METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Typ úloh: Různé metody řešení

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: procento

Úloha

V parku je obsazeno 26 ze 40 laviček. Kolik procent laviček je volných?

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ, počet procent

Úlohu řešíme přes 1 procento. Celkem je v parku 40 laviček, což je 100 %, odtud 1 % je 0,4 lavičky. 26 laviček činí 65 % (26 : 0,4 = 65), tedy 35 % laviček je volných.

Závěr. V parku je 35 % volných laviček.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ, trojčlenka

$$40 \ldots\ldots\ldots\ldots 100\,\%$$
$$\underline{26 \ldots\ldots\ldots\ldots x\,\%}$$

$$\frac{40}{26} = \frac{100}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100 \cdot 26}{40} = 65\,\% \quad \Rightarrow \quad 100\,\% - 65\,\% = 35\,\%.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ

Úlohu vyřešíme dosazením do vzorce pro výpočet počtu procent. Označme p počet procent, c část základu a z základ, pak platí

$$p = \frac{c}{z} \cdot 100 = \frac{26}{40} \cdot 100 = 0{,}65 \cdot 100 = 65\,\%.$$

Odtud $100\,\% - 65\,\% = 35\,\%$.

Metodické poznámky

Odlišná řešení úlohy umožňují žákům ukázat vztah mezi různým pojetí pojmu procenta. Můžeme ji zadat jako samostatnou práci a diskutovat o výhodách a nevýhodách zvoleného řešení.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: procenta

Úloha

Sporák, jehož původní cena byla 12 000 Kč, byl dvakrát zlevněn. Nejprve o 25 %, později o 20 % z nové ceny. Určete konečnou cenu sporáku.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: procenta

1 % z 12 000 Kč je 120 Kč, proto 25 % je $25 \cdot 120 = 3\,000$ Kč. Cena po první slevě tedy je $12\,000 - 3\,000 = 9\,000$ Kč.

1 % z 9 000 Kč je 90 Kč, proto 20 % je $20 \cdot 90 = 1\,800$ Kč. Konečná cena po druhé slevě tak bude $9\,000 - 1\,800 = 7\,200$ Kč.

Závěr. Konečná cena sporáku je 7 200 Kč.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: procenta, trojčlenka

Do přehledné tabulky si doplníme údaje. První sleva (po slevě je 100 % − 25 % = 75 % původní ceny).

Počet procent	Kč
100 %	12 000
75 %	x

Úlohu je možné řešit pomocí trojčlenky – jde o přímou úměrnost.

$$x = \frac{12\,000 \cdot 75}{100} = \frac{120 \cdot 75}{1} = 9\,000.$$

Cena po první slevě je 9 000 Kč.

Druhá sleva (po slevě je 100 % − 25 % = 75 % původní ceny).

Počet procent	Kč
100 %	9 000
80 %	x

$$x = \frac{9\,000 \cdot 85}{100} = \frac{90 \cdot 80}{1} = 7\,200.$$

Závěr. Konečná cena sporáku je 7 200 Kč.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procenta, zlomky

25 % odpovídá $\frac{1}{4}$, proto 25 % je $12\,000 : 4 = 3\,000$. Cena po první slevě tak bude $12\,000 - 3\,000 = 9\,000$.

20 % odpovídá $\frac{1}{5}$, proto 20 % je $9\,000 : 5 = 1\,800$. Konečná cena po druhé slevě bude $9\,000 - 1\,800 = 7\,200$.

Závěr. Konečná cena sporáku je 7 200 Kč.

Metodické poznámky

Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků ve skupinách a následně diskutovat zvoleném řešení.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: základ, procenta

Úloha

Zmenšením neznámého čísla o 27 % dostaneme 438. Určete neznámé číslo.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ, počet procent

Úlohu řešíme přes 1 procento.

Platí:

$$\begin{aligned} &73\,\% \ldots\ldots\ldots\ldots 438,\\ &1\,\% \ldots\ldots\ldots\ldots 438 : 73 = 6,\\ &100\,\% \ldots\ldots\ldots\ldots 100 \cdot 6 = 600. \end{aligned}$$

Závěr. Neznámé číslo je číslo 600.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ, trojčlenka

$$\begin{array}{l} x \ldots\ldots\ldots\ldots 100\,\% \\ \underline{438 \ldots\ldots\ldots\ldots 73\,\%} \end{array}$$

$$\frac{100}{73} = \frac{x}{438} \qquad \Rightarrow \qquad x = 600.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ

Úlohu vyřešíme dosazením do vzorce pro výpočet počtu procent $z = \frac{c}{p} \cdot 100$, kde p je počet procent, c část základu a z základ

$$z = \frac{438}{73} \cdot 100 = 600.$$

Metodické poznámky

Odlišná řešení úlohy umožňují žákům ukázat vztah mezi různým pojetí pojmu procenta. Můžeme ji zadat jako samostatnou práci a diskutovat o výhodách a nevýhodách zvoleného řešení.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: úpravy výrazů s proměnnými, soustavy rovnic

Úloha

Úhlopříčka obdélníku má délku 29 cm, obvod obdélníku je 82 cm. Urči obsah obdélníku.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: dosazovací metoda, druhá mocnina dvojčlenu, Pythagorova věta, obvod a obsah obdélníku

Označme délky stran zadaného obdélníku x, y. Hledaný obsah bude $S = xy$. Podle zadání úlohy je $o = 2\,(x + y) = 82\,\mathrm{cm}$, tedy $x + y = 41\,\mathrm{cm}$. Úhlopříčka obdélníku je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami x, y, kde platí Pythagorova věta $x^2 + y^2 = 29^2$. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic s kladnými neznámými x, y

$$
\begin{aligned}
x + y &= 41,\\
x^2 + y^2 &= 29^2.
\end{aligned}
$$

Hledanou hodnotou je však součin xy. První rovnici umocníme a upravíme

$$
\begin{aligned}
(x + y)^2 &= 41^2,\\
x^2 + 2xy + y^2 &= 41^2,\\
2xy &= 41^2 - \left(x^2 + y^2\right).
\end{aligned}
$$

Dosadíme za výraz $x^2 + y^2$ z druhé rovnice a dopočítáme

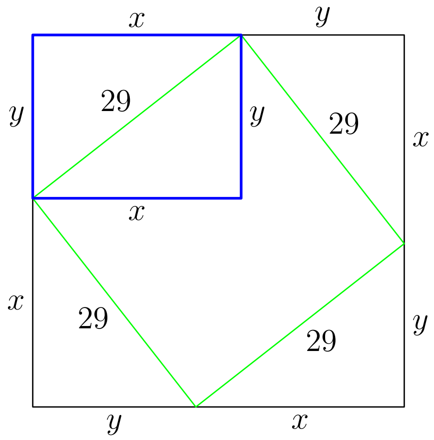
$$
\begin{aligned}
2xy &= 41^2 - 29^2,\\
xy &= 420.
\end{aligned}
$$

Závěr. Obdélník má obsah $420\,\mathrm{cm}^2$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obvod a obsah obdélníku, obsah pravoúhlého trojúhelníku

Označme délky stran zadaného obdélníku x, y. Hledaný obsah bude $S = xy$. Podle zadání úlohy je $o = 2\,(x + y) = 82\,\mathrm{cm}$, tedy $x + y = 41\,\mathrm{cm}$. Doplníme k obdélníku čtverec, jehož strana je úhlopříčka obdélníku, a vzniklému útvaru opíšeme další čtverec



Obr. 1

(viz obr. 1). Tento vnější čtverec má stranu délky $x + y = 41\,\mathrm{cm}$, jeho obsah je tedy $(x + y)^2 = 41^2 = 1681\,\mathrm{cm}^2$.

Velký čtverec je ovšem složen ze čtverce o straně délky $29\,\mathrm{cm}$ a čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami délek x, y. Obsah velkého čtverce je tedy součtem obsahů těchto útvarů, proto platí

$$
\begin{aligned}
29^2 + 4 \cdot \frac{xy}{2} &= 41^2,\\
841 + 2xy &= 1681,\\
xy &= 420.
\end{aligned}
$$

Závěr. Obdélník má obsah $420\,\mathrm{cm}^2$.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: dosazovací metoda, druhá mocnina dvojčlenu, řešení kvadratické rovnice, Pythagorova věta

Označme délky stran zadaného obdélníku x, y. Hledaný obsah bude $S = xy$. Podle zadání úlohy je $o = 2\,(x + y) = 82\,\mathrm{cm}$, tedy $x + y = 41\,\mathrm{cm}$. Úhlopříčka obdélníku je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami x, y, kde platí Pythagorova věta $x^2 + y^2 = 29^2$. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic s neznámými x, y

$$
\begin{aligned}
x + y &= 41,\\
x^2 + y^2 &= 29^2.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice vyjádříme neznámou $y = 41 - x$, dosadíme do druhé a upravíme

$$
\begin{aligned}
x^2 + (41 - x)^2 &= 29^2,\\
x^2 + 41^2 - 82x + x^2 - 29^2 &= 0,\\
x^2 - 41x + 420 &= 0.
\end{aligned}
$$

Určíme kořeny této kvadratické rovnice a dopočítáme odpovídající hodnoty druhé neznámé y

$$
x_{1,2} = \frac{-(-41) \pm \sqrt{(-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 420}}{2 \cdot 1} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1680}}{2} = \frac{41 \pm 1}{2}.
$$

Tedy

$$x_1 = \frac{41+1}{2} = 21, \qquad x_2 = \frac{41-1}{2} = 20,$$
$$y_1 = 41 - x_1 = 41 - 21 = 20, \qquad y_2 = 41 - x_2 = 41 - 20 = 21.$$

Závěr. Obdélník má obsah $S = x_1 y_1 = x_2 y_2 = 21 \cdot 20 = 20 \cdot 21 = 420\,\mathrm{cm}^2$.

Metodické poznámky

Řešení kvadratické rovnice nebo soustavy, která tuto rovnici zahrnuje, není obsaženo v RVP ZV. Řešení 1 však využívá pouze jednoduché dosazení a úpravu výrazů, Řešení 2 je založeno pouze na geometrickém vhledu. Naopak Řešení 3, které využívá vztahu pro hledání kořenů kvadratické rovnice, můžeme zahrnout do rozšiřujícího učiva. Různé přístupy k řešení úlohy umožňují ukázat vztah mezi geometrickou reprezentací dané situace a jejím algebraickým popisem. Zároveň je možno využít konfiguraci geometrických útvarů v Řešení 2 ke geometrickému důkazu Pythagorovy věty nebo k ilustraci vztahu pro druhou mocninu součtu.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek
Autor: PhDr. Lucie Růžičková; `lucie_ruzickova@seznam.cz`