 6 \text{ cm}$, potom $r = 3 \text{ cm}$ a výška plechovky je $v = 9 \text{ cm}$.

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \doteq 254,34 \text{ cm}^3.$$

Plechovek je 800, tedy $254,34 \cdot 800 = 203\,472 \text{ cm}^3 = 203,472 \text{ dm}^3 = 203,472 \text{ l}$.

Protože jsou plechovky naplněny kompotem na 90 % svého objemu, pak objem kompotu v litrech je

$$203,472 \cdot 0,9 = 183,1248 \doteq 183.$$

Závěr. Na paletě je přibližně 183 litrů meruňkového kompotu.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem bezchybný numerický výpočet.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: převody jednotek délky a objemu, objem válce

Plánkovi mají na zahradě studnu, na jejíž vybudování potřebovali 15 betonových skruží. Betonová skruž má výšku 80 cm. Její vnější průměr je 75 cm a tloušťka 8 cm.

- Určete hmotnost jedné skruže, jestliže m^3 betonu má hmotnost 2 100 kg.
- Kolik litrů vody mají k dispozici, je-li hladina vody půl metru od horního okraje studny?

Řešení

- Pro výpočet hmotnosti skruže musíme nejdříve vypočítat objem jedné skruže. Vypočítáme ji jako rozdíl objemů většího válce a menšího válce. Větší válec má průměr 75 cm, takže poloměr $r_v = 37,5$ cm. Menší válec má průměr 59 cm (od většího průměru odečteme dvojnásobek tloušťky $75 - 16 = 59$), takže poloměr $r_m = 29,5$ cm. Výška většího i menšího válce je $v = 80$ cm. Objem většího válce vypočítáme podle vzorce $V_v = \pi r_v^2 v$.

$$V_v = \pi \cdot 37,5^2 \cdot 80 \doteq 353\,250 \text{ cm}^3.$$

Objem menšího válce vypočítáme podle vzorce $V_m = \pi r_m^2 v$.

$$V = \pi \cdot 29,5^2 \cdot 80 \doteq 218\,606,8 \text{ cm}^3.$$

Objem skruže vypočítáme jako rozdíl objemů většího válce a menšího válce

$$353\,250 - 218\,606,8 = 134\,643,2 \text{ cm}^3 = 0,134\,643\,2 \text{ m}^3.$$

Hmotnost jedné skruže vypočítáme jako součin objemu skruže a hmotnosti m^3 betonu $0,134\,643\,2 \cdot 2\,100 = 282,750\,72 \text{ kg} \doteq 283 \text{ kg}$.

- Množství vody vypočítáme jako objem menšího válce, přičemž pro výšku vodní hladiny platí

$$v_h = 80 \cdot 15 - 50 = 1\,150 \text{ cm}.$$

Objem válce vypočítáme podle vzorce

$$V = \pi r_m^2 v_h = \pi \cdot 29,5^2 \cdot 1\,150 \doteq 3\,144\,066,7 \text{ cm}^3 = 3\,144,066\,71 \doteq 3\,144 \text{ l}.$$

Závěr. Plánkovi mají k dispozici asi 3144 litrů vody, přičemž hmotnost jedné skruže je přibližně 283 kg.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit výpočet objemu jedné skruže. Pokud budeme aproximovat číslo π hodnotou 3,14, dostaneme objem skruže asi 3 142 l vody.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: síť a povrch kužele

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: rotační kužel, síť kužele, povrch kužele, vztah pro výpočet povrchu rotačního kužele, Pythagorova věta

Určete povrch rotačního kužele s poloměrem 4 cm a výškou 16 cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $r = 4$ cm poloměr podstavy kužele a $v = 16$ cm jeho výšku. Rotační kužel vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho odvěsny. Pro stranu s kužele, jeho poloměr a výšku můžeme na základě Pythagorovy věty psát

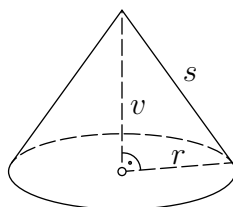
$$s^2 = r^2 + v^2.$$

Odtud pro stranu daného kužele platí

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{272} \text{ cm.}$$

Povrch kužele pak je

$$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{272} \doteq 257,51 \text{ cm}^2.$$



Závěr. Povrch zadaného kužele je $257,51 \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu povrch rotačního kužele. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet povrchu kužele. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s pojmem Pythagorova věta.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: povrch kužele, vztah pro výpočet povrchu rotačního kužele, vyjádření neznámé ze vzorce, Pythagorova věta

Rotační kužel s povrchem 200 cm^2 má podstavu s poloměrem 5 cm. Vypočtete jeho výšku.

Řešení

Označme $S = 200 \text{ cm}^2$ povrch kužele a $r = 5 \text{ cm}$ poloměr jeho podstavy. Pro výpočet povrchu rotačního kužele platí následující vztah

$$S = \pi r^2 + \pi r s,$$

kde s je velikost strany kužele. Odtud pro stranu daného kužele platí

$$s = \frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \frac{200 - \pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 5} = \left(\frac{40}{\pi} - 5 \right) \text{ cm}.$$

Rotační kužel vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho odvěsny. Pro stranu rotačního kužele, jeho poloměr a výšku v můžeme na základě Pythagorovy věty psát

$$s^2 = r^2 + v^2.$$

Pro výšku kužele pak platí

$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{\left(\frac{40}{\pi} - 5 \right)^2 - 5^2} \doteq 5,90 \text{ cm}.$$

Závěr. Výška daného kužele je asi 5,90 cm.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na použití vztahu pro výpočet povrchu rotačního kužele. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s pojmem Pythagorova věta a vyjádření neznámé ze vzorce. Jisté problémy mohou mít žáci právě při obecném vyjádření strany ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet povrchu kužele.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: povrch rotačního kužele, procenta, Pythagorova věta

Střecha zahradního altánu má tvar rotačního kužele s průměrem 3 m a výškou 2 m. Kolik m^2 lepenky budeme potřebovat, připočítáme-li 5 % na spoje a lemy?

Řešení

Je-li $d = 3 \text{ m}$ průměr podstavy kužele, pak její poloměr je $r = 1,5 \text{ m}$. Označme $v = 2 \text{ m}$ výšku kužele. Rotační kužel vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho odvěsny. Pro stranu s rotačního kužele, jeho poloměr a výšku můžeme na základě Pythagorovy věty psát

$$s^2 = r^2 + v^2.$$

Odtud pro stranu daného kužele platí

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ m}.$$

Střecha zahradního altánu je tvořena pláštěm rotačního kužele, pro jehož povrch platí

$$S = \pi r s = \pi \cdot 1,5 \cdot 2,5 \doteq 11,78 \text{ m}^2.$$

Spotřebu lepenky pak zjistíme připočítáním 5 % k vypočtené hodnotě povrchu, tedy

$$S_0 = 1,05 \cdot S = 1,05 \cdot 11,78 \doteq 12,37 \text{ m}^2.$$

Závěr. Na pokrytí střechy zahradního altánu včetně spojů a lemů budeme potřebovat přibližně $12,37 \text{ m}^2$ lepenky.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na praktickou aplikaci určení povrchu kužele. Žáci získají reálnou představu o řešení jednoho konkrétního praktického úkolu. Současně úloha využívá pojem procenta a Pythagorova věta, žáci si též upevní pravidla pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@rg.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem kužele

Úloha 1 (úroveň 1)

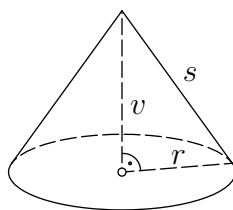
Předpokládané znalosti: rotační kužel, objem kužele, vztah pro výpočet objemu rotačního kužele

Určete objem rotačního kužele s poloměrem 0,2 dm a výškou 0,8 dm. Výsledek vyjádřete v mililitrech a zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $r = 0,2 \text{ dm} = 2 \text{ cm}$ poloměr podstavy kužele a $v = 0,8 \text{ dm} = 8 \text{ cm}$ jeho výšku. Objem V určíme vztahem

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 8 \doteq 33,51 \text{ cm}^3 = 33,51 \text{ ml}.$$



Závěr. Objem daného kužele je 33,51 ml.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem kužele. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu kužele. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s převody jednotek délky a objemu. Žáci si současně upevní znalost pravidel pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: objem kužele, Pythagorova věta

Určete délku strany rotačního kužele s objemem 165 cm^3 a výškou 4 cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $V = 165 \text{ cm}^3$ objem kužele, $v = 4 \text{ cm}$ jeho výšku. Ze vztahu pro výpočet objemu kužele můžeme vyjádřit poloměr

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 165}{\pi \cdot 4}} = \sqrt{\frac{495}{4\pi}} \text{ cm.}$$

Rotační kužel vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho odvěsny. Pro stranu rotačního kužele, jeho poloměr a výšku můžeme pro stranu s na základě Pythagorovy věty psát

$$s^2 = r^2 + v^2.$$

Odtud pro stranu daného kužele platí

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{\frac{495}{4\pi} + 4^2} \doteq 7,44 \text{ cm.}$$

Závěr. Strana rotačního kužele má délku přibližně 7,44 cm.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem kužele. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu kužele. Úloha současně vede k upevnění pojmu Pythagorova věta. Jisté problémy mohou mít žáci při obecném vyjádření poloměru ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet objemu jehlanu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem rotačního kužele, přímá úměrnost

Plechová nádržka zahradní sprchy má tvar rotačního kužele s průměrem 50 cm a výškou 80 cm a je naplněna vodou až po horní okraj. Otvor v nádržce je uzpůsoben tak, že voda do sprchové hadice vtéká průměrnou rychlostí 250 ml/s. Jak dlouho můžeme jednorázově použít sprchu, než všechna voda z nádržky vyteče? Výsledek vyjádřete v minutách.

Řešení

Označme $d = 50$ cm průměr nádrže, potom $r = 25$ cm je její poloměr. Dále označme $v = 80$ cm výšku nádrže a $u = 250$ ml/s výtokovou rychlost. Nejprve vypočteme objem nádržky na vodu podle vztahu

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot 25^2 \cdot 80 \doteq 52\,360 \text{ cm}^3 = 52\,360 \text{ ml.}$$

Rychlost výtoku vody určíme jako podíl objemu vytečené vody a doby výtoku t

$$u = \frac{V}{t},$$

Odtud pro dobu výtoku platí

$$t = \frac{V}{u} = \frac{52\,360}{250} \doteq 209 \text{ s} = 3 \text{ min } 29 \text{ s.}$$

Závěr. Nádržka zahradní sprchy vyteče za 3 min 29 s.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem kužele. Současně pracuje s fyzikálním pojmem objemový průtok. U žáka se předpokládá znalost převodů jednotek délky a objemu.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@rg.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem a povrch kužele

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: objem kužele

Jaký objem má porce zmrzliny, která je servírována do kornoutu tvaru rotačního kuželu o vnitřní výšce 9 cm a vnitřním průměru (v nejširším místě) 4 cm, přičemž uvnitř kornoutu je jen třetina objemu celé porce zmrzliny?

Řešení

Vnitřní část kornoutu má tvar kuželu, označme jeho výšku $v = 9$ cm. Vnitřní průměr kornoutu v nejširším místě je 4 cm, pak poloměr podstavy kuželu je $r = 2$ cm. Pro objem kuželu V_0 platí

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi r^2 v. \quad (1)$$

Po dosazení do vztahu (1) za $v = 9$ cm a $r = 2$ cm dostaneme $V_0 = 12\pi$ cm³. Kornout vyplňuje pouze jedna třetina z celé porce zmrzliny, pak pro celkový objem V jedné porce zmrzliny platí

$$V = 3 \cdot V_0. \quad (2)$$

Dosazením do vztahu (2) za $V_0 = 12\pi$ cm³ a zaokrouhlením na celé centimetry krychlové dostaneme

$$V \doteq 113 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Celkový objem jedné porce zmrzliny zaokrouhlený na celé mililitry je 113 ml.

Metodické poznámky

Úloha zaměřená na procvičení základního vztahu pro určení objemu kužele, je vhodná pro samostatnou práci žáků.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: objem krychle a kužele

Do krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany a je vepsán kužel, jehož podstavu tvoří kruh vepsaný do čtverce $ABCD$ a jehož vrchol je bod V , který je středem úsečky EG . Určete poměr objemu krychle a kuželu.

Řešení

Hrana krychle $ABCDEFGH$ je délky a , pro objem krychle V_1 platí

$$V_1 = a^3. \quad (3)$$

Podstavou kužele je kruh, který je vepsán do čtverce $ABCD$ o délce strany a , tedy poloměr r podstavy kužele je roven polovině strany čtverce $ABCD$, tj. $r = \frac{a}{2}$. Výška v kužele odpovídá zřejmě délce hrany krychle a . Pro objem kužele V_2 tak platí

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 v. \quad (4)$$

Po dosazení do vztahu (4) za $r = \frac{a}{2}$, $v = a$ dostaneme

$$V_2 = \frac{1}{12}\pi a^3. \quad (5)$$

Užitím vztahů (3) a (5) určíme poměr objemu krychle a kužele, tj.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{\frac{1}{12}\pi a^3} = \frac{1}{\frac{\pi}{12}}.$$

Závěr. Poměr objemu krychle a kužele vepsaného do krychle je $1 : \frac{\pi}{12}$.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je uvedeno obecně, ale je možné ji řešit konkrétně zvolením číselné hodnoty délky hrany krychle. Úloha je vhodná pro procvičení problematiky objemů těles, ale i úprav algebraických výrazů.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, poměr, vlastnosti kuželu

Kristýna si chce na maškarní ples vyrobit šaškovskou čepici z papíru vysokou 30 cm ve tvaru pláště rotačního kužele. Změřila si obvod hlavy a zjistila, že činí 57 cm. Jaký poloměr a středový úhel by měla mít kruhová výseč, ze které si může Kristýna čepici slepit?

Řešení

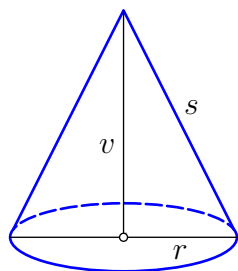
Obvod hlavy Kristýny odpovídá obvodu podstavy kužele, označme jej o , tj. $o = 57$ cm. Výška v kužele je rovna výšce čepice, tedy $v = 30$ cm. Dále označme poloměr podstavy kužele r .

Po vyjádření r ze známého vztahu pro určení obvodu kruhu podstavy kužele dostaneme

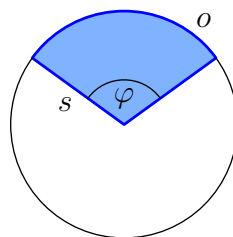
$$r = \frac{o}{2\pi}. \quad (6)$$

Dosadíme-li do vztahu (6) za $o = 57$ cm, pak $r = \frac{57}{2\pi}$ cm. Znázorníme osový řez kuželu a vyznačíme poloměr podstavy r , výšku kužele v a jeho stranu s (obr. 1). Užitím Pythagorovy věty určíme délku strany s kužele, tedy

$$s = \sqrt{v^2 + r^2}. \quad (7)$$



Obr. 1



Obr. 2

Dosazením do vztahu (7) za $r = \frac{57}{2\pi}$ cm a $v = 30$ cm dostaneme

$$s = \sqrt{30^2 + \left(\frac{57}{2\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{3\,600\pi^2 + 3\,249}}{2\pi} \text{ cm,}$$

po zaokrouhlení na setiny je $s \doteq 31,34$ cm.

Rozvinutým pláštěm kužele je kruhová výseč, jejíž poloměr odpovídá straně kužele s . Obvod podstavy o kužele je roven délce oblouku, který kruhovou výseč omezuje (obr. 2). Poměr plného úhlu a středového úhlu kruhové výseče odpovídá poměru obvodu kruhu o poloměru s , tj. $2\pi s$, a délce oblouku kruhové výseče o , tj.

$$360^\circ : \varphi = 2\pi s : o. \quad (8)$$

Ze vztahu (8) vyjádříme φ , tedy $\varphi = \frac{o}{2\pi s} \cdot 360^\circ$, dosadíme za $s = \frac{\sqrt{3\,600\pi^2 + 3\,249}}{2\pi}$ cm a $o = 57$ cm, po zaokrouhlení na úhlové minuty dostaneme

$$\varphi \doteq 104^\circ 12'.$$

Závěr. Poloměr kruhové výseče má po zaokrouhlení délku 31 cm a velikost jejího středového úhlu je přibližně 104° . (Doufejme, že Kristýna nezapomene na záložku na slepení.)

Metodické poznámky

Řešení úlohy vycházející z reálné situace, při kterém využíváme Pythagorovy věty, podněcuje rozvoj prostorové představivosti žáků.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: jehlany a kužely: kvarta*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: povrch a objem těles

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: objem válce

Vodojem tvaru válce má vnitřní průměr 6 m a výšku 3,6 m. Vodoměr ukazuje, že vodojem obsahuje 706,5 hl vody. Určete, do jaké výšky sahá voda ode dna?

Řešení

Označme r poloměr, v výšku a V objem sloupce vody ve vodojemu. Pak objem V můžeme vyjádřit dle známého vztahu pro určení objemu válce, tj.

$$V = \pi r^2 v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Dosazením do vztahu za $V = 70,65 \text{ m}^3$, $r = 3 \text{ m}$ a zaokrouhlením čísla π na dvě desetinná místa dostaneme

$$v = \frac{70,65}{\pi \cdot 3^2} \text{ m} \doteq 2,5 \text{ m}.$$

Závěr. Voda ve vodojemu sahá přibližně do výšky 2,5 m.

Metodické poznámky

Řešení úlohy využívá aplikaci základního vztahu pro určení objemu válce. Úloha je vhodná pro procvičení učiva.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procentový počet, povrch kvádru

Určete, kolik čtvercových dlaždiček o straně 5 cm je třeba k vydláždění dna a stěn bazénu tvaru kvádru, pokud zakoupíme 2 % z celkového počtu navíc. Hloubka bazénu je 2 m, šířka 3 m a délka 5 m. Spáry mezi dlaždičkami neuvažujte.

Řešení

Označme a šířku, b délku, c výšku a S obsah stěn a dna bazénu. Obsah S určíme jako součet obsahů čtyř stěn a dna bazénu, tj.

$$S = ab + 2ac + 2bc.$$

Dále označme d stranu dlaždice. Tato dlaždice pokryje část stěny o obsahu S_0 , zřejmě platí

$$S_0 = d^2.$$

Zanedbáme-li spáry mezi dlaždicemi, pak počet dlaždic N získáme jako podíl celkového obsahu všech stěn a dna bazénu S a obsahu S_0 , tedy

$$N = \frac{S}{S_0} = \frac{ab + 2ac + 2bc}{d^2}.$$

Po dosazení do vztahu za $a = 3 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $d = 0,05 \text{ m}$ dostaneme

$$N = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 2}{0,05^2} = 18\,800.$$

Nyní z celkového počtu dlaždic N určíme 2 %, tj. 376. Tedy celkem musíme zakoupit 19 176 dlaždic.

Závěr. Pro vydláždění stěn a dna bazénu budeme muset zakoupit celkem 19 176 dlaždic.

Metodické poznámky

Úloha je vhodná pro samostatnou práci žáků, protože skýtá další způsoby řešení, které je možné dále diskutovat.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem rotačního kužele, Pythagorova věta

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , kde $|BC| = 5 \text{ cm}$, $|AB| = 13 \text{ cm}$. Určete objem tělesa, které vznikne rotací trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC .

Řešení

Uvažujme standardní značení stran trojúhelníku ABC , tj. a, b, c . Rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC vznikne rotační kužel, jehož výška je $v = a$ a poloměr jeho podstavy $r = b$.

Délku strany b získáme užitím Pythagorovy věty. Pro délky stran pravoúhlého trojúhelníka ABC zřejmě platí

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Ze vztahu (1) vyjádříme neznámou b a dosadíme za $a = 5 \text{ cm}$, $c = 13 \text{ cm}$, tj.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

Objem rotačního kužele je

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v. \quad (2)$$

Po dosazení do vztahu (2) za $v = 5 \text{ cm}$, $r = 12 \text{ cm}$ a zaokrouhlení čísla π na dvě desetinná místa dostaneme

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5 \text{ cm}^3 \doteq 753,6 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem rotačního kužele, který vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC , je přibližně $753,6 \text{ cm}^3$.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je zaměřené na procvičení vztahu pro určení objemu rotačního kužele. Zobrazení rotace není uvedeno v RVP ZV, ale uvedené řešení vyžaduje pouze úvahu, která podněcuje další rozvoj prostorové představivosti žáků.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: hranoly*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Herman, J. *Matematika: kruhy a válce*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996.

Bušek, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 530 s.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: povrch koule

Úloha 1 (úroveň 1)

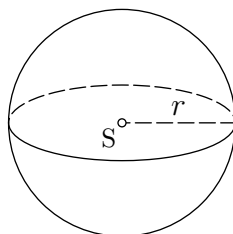
Předpokládané znalosti: koule, povrch koule, vztah pro výpočet povrchu koule

Určete povrch koule s průměrem 4,3 cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $d = 4,3$ cm průměr koule, potom $r = 2,15$ cm je její poloměr. Pro povrch S koule platí vztah

$$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 2,15^2 \doteq 58,09 \text{ cm}^2.$$



Závěr. Povrch koule činí přibližně $58,09 \text{ cm}^2$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu povrch koule. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet povrchu koule. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s pravidly pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: povrch koule, vztah pro výpočet povrchu koule, vyjádření neznámé ze vzorce

Firmou, která prováděla nátěr vodojemu ve tvaru koule, bylo účtováno 60 000 Kč. Firma při uzavření smlouvy garantovala cenu ve výši 750 Kč za nátěr jednoho čtverečního metru. Vypočtěte poloměr vodojemu.

Řešení

Označme $c = 60\,000$ Kč účtovanou cenu a $j = 750 \text{ Kč/m}^2$ cenu za metr čtvereční. Nejdříve vypočteme celkový povrch vodojemu, který byl natírán, podle vztahu

$$S = \frac{c}{j} = \frac{60\,000}{750} = 80 \text{ m}^2.$$

Pro povrch koule platí vztah

$$S = 4\pi r^2,$$

kde r je velikost jejího poloměru. Odtud pro poloměr koule platí

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \doteq 2,52 \text{ m.}$$

Závěr. Poloměr vodojemu je přibližně 2,52 m.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na použití vztahu pro výpočet povrchu koule. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s vyjádřením neznámé ze vzorce. Jisté problémy mohou mít žáci právě při obecném vyjádření poloměru ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet povrchu koule.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: povrch koule, přímá a nepřímá úměrnost

Představme si, že by se někdy v budoucnu realizovala myšlenka známá z některých sci-fi příběhů a celé lidstvo by se „přestěhovalo“ z planety Země na planetu Mars.

- Vypočtete, jak by se změnila průměrná hustota osídlení (počet obyvatel žijící na 1 km^2 povrchu tělesa). Potřebné údaje vyhledejte v tabulkách, popř. na internetu.
- Kolik procent obyvatelstva planety Země může přibýt na „prázdný“ Mars, aby hustota osídlení byla stejná, jako je nyní na Zemi?

Řešení

Označme $R_Z = 6378 \text{ km}$ poloměr Země a $R_M = 3386 \text{ km}$ poloměr Marsu.

- Mezi povrchem osídlené planety a hustotou osídlení je vztah nepřímé úměrnosti, tedy kolikrát se sníží velikost plochy osídlení, tolikrát vzroste hustota osídlení. K vyřešení úlohy je tedy klíčové nalézt poměr s povrchů obou planet

$$s = \frac{S_Z}{S_M} = \frac{4\pi R_Z^2}{4\pi R_M^2} = \frac{R_Z^2}{R_M^2} = \frac{6378^2}{3386^2} \doteq 3,5.$$

Vidíme, že povrch planety Země je přibližně 3,5krát větší než povrch planety Mars. Ve stejném poměru by tedy při přestěhování lidstva na planetu Mars narostla průměrná hustota osídlení.

Závěr. Průměrná hustota osídlení by při „přestěhování“ lidstva z planety Země na planetu Mars vzrostla přibližně 3,5krát.

- Z a) vidíme, že povrch planety Země je přibližně 3,5krát větší než povrch planety Mars. Aby hustota osídlení při přistěhování na planetu Mars byla stejná, mohlo by

se ze Země na Mars přestěhovat přibližně 3,5krát méně obyvatel, tedy pro počet o_M obyvatel na planetě Mars platí

$$o_M = \frac{o_Z}{3,5} = \frac{1}{3,5} o_Z \doteq 0,29 \cdot o_Z = 29 \% \text{ z } o_Z.$$

Závěr. Aby hustota osídlení byla na obou planetách stejná, mohl by na Marsu přibýt počet obyvatel odpovídající přibližně 29 % všech obyvatel planety Země.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na praktickou aplikaci určení povrchu koule. Žáci se současně seznámí s některými základními parametry Sluneční soustavy a naučí se je vyhledat na internetu. Současně úloha využívá pojem hustota osídlení, žáci si též upevní pravidla pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@rg.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem koule

Úloha 1 (úroveň 1)

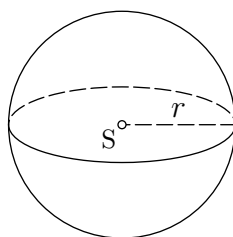
Předpokládané znalosti: koule, objem koule, vztah pro výpočet objemu koule

Určete objem koule s průměrem 8,6 dm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $d = 8,6$ cm průměr koule, potom $r = 4,3$ cm bude její poloměr. Pro objem koule platí vztah

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4,3^3 \doteq 333,04 \text{ cm}^3.$$



Závěr. Objem koule je přibližně $333,04 \text{ cm}^3$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na pochopení pojmu objem koule. Žáci se naučí používat vztah pro výpočet objemu koule. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s pravidly pro zaokrouhlování desetinných čísel.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: objem koule, vztah pro výpočet objemu koule, vyjádření neznámé ze vzorce

Zcela naplněný vodojem tvaru koule pojme 670 hektolitrů vody. Vypočtete poloměr vodojemu, výsledek vyjádřete v metrech a zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení

Označme $V = 670 \text{ hl} = 67\,000 \text{ l} = 67\,000 \text{ dm}^3 = 67 \text{ m}^3$ objem nádrže a r její hledaný poloměr. Pro objem koule platí vztah

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Odtud pro poloměr koule platí

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 67}{4\pi}} \doteq 2,52 \text{ m.}$$

Závěr. Poloměr vodojemu je přibližně 2,52 m.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na použití vztahu pro výpočet objemu koule. Úloha současně vede k upevnění znalostí souvisejících s vyjádřením neznámé ze vzorce. Jisté problémy mohou mít žáci právě při obecném vyjádření poloměru ze vzorce. V tomto případě je možné zpočátku tolerovat dosazení číselných hodnot přímo do vzorce pro výpočet objemu koule.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem koule, hustota tělesa

Určete průměrnou hustotu Země. Předpokládejte, že Země má tvar koule, potřebné údaje vyhledejte v tabulkách, popř. na internetu. Porovnejte vypočtenou hustotu s hustotou vody a rozhodněte, zda by hypoteticky Země v dostatečně velké nádobě s vodou plovla, anebo se potopila ke dnu.

Řešení

Označme $R_Z = 6\,378 \text{ km} = 6\,378\,000 \text{ m}$ poloměr Země, $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ její hmotnost a ρ hledanou hustotu. Nejdříve musíme stanovit přibližný objem Země

$$V_Z = \frac{4}{3}\pi R_Z^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,378\,000^3 \doteq 1,09 \cdot 10^{21} \text{ m}^3.$$

Ve fyzice jsme se seznámili se vztahem pro výpočet hustoty tělesa podle vztahu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_Z}{V_Z} = \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{1,09 \cdot 10^{21}} \doteq 5486 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Závěr. Hustota vody je přibližně $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Průměrná hustota Země je asi $5486 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a znamená to tedy, že na základě Archimédova zákona by se Země v dostatečně velké nádobě s vodou potopila ke dnu.

Poznámka. Ne všechny planety Sluneční soustavy mají průměrnou hustotu větší než voda. Planeta Saturn má průměrnou hustotu menší. Znamená to tedy, že by hypoteticky v dostatečně velké nádobě s vodou i se svými impozantními prstenci plovla na hladině.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na praktickou aplikaci určení objemu koule. Využívá se zde též fyzikální pojem hustota látky (tělesa). Žáci se současně seznámí s některými základními parametry planety Země a naučí se je vyhledat na internetu. Žáci si též upevní pravidla pro zaokrouhlování desetinných čísel a počítání s čísly v semilogaritmickém tvaru.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Petr Janeček; janecek@org.prostejov.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: válec, hranol, jehlan, povrch, objem

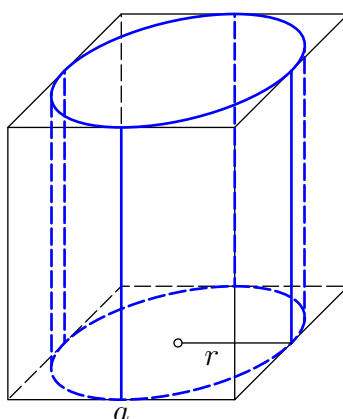
Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce a hranolu, obsah čtverce

Máme pravidelný čtyřboký hranol s obsahem podstavy 36 cm^2 a výškou 10 cm . Urči objem válce vyřezaného z hranolu tak, aby byl odpad co nejmenší.

Řešení

Označme $S = 36 \text{ cm}^2$ obsah podstavy čtverce a $v = 10 \text{ cm}$ velikost jeho výšky.



Pravidelný čtyřboký hranol má postavu tvaru čtverce, vypočteme délku strany a čtverce

$$S = 36 \text{ cm}^2 = a^2 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}.$$

Poloměr r podstavy válce je roven polovině délky strany podstavy hranolu, tedy $r = \frac{a}{2} = 3 \text{ cm}$ a výška válce je rovna výšce hranolu. Objem V válce už můžeme vypočítat ze vztahu

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \doteq 282,74 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem válce je přibližně 283 cm^3 .

Metodické poznámky

Žák si musí nejdříve uvědomit, že je zadán obsah podstavy, nikoli strana. Druhým problémem je umístění kruhu do čtverce tak, aby „byl odpad co nejmenší“. Následné dosazení do vztahu je mechanickou záležitostí.

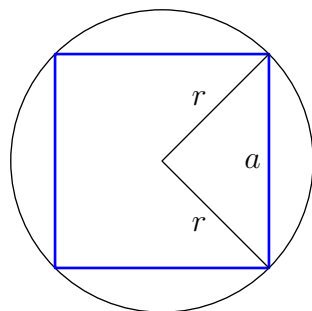
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: objem válce, objem jehlanu, Pythagorova věta, poměr

Mějme válec s poloměrem podstavy 2 cm a výškou 6 cm. Do válce umístíme pravidelný čtyřboký jehlan tak, že podstava jehlanu je umístěná do podstavy válce a vrcholy leží na obvodu kruhu. Vrchol jehlanu je středem druhé podstavy. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Označme $r = 2$ cm poloměr podstavy válce a $v = 6$ cm jeho výšku.



Vypočítáme objem válce

$$V_{\text{válec}} = \pi r^2 v = 24\pi \doteq 75,398 \text{ cm}^3$$

Určíme stranu podstavy pomocí Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 = 2r^2, \\ a &= r\sqrt{2} \doteq 2,83 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Dopočítáme objem jehlanu

$$V_{\text{jehlan}} = \frac{1}{3} a^2 v = 16 \text{ cm}^3.$$

Vyjádříme poměr objemů

$$V_{\text{válec}} : V_{\text{jehlan}} = 24\pi : 16 = \frac{3\pi}{2} : 1 \doteq 4,71 : 1.$$

Závěr. Objem válce je asi 4,71krát větší než objem jehlanu.

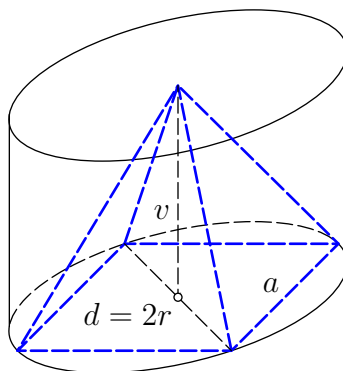
Metodické poznámky

Výpočet objemů těles je pro žáky pouhé dosazení do vztahů. Nejobtížnější částí je výpočet strany podstavy jehlanu. V závěru výpočtu si ještě zopakují poměr.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: objem válce, objem jehlanu, Pythagorova věta, práce s proměnnou, poměr

Mějme válec s průměrem d rovným výšce válce v . Do válce umístíme pravidelný čtyřboký jehlan tak, že podstava jehlanu je umístěná do podstavy válce a vrcholy leží na obvodu kruhu. Vrchol jehlanu je středem druhé podstavy. Určete poměr objemů obou těles (obecně).



Řešení

Označme r poloměr podstavy válce. Objem válce určíme ze vztahu $V_{válec} = \pi r^2 v$, ze zadání dále platí $d = 2r = v$. Odtud po dosazení máme

$$V = 2\pi r^3.$$

Pro objem jehlanu platí

$$V_{jehlan} = \frac{1}{3}a^2 v, \quad \text{kde} \quad a = r\sqrt{2} \quad \text{a} \quad v = 2r.$$

Odtud

$$V_{jehlan} = \frac{1}{3}(r\sqrt{2})^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot 2r^2 \cdot r = \frac{4}{3}r^3.$$

a pro poměr objemů platí

$$\frac{V_{jehlan}}{V_{válec}} = \frac{\frac{4}{3}r^3}{2\pi r^3} = \frac{\frac{4}{3}}{2\pi} = \frac{4}{6\pi} = \frac{2}{3\pi} \doteq \frac{1}{4,71}.$$

Závěr. Objem válce je asi 4,71krát větší než objem jehlanu.

Metodické poznámky

Práce s proměnnou je pro žáky základní školy obtížným učivem. Zde se navíc pracuje s iracionálními čísly, které práci značně komplikují. Příklad je vhodný pouze pro velmi šikovné žáky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem, koule, krychle, válec, poměr

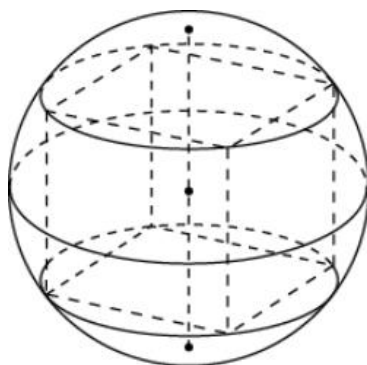
Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu krychle a koule, Pythagorova věta, prostorová představivost, poměr

Do koule s průměrem 16 cm je umístěna krychle tak, že všechny její vrcholy leží na povrchu koule. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Označme $r = 16 : 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ poloměr koule.



Nejprve vypočítáme objem koule dle vzorce

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 \doteq 2145 \text{ cm}^3.$$

Pro výpočet objemu krychle nejprve potřebujeme znát délku hrany krychle. Označme úhlopříčku krychle u , potom platí

$$u = a\sqrt{3} = 2r \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}} \doteq 9,24 \text{ cm}.$$

Odtud je objem krychle

$$V_{krychle} = a^3 \doteq 788 \text{ cm}^3.$$

Poměry objemů tak jsou

$$\frac{V_{koule}}{V_{krychle}} = \frac{2145}{788} \doteq \frac{2,72}{1}.$$

Závěr. Objem koule je asi 2,72krát větší než objem krychle.

Metodické poznámky

Základní myšlenkou je určit, že průměr koule je roven tělesové úhlopříčce krychle. Další postup je dosazení do vztahu.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu krychle a koule, Pythagorova věta, prostorová představivost, poměr, práce s proměnnou

Do koule s poloměrem r je umístěna krychle tak, že všechny její vrcholy leží na povrchu koule. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Objem koule

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Pro výpočet objemu krychle nejprve potřebujeme znát délku hrany krychle. Označme tělesovou úhlopříčku krychle u a hranu a , potom platí

$$u = a\sqrt{3} = 2r \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Objem krychle činí

$$V_{krychle} = a^3 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}.$$

Poměr objemů pak je

$$\frac{V_{koule}}{V_{krychle}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{8r^3}{3\sqrt{3}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \doteq \frac{2,72}{1}.$$

Závěr. Objem koule je $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ krát větší než objem krychle.

Metodické poznámky

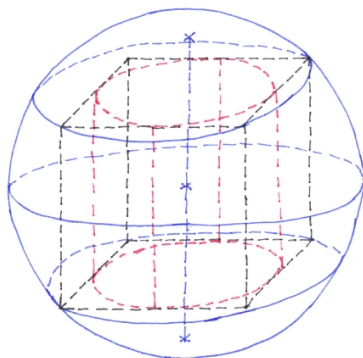
Příklad je zadán obecně a je potřeba jej řešit pomocí proměnných. Složitost příkladu je umocněná prací s iracionálními čísly. Výsledný poměr lze vyjádřit číselně, ale mnohem přesnější je výsledek uvedený v odpovědi.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce, krychle a koule, Pythagorova věta, prostorová představivost, poměr

Do koule s poloměrem r je umístěna krychle tak, že všechny její vrcholy leží na povrchu koule. Do krychle je umístěn válec tak, že podstavy válce leží v protějších stěnách krychle a jsou co největší. Určete poměr objemů všech těles.

Řešení



V úloze 2 jsme spočítali objem koule $V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$ a objem krychle $V_{krychle} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$, nyní určíme objem válce. Výška v válce je rovna délce hrany krychle, tedy $v = a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Poloměr podstavy válce je $r_{válce} = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ (viz obr.). Nyní můžeme určit objem válce

$$V = \pi r_{válce}^2 v = \pi \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} r^3.$$

Poměr objemů těles určíme jako

$$V_{koule} : V_{krychle} : V_{válce} = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} : \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} r^3 = 2\pi : \frac{4}{\sqrt{3}} : \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Závěr. Objem koule, krychle a válce jsou v poměru $2\pi : \frac{4}{\sqrt{3}} : \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Metodické poznámky

Přidáním třetího tělesa zvyšujeme obtížnost příkladu. Je nutné vyjádřit rozměry válce pomocí poloměru koule, protože to je jediný zadaný rozměr. Poměr objemů je nechán ve tvaru zlomku, protože žáci základní školy ještě neznají usměrňování zlomku s iracionálním číslem.

Zdroj: archiv autora,

Geometrie. [online]. [cit. 2013-07-18]. Dostupné <http://geometry2006.narod.ru/ege/B9.htm>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem, koule, válec, poměr

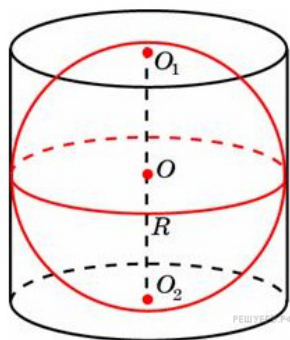
Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce a koule, prostorová představitost, poměr

Koule s poloměrem $R = 10$ mm je umístěna ve válci, pro který platí $2r = v$. Koule se dotýká podstav i stěn válce. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Nakreslením osového řezu ihned vidíme, že platí $r = R = 10$ mm, $v = 2R = 20$ mm.



Objem koule je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \doteq 4189 \text{ mm}^3.$$

Objem válce je

$$V_{válec} = \pi r^2 v = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 \doteq 6283 \text{ mm}^3.$$

Poměr objemů činí

$$V_{válec} : V_{koule} = 6283 : 4189 \doteq 1,5 : 1.$$

Závěr. Válec má objem asi 1,5krát větší než koule.

Metodické poznámky

Nakreslením vhodného obrázku jsou jednotlivé vztahy mezi proměnnými jasně viditelné. Vlastní výpočet je dosazením hodnot do známých vztahů. V našem případě se jedná o tzv. *rovnostranný válec*.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

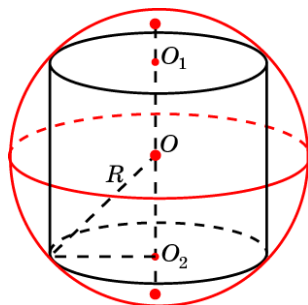
Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce a koule, prostorová představitost, Pythagorova věta, poměr

Do koule s poloměrem R je vepsán válec tak, že hranice podstav válce leží na povrchu koule. Pro válec platí $d = v = 10$ dm. Urči poměr objemů obou těles.

Řešení

Objem válce je

$$V_{\text{válec}} = \pi r^2 v = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 \doteq 785 \text{ dm}^3.$$



Pro výpočet objemu koule potřebujeme nejprve znát její poloměr. Z obrázku vidíme, že lze použít Pythagorovu větu

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \sqrt{50} \text{ dm}.$$

Objem koule je

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt{50})^3 \doteq 1481 \text{ dm}^3.$$

Odtud poměr objemů

$$V_{\text{koule}} : V_{\text{válec}} = 1481 : 785 \doteq 1,89 : 1.$$

Závěr. Objem koule je asi 1,89krát větší než objem válce.

Metodické poznámky

Zadání úlohy je náročnější v tom, že poloměr koule se musí dopočítat pomocí Pythagorovy věty. Zde je mnohem důležitější si správně nakreslit pomocný obrázek.

Úloha 3 (úroveň 3)

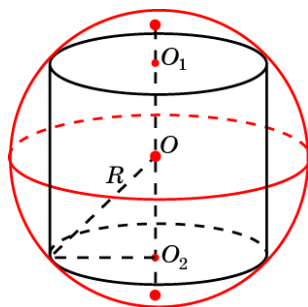
Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce a koule, prostorová představitost, Pythagorova věta, poměr, práce s proměnnou

Do koule s poloměrem R je vepsán válec tak, že hranice podstav válce leží na povrchu koule. Pro válec platí $d = v$. Urči poměr objemů obou těles. Kolik procent koule válec zabírá?

Řešení

Vztah pro výpočet objemu válce obsahuje poloměr podstavy. Pokud využijeme $v = 2r$, dostaneme

$$V_{\text{válec}} = \pi r^2 v = 2\pi r^3.$$



Pro výpočet objemu koule potřebujeme nejdříve získat poloměr koule R – využijeme Pythagorovu větu

$$R^2 = r^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{2}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit objem koule jako

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3.$$

Poměr objemů

$$V_{koule} : V_{válec} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3} : 1 \doteq 1,89 : 1.$$

Odpověď na druhou otázku najdeme např. ze vztahu

$$\frac{V_{válec}}{V_{koule}} \cdot 100 \% = \frac{2\pi r^3}{\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3} \cdot 100 \% \doteq 53 \%$$

Závěr. Objem koule je $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ krát větší než objem válce. Válec tvoří asi 53 % objemu koule.

Metodické poznámky

Obtížnost příkladu je zvýšená použitím proměnné, respektive obecným řešením. Ve výsledku používáme vyjádření pomocí iracionálních čísel, protože je bez nepřesností.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

http://ru.convdocs.org/pars_docs/refs/6/5273/5273.html_m2d23f4d5.png,

Obrázek koule ve válci: *Matematika*. [online]. 2011—2013 [cit. 2013-11-21]. Dostupné

<http://xn--clada6bq3a2b.xn--p1ai/test?theme=151>

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem, koule, krychle, poměr

Úloha 1 (úroveň 1–2)

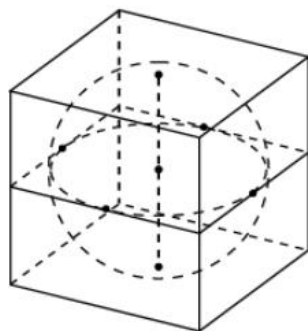
Předpokládané znalosti: výpočet objemu krychle a koule, prostorová představitivost, poměr

Koule je umístěna v krychli s hranou délky 10 cm tak, že se dotýká stěn krychle. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Označme poloměr koule r a $a = 10$ cm je hrana krychle, pak platí $r = \frac{a}{2} = 5$ cm. Objem krychle je

$$V_{\text{krychle}} = a^3 = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$



Objem koule je

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{500\pi}{3} \doteq 523,6 \text{ cm}^3$$

Poměr objemů tak je

$$V_{\text{krychle}} : V_{\text{koule}} = 1000 : 523,6 \doteq 1,9 : 1$$

Závěr. Objem krychle je asi 1,9krát větší než objem koule.

Metodické poznámky

Jestliže si žák správně nakreslí obrázek a určí vztah mezi délkou hrany krychle a poloměrem koule, potom je výpočet pouhým dosazením do vztahů pro objemy těles.

Úloha 2 (úroveň 2)

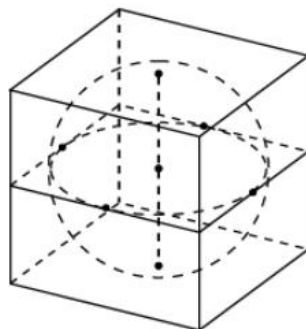
Předpokládané znalosti: výpočet objemu krychle a koule, prostorová představitivost, poměr, práce s proměnnou

Koule je umístěna v krychli s hranou délky a tak, že se dotýká stěn krychle. Určete poměr objemů obou těles.

Řešení

Obdobně jako u prvního příkladu platí, že objem krychle je $V_{krychle} = a^3$ a současně $a = 2r$. Objem koule pak je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi a^3.$$



Poměr objemů tak je

$$V_{krychle} : V_{koule} = a^3 : \frac{1}{6}\pi a^3 = 1 : \frac{1}{6}\pi$$

Závěr. Objem krychle je $\frac{6}{\pi}$ krát větší než objem koule.

Metodické poznámky

Úloha vychází z předchozí úlohy, ale je řešená obecně. A právě práce s proměnnou je pro studenty velmi obtížná.

Úloha 3 (úroveň 3)

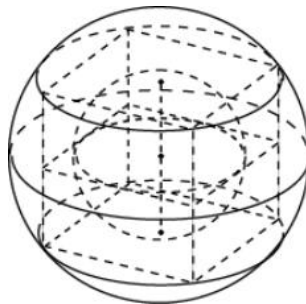
Předpokládané znalosti: výpočet objemu krychle a koule, prostorová představivost, Pythagorova věta, poměr, práce s proměnnou

Koule s poloměrem r je umístěna v krychli s hranou délky a tak, že se dotýká všech stěn krychle. Krychle je dále umístěna v kouli s poloměrem R tak, že vrcholy krychle leží na povrchu koule. Určete poměr objemů všech těles.

Řešení

Objem menší koule $V_m = \frac{4}{3}\pi r^3$. Jestliže a je hrana krychle, pak je objem krychle $V_k = a^3 = 8r^3$. Pro velkou kouli platí, že průměr koule je roven tělesové úhlopříčce krychle. Tedy platí

$$2R = a\sqrt{3}, \quad 2R = 2r\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{3}.$$



Objem velké koule tak je

$$V_v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(r\sqrt{3}\right)^3 = 4\sqrt{3}\pi r^3.$$

Poměr objemů těles

$$V_v : V_k : V_m = 4\sqrt{3}\pi r^3 : 8r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = 3\sqrt{3}\pi : 6 : \pi.$$

Závěr. Poměr objemů těles je $3\sqrt{3}\pi : 6 : \pi$.

Metodické poznámky

Řešitel musí správně určit poloměr velké koule pomocí poloměru malé koule. Jestliže si žák vzpomene (nebo dopočítá) délku tělesové úhlopříčky krychle pomocí poloměru r , potom s největší pravděpodobností správně dopočítá i objem tělesa. Určit poměr v závěrečném tvaru dokáží pouze talentovaní řešitelé matematických soutěží.

Zdroj: archiv autora,

Geometrie. [online]. [cit. 2013-07-18]. Dostupné <http://geometry2006.narod.ru/ege/B9.htm>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: povrch, koule, krychle, poměr

Úloha 1 (úroveň 1–2)

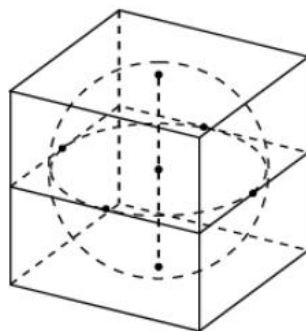
Předpokládané znalosti: výpočet povrchu krychle a koule, prostorová představivost, poměr

Koule je umístěna v krychli s hranou délky $a = 10$ cm tak, že se dotýká stěn krychle. Které těleso má větší povrch a kolikrát?

Řešení

Označme R poloměr koule. Zřejmě platí $R = \frac{a}{2} = 5$ cm, odtud povrch krychle je

$$S_{krychle} = 6a^2 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2.$$



Pro povrch koule platí

$$S_{koule} = 4\pi R^2 = \pi a^2 \doteq 314 \text{ cm}^2.$$

Poměr povrchů těles tak je

$$S_{krychle} : S_{koule} = 600 : 314 \doteq 1,91.$$

Závěr. Krychle má povrch přibližně 1,91krát větší.

Metodické poznámky

Žáci si musí ujasnit vztahy pro povrch těles a vztah mezi délkou hrany krychle a poloměrem (nebo průměrem) koule. Dále doporučuji dávat pozor na jednotky.

Úloha 2 (úroveň 2)

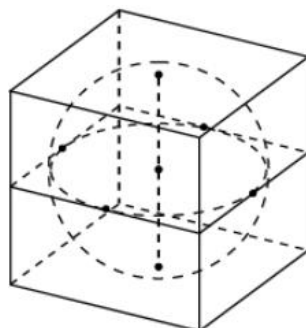
Předpokládané znalosti: výpočet povrchu krychle a koule, prostorová představivost, poměr, práce s proměnnou

Koule je umístěna v krychli s hranou délky a tak, že se dotýká stěn krychle. Které těleso má větší povrch a kolikrát?

Řešení

Zřejmě poloměr koule je $R = \frac{a}{2}$, odtud pro povrch krychle platí

$$S_{krychle} = 6a^2$$



a povrch koule je

$$S_{koule} = 4\pi R^2 = \pi a^2.$$

Tedy pro poměr povrchů dostaneme

$$S_{krychle} : S_{koule} = 6 : \pi \doteq 1,91.$$

Závěr. Krychle má povrch $\frac{6}{\pi}$ -krát větší.

Metodické poznámky

Úloha vychází z předchozí úvahy, jen jsou použité proměnné. Výsledek krásně ukazuje, že na stěně krychle ani na poloměru koule nezáleží (pokud se koule dotýká krychle).

Úloha 3 (úroveň 3)

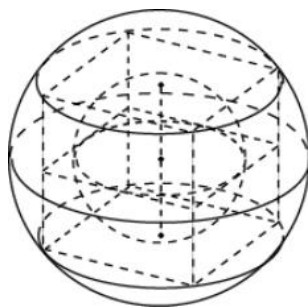
Předpokládané znalosti: výpočet objemu válce a koule, prostorová představitost, Pythagorova věta, poměr, práce s proměnnou

Koule s poloměrem r je umístěna v krychli s hranou délky a tak, že se dotýká všech stěn krychle. Krychle je dále umístěna v kouli s poloměrem R tak, že vrcholy krychle leží na povrchu koule. Kolikrát je povrch koule opsané krychli větší než povrch koule vepsané krychli?

Řešení

Povrch malé koule je $S_m = 4\pi r^2$. Hrana krychle má délku $a = 2r$, odtud vyjádříme povrch krychle $S_k = 6a^2 = 6(2r)^2 = 24r^2$. Průměr velké koule je roven tělesové úhlopříčce krychle. Tedy platí

$$2R = a\sqrt{3}, \quad 2R = 2r\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt{3}.$$



Povrch velké koule tak je

$$S_V = 4\pi R^2 = 4\pi (r\sqrt{3})^2 = 12\pi r^2.$$

Poměr povrchů koulí tak činí

$$S_V : S_m = 12\pi r^2 : (4\pi r^2) = 3.$$

Závěr. Velká koule má třikrát větší povrch než malá koule.

Metodické poznámky

Nejtěžší část úlohy je určit poloměr velké koule pomocí poloměru malé koule užití délky hrany krychle. Pokud se žák dostane ke správnému vyjádření, je další postup srozumitelný.

Zdroj: archiv autora,

Geometrie. [online]. [cit. 2013-07-18]. Dostupné <http://geometry2006.narod.ru/ege/B9.htm>

Obrazový materiál: dílo autora a zdroj

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Geometrie v rovině a v prostoru

Klíčové pojmy: objem, koule, kužel, poměr

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu kuželu a koule, prostorová představivost, poměr, Pythagorova věta

Kužel (strana pláště kužele a průměr jeho základny jsou shodné, tzv. *rovnostranný kužel*) je umístěn v kouli s poloměrem $R = 3$ cm. Urči poměr objemů obou těles.

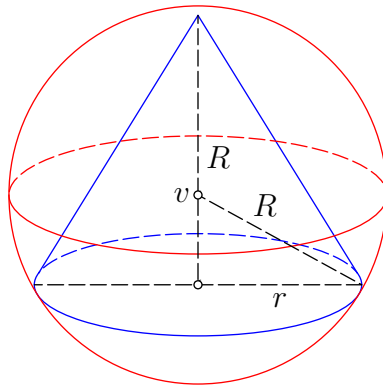
Řešení

Objem koule je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Dříve, než začneme počítat objem kužele, potřebujeme vyjádřit výšku v kužele a poloměr r podstavy. Výška kužele je shodná s výškou rovnostranného trojúhelníku. Jestliže pracujeme s rovnostranným trojúhelníkem, platí, že výška je shodná s těžnicí. A těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2. Odtud pro výšku platí

$$v = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R = \frac{9}{2} \text{ cm}.$$



Poloměr podstavy dopočítáme pomocí Pythagorovy věty

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}R^2, \quad \text{odtud} \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{3} \doteq 2,6 \text{ cm}.$$

Objem kužele je

$$V_{kužel} = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4}R^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3 = \frac{81}{8}\pi \text{ cm}^3.$$

Poměr objemů tak je

$$V_{koule} : V_{kužel} = 36\pi : \left(\frac{81}{8}\pi\right) = \frac{36}{\frac{81}{8}} = \frac{32}{9} = 32 : 9.$$

Závěr. Poměr objemu koule k objemu kužele je $32 : 9$.

Metodické poznámky

Žák si musí uvědomit, jak tělesa vypadají a jakým způsobem je kužel v kouli umístěn. Dále je důležitý poznatek o rozdělení těžnice v trojúhelníku v poměru $1 : 2$. Posledním problémem je pro některé žáky použití Pythagorovy věty, protože v této úloze dopočítáváme odvěsnu, nikoli přeponu. Další postup je otázkou dosazení do vztahů.

Úloha 2 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu kuželu a koule, prostorová představitost, poměr, Pythagorova věta, práce s proměnnou

Kužel (strana pláště kužele a průměr jeho základny jsou shodné, tzv. *rovnostanný kužel*) je umístěn v kouli s poloměrem R . Urči poměr objemů obou těles.

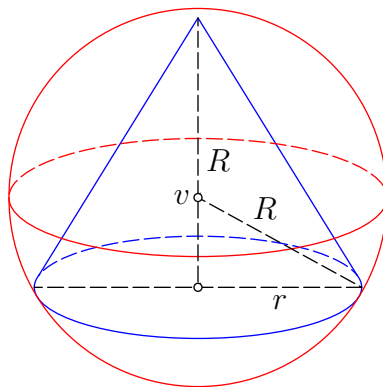
Řešení

Objem koule je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Dříve, než začneme počítat objem kužele, potřebujeme vyjádřit výšku kužele a poloměr podstavy. Výška kužele je shodná s výškou rovnostanného trojúhelníku. Jestliže pracujeme s rovnostanným trojúhelníkem, platí, že výška je shodná s těžnicí. A těžiště dělí těžnici v poměru $1 : 2$. Odtud pro výšku platí

$$v = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R.$$



Poloměr podstavy dopočítáme pomocí Pythagorovy věty

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}R^2, \quad \text{odtud} \quad r = \frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Objem kužele je

$$V_{kužel} = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4}R^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3.$$

Poměr objemů tak je

$$V_{koule} : V_{kužel} = \frac{4}{3}\pi R^3 : \left(\frac{3}{8}\pi R^3\right) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{8}} = \frac{32}{9} = 32 : 9.$$

Závěr. Objem koule k objemu kužele je 32 : 9.

Metodické poznámky

Úloha má stejný postup jako úloha 1. Její zvýšená obtížnost je v práci s proměnnou, kterou je potřeba neustále procvičovat.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výpočet objemu kuželu a koule, prostorová představivost, poměr, Pythagorova věta, práce s proměnnou

Koule s poloměrem R je umístěna v rovnostranném kuželu tak, že se dotýká jeho stěn. Urči poměr objemů obou těles.

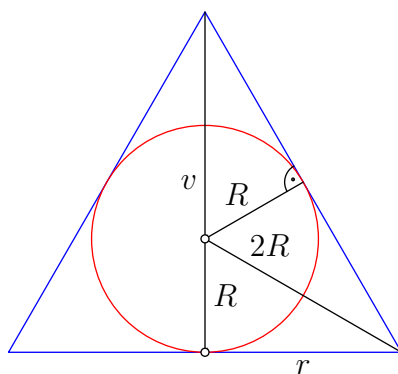
Řešení

Objem koule je

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Dříve než začneme vyjadřovat objem kužele, potřebujeme znát jeho výšku v a poloměr podstavy R , z obrázku vidíme $v = 3R$. Poloměr podstavy je

$$r^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2, \quad \text{odtud} \quad r = R\sqrt{3}.$$



Objem kužele je

$$V_{kužel} = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot (R\sqrt{3})^2 \cdot 3R = 3\pi R^3.$$

Poměr objemů tak je

$$V_{kužel} : V_{koule} = 3\pi R^3 : \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = 9 : 4.$$

Závěr. Objem kužele k objemu koule jemu vepsané je 9 : 4.

Metodické poznámky

Základem je správná představa, znalosti o těžnicích v trojúhelníku a správně použitá Pythagorova věta. I zde procvičujeme práci s proměnnou.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz