

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Typ úloh: Různé metody řešení



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	6
Metodický list 3	8
Metodický list 4	10
Metodický list 5	12
Metodický list 6	14
Metodický list 7	16
Metodický list 8	19

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorická pravidla, permutace, variace i s opakováním, práce s tabulkou

Úloha

Mlsoun František si cestou z práce koupil v cukrárně čtyři zákusky: věneček, linecké kolečko, trubičku a ovocný košíček. Začal přemýšlet, který sní jako první, který jako poslední, prostě jaké pořadí pro sněžení zákusků si zvolí. Poradte mu, kolik možností má.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: práce s tabulkou

Vypíšeme všechny možnosti pořadí, jak může zákusky sníst. Zákusky si pro zjednodušení zápisu očíslováme.

Věneček	1
Linecké kolečko	2
Trubička	3
Ovocný košíček	4

Výsledky píšeme do tabulky.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Závěr. František má 24 možností jak postupně sníst čtyři různé zákusky.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kombinatorické pravidlo součinu

První zákusek si může vybrat ze 4 druhů, druhý už jen ze tří, třetí ze dvou a pro čtvrtý má už pouze jednu možnost. Použijeme kombinatorické pravidlo součinu a dostaneme $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností.

Závěr. František má 24 možností jak postupně sníst čtyři různé zákusky.

Řešení 3 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: permutace bez opakování

Jedná se o různé uspořádání 4 prvků (věneček, linecké kolečko, trubička, ovocný košíček) neboli o permutaci ze čtyř prvků bez opakování

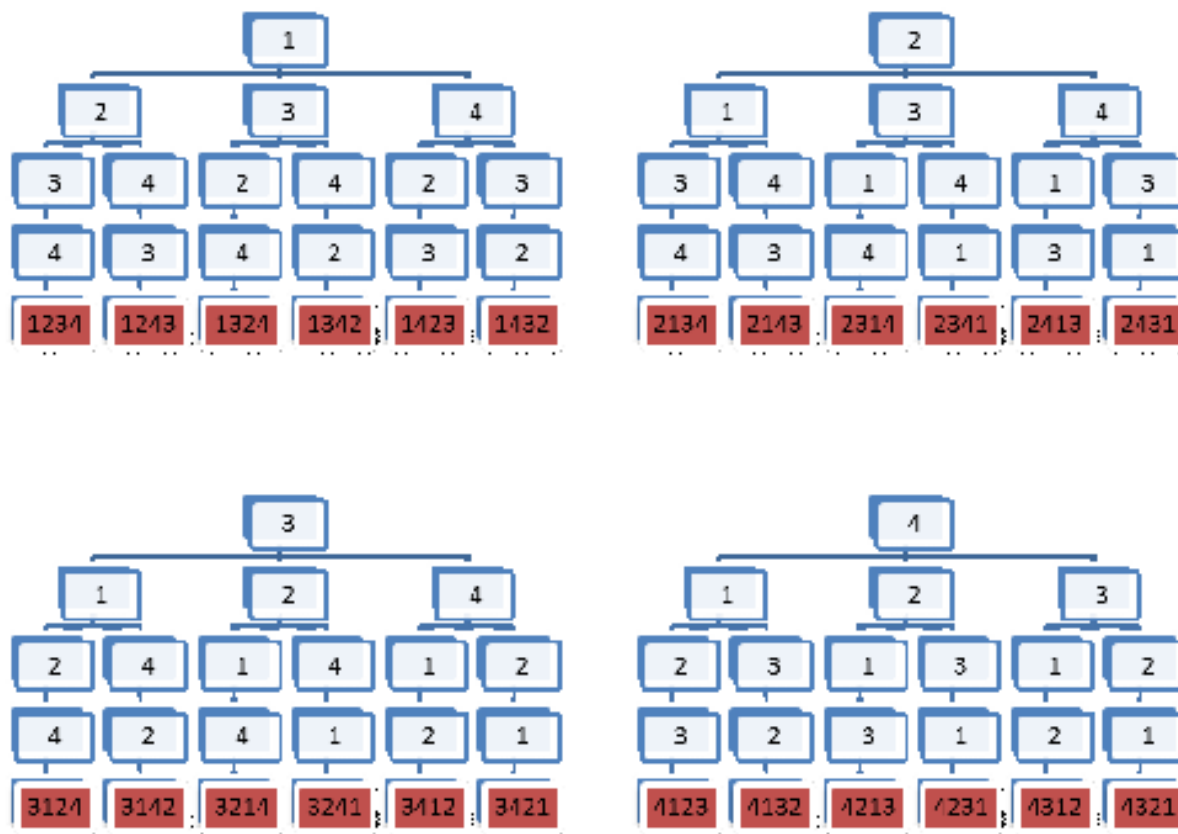
$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Závěr. František má 24 možností jak postupně sníst čtyři různé zákusky.

Řešení 4 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: práce s logickým stromem

Řešení můžeme znázornit pomocí logického stromu. Potřebujeme čtyři schémata, výsledné možnosti jsou červeně podbarveny.



Závěr. František má 24 možností jak postupně sníst čtyři různé zákusky.

Metodické poznámky

Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků a následně rozebrat jednotlivá řešení. Úlohu můžeme upravovat a postupně rozšiřovat například podle dále uvedených příkladů. Všechny jsou navrženy pro úroveň 1–2.

Možné variace této úlohy:

1. František má největší chuť na ovocný košíček a sní jej jako první. Poradte mu, kolik možností má nyní. [Řešení. Tabulkou, Kombinatorické pravidlo součinu $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, permutace $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.]
2. V cukrárně mu omylem místo ovocného košíčku zabalí další věneček. Domů si tedy donese dva věnečky, jedno linecké kolečko a jednu trubičku. Kolik možností má v této

situaci? [*Řešení*. Zápisem do tabulky

1123	2113
1132	2131
1213	2311
1312	3112
1231	3121
1321	3211

Permutace s opakováním $P'_{2!1!1!}(4) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$, můžeme řešit také logickým úsudkem, že možností oproti původnímu zadání bude o polovinu méně.]

3. Františka navštíví kamarádka Magda a přistihne ho, jak se chystá sníst poslední zákusek. Aby zabránila Františkovi v dalším mlsání, zákusek mu sní. V jakých sledech mohl František tři zákusky spořádat a jaká je pravděpodobnost, že Magda mu snědla jeho oblíbený ovocný košíček? [*Řešení*. Opět můžeme řešit výpisem možností, například do tabulky (je to přehledné)

123	213	312	412
132	231	321	421
124	214	314	413
142	241	341	431
134	234	324	423
143	243	342	432

Nyní se jedná o trojice tvořené ze 4prvkové množiny, žádný prvek se neopakuje, tedy variace bez opakování $V_3(4) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Pro výpočet můžeme použít kombinatorické pravidlo součinu. První zákusek si může vybrat ze 4 druhů, druhý už jen ze tří, třetí ze dvou $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. *Závěr*. Možností je 24. Jsou čtyři druhy zákusků a pravděpodobnost, že Magda mu snědla ovocný košíček je tedy 25 %.]

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika, binomická věta

Úloha

Bez výpočtů jednotlivých kombinačních čísel vyjádřete

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}.$$

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: binomická věta

Základním krokem k výpočtu je využití binomické věty

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Volbou $a = 1$, $b = 1$ a $n = 8$ dostaneme

$$(1 + 1)^8 = \binom{8}{0}1^8 + \binom{8}{1}1^7 \cdot 1^1 + \binom{8}{2}1^6 \cdot 1^2 + \dots + \binom{8}{7}1^1 \cdot 1^7 + \binom{8}{8}1^8.$$

Celkově je tedy

$$2^8 = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}.$$

Závěr. Hledaný součet je $2^8 = 256$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vlastnosti kombinačních čísel

Nejprve si uvědomíme, co vyjadřují jednotlivá kombinační čísla. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet všech k prvkových podmnožin n prvkové množiny. Hledaný součet je tedy vyjádřením počtu všech možných podmnožin osmiprvkové množiny.

Pro nalezení celkového počtu podmnožin můžeme využít kombinatorické pravidlo součinu. Pro každý z osmi prvků jsou právě dvě možnosti, zda do dané podmnožiny náleží či nikoli. Počet všech podmnožin je tedy dán jako variace s opakováním osmé třídy ze dvou prvků, tj.

$$V'_8(2) = 2^8 = 256.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: binomická věta, vlastnosti kombinačních čísel

Využijeme-li součtového vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

vidíme, že

$$\binom{8}{1} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1}, \quad \binom{8}{2} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2}, \dots, \binom{8}{7} = \binom{7}{6} + \binom{7}{7}.$$

Protože

$$\binom{8}{0} = \binom{7}{0} = 1, \quad \binom{8}{8} = \binom{7}{7} = 1,$$

je hledaný součet roven

$$\begin{aligned} \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} &= \\ &= 2\binom{7}{0} + 2\binom{7}{1} + 2\binom{7}{2} + \dots + 2\binom{7}{6} + 2\binom{7}{7} = \\ &= 2 \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \right]. \end{aligned}$$

Opakováním daného postupu dostaneme

$$\begin{aligned} \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} &= \\ &= 2 \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \right] = \\ &= 2^2 \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \right] = \dots \\ &= 2^7 \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right] = 2^7 \cdot 2 = 2^8 = 256. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Vyjádření daného součtu je možné více způsoby, ať už z binomické věty nebo na základě kombinatorických pravidel. Třetí způsob je ve své podstatě základem důkazu pomocí matematické indukce, která je jedním z velmi silných důkazových prostředků. Využití různých přístupů nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika, binomická věta, základní kombinatorické identity

Úloha

Bez výpočtů jednotlivých kombinačních čísel dokažte identitu

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = \binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{7}.$$

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: binomická věta

Základním krokem k výpočtu je využití binomické věty

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Volbou $a = 1$, $b = -1$ a $n = 8$ dostaneme

$$(1-1)^8 = \binom{8}{0}1^8 - \binom{8}{1}1^7 \cdot 1^1 + \binom{8}{2}1^6 \cdot 1^2 - \dots - \binom{8}{7}1^1 \cdot 1^7 + \binom{8}{8}1^8.$$

Máme tak

$$0 = \binom{8}{0} - \binom{8}{1} + \binom{8}{2} - \dots - \binom{8}{7} + \binom{8}{8},$$

tj.

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = \binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{7}.$$

Závěr. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vlastnosti kombinačních čísel

Využijeme-li součtového vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

snadno vidíme, že

$$\binom{8}{1} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1}, \quad \binom{8}{2} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2}, \dots, \binom{8}{7} = \binom{7}{6} + \binom{7}{7}.$$

Protože

$$\binom{8}{0} = \binom{7}{0} = 1, \quad \binom{8}{8} = \binom{7}{7} = 1,$$

můžeme jak levou, tak i pravou stranu dokazované rovnosti přepsat do tvaru

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7},$$

tím je identita dokázána.

Poznámka. Dokázali jsme tak, že počet podmnožin s lichým počtem prvků osmiprvkové množiny je stejný jako počet podmnožin se sudým počtem prvků této množiny.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vlastnosti kombinačních čísel

Nejprve si uvědomíme, co vyjadřují jednotlivá kombinační čísla. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ vyjadřuje počet všech k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny. Chceme tedy ukázat, že počet podmnožin, které mají sudý počet prvků, je stejný jako počet podmnožin, které mají lichý počet prvků.

Označme a_8 jeden z prvků dané osmiprvkové množiny. Bez tohoto prvku můžeme vytvářet nejvýše sedmiprvkové podmnožiny. Nechť je takových podmnožin a s lichým počtem prvků a b se sudým počtem prvků. Doplníme-li libovolnou podmnožinu s lichým počtem prvků prvkem a_8 , bude mít sudý počet členů, doplníme-li tímto prvkem podmnožinu se sudým počtem prvků, změní se počet prvků na liché číslo. Počet podmnožin s lichým počtem prvků proto vzroste o hodnotu b a počet podmnožin se sudým počtem prvků vzroste o hodnotu b . Celkově je tedy $a + b$ podmnožin se sudým a $a + b$ podmnožin s lichým počtem prvků.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že k libovolné podmnožině sedmiprvkové množiny s lichým (resp. se sudým) počtem prvků je možné jednoznačně přiřadit podmnožinu se sudým (resp. s lichým) počtem prvků (jako její komplement), je nutně $a = b$.

Metodické poznámky

Důkaz daného tvrzení nepatří mezi početně náročné, ale vyžaduje určitý náhled na danou problematiku. Využití různých přístupů nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika, binomická věta

Úloha

Bez výpočtů jednotlivých kombinačních čísel vyjádřete

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} + \binom{9}{9}.$$

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: binomická věta, vlastnosti kombinačních čísel

Základním krokem k výpočtům je důsledek binomické věty ve tvaru

$$2^9 = (1 + 1)^9 = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}. \quad (1)$$

Jednou ze základních vlastností kombinačních čísel je

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Protože

$$\binom{9}{1} = \binom{9}{8}, \quad \binom{9}{3} = \binom{9}{6}, \quad \binom{9}{5} = \binom{9}{4}, \quad \binom{9}{7} = \binom{9}{2}, \quad \binom{9}{9} = \binom{9}{0},$$

je hledaný součet roven součtu zbývajících kombinačních čísel vyskytujících se v (1), proto hodnota zkoumaného součtu bude tedy poloviční, tj.

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} + \binom{9}{9} = \frac{2^9}{2} = 2^8.$$

Závěr. Hledaný součet je tedy $2^8 = 256$.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: binomická věta, vlastnosti kombinačních čísel

Využijeme-li kromě vztahu

$$2^9 = (1 + 1)^9 = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}$$

také vztah

$$0 = (1 - 1)^9 = \binom{9}{0} - \binom{9}{1} + \binom{9}{2} - \dots + \binom{9}{8} - \binom{9}{9},$$

dostaneme rozdílem obou vztahů

$$2^9 = 2 \cdot \binom{9}{1} + 2 \cdot \binom{9}{3} + 2 \cdot \binom{9}{5} + 2 \cdot \binom{9}{7} + 2 \cdot \binom{9}{9},$$

tj.

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} + \binom{9}{9} = \frac{2^9}{2} = 2^8.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: binomická věta, vlastnosti kombinačních čísel

Využijeme-li součtového vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

snadno vidíme, že

$$\begin{aligned} \binom{9}{1} &= \binom{8}{0} + \binom{8}{1}, & \binom{9}{3} &= \binom{8}{2} + \binom{8}{3}, \\ \binom{9}{5} &= \binom{8}{4} + \binom{8}{5}, & \binom{9}{7} &= \binom{8}{6} + \binom{8}{7}. \end{aligned}$$

Protože

$$\binom{9}{9} = \binom{8}{8} = 1,$$

je hledaný součet roven

$$\begin{aligned} &\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7} + \binom{9}{9} = \\ &= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Použitý vztah (1) vyjadřuje mimochodem počet všech různých podmnožin dané devítiprvkové množiny. Obtížnost daných postupů spočívá převážně v nalezení příslušných vztahů mezi kombinačními čísly. Využití různých přístupů však nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika, kombinace bez opakování, permutace s opakováním

Úloha

Kolika způsoby lze rozdělit mezi 20 dětí 4 lízátka, 6 žvýkaček a 8 bonbonů, jestliže každé dítě dostane nejvýše 1 sladkost? (Lízátka, bonbony i žvýkačky jsou vzájemně nerozlišitelné.)

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, pravidlo součinu

Děti, které dostanou lízátko, lze vybrat $\binom{20}{4} = 4\,845$ způsoby. Ze zbylých 16 dětí vybereme 6, které dostanou žvýkačku, to lze provést $\binom{16}{6} = 8\,008$ způsoby. Z posledních 10 dětí vybereme 8, které dostanou bonbon. Těchto výběrů je $\binom{10}{8} = 45$.

Celkově je podle pravidla součinu

$$\binom{20}{4} \cdot \binom{16}{6} \cdot \binom{10}{8} = 4\,845 \cdot 8\,008 \cdot 45 = 1\,745\,944\,200$$

způsobů, jak rozdělit sladkosti mezi děti.

Závěr. Mezi děti lze rozdělit sladkosti 1 745 944 200 způsoby.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, permutace

Nejprve vybereme 18 dětí, které dostanou sladkost. To lze provést $\binom{20}{18} = 190$ způsoby. Ostatní děti lze uspořádat $18!$ způsoby. Děti, které dostaly lízátko, můžeme přemístit $4!$ způsoby, děti, které dostaly žvýkačku, lze přemístit $6!$ způsoby, a ty, co dostaly bonbon, lze uspořádat $8!$ způsoby. Celkový počet možných rozdělení tedy je

$$\binom{20}{18} \cdot \frac{18!}{4! \cdot 6! \cdot 8!} = 1\,745\,944\,200.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: permutace s opakováním

Celkový počet 20 dětí máme rozdělit na 4 skupiny, a to následovně. 4 děti dostanou lízátko, 6 dětí dostane žvýkačku, 8 dětí dostane bonbon a 2 děti nedostanou nic. Hledáme tedy permutace s opakováním, kdy první prvek je zastoupen čtyřikrát, druhý šestkrát, třetí osmkrát a čtvrtý dvakrát. Celkově máme

$$\frac{20!}{4! \cdot 6! \cdot 8! \cdot 2!} = 1\,745\,944\,200$$

způsobů, jak sladkosti dětem rozdělit.

Metodické poznámky

K výslednému vztahu lze, jak je vidět, dojít více způsoby. Využití různých přístupů však nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika v geometrii

Úloha

Je dána krychle a uvnitř každé hrany je $n \in \mathbb{N}$ různých bodů. Určete počet trojúhelníků, jejichž každý vrchol leží na jiné hraně krychle.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: pravidlo součinu v kombinatorice, aneb „selský rozum“

Vybereme jednu libovolnou hranu krychle, což lze provést 12 způsoby, a na ní vybereme jeden libovolný bod, což lze provést n způsoby. Pak ze zbylých 11 hran vybereme jednu libovolnou, což lze provést 11 způsoby, a na ní jeden libovolný bod, což lze provést n způsoby. Nakonec ze zbylých 10 hran vybereme jednu libovolnou, což lze provést 10 způsoby, a na ní jeden libovolný bod, což lze provést n způsoby.

Celkem jsme tedy vybrali $12n \cdot 11n \cdot 10n$ trojic bodů. Každá trojice byla vybrána ale šestkrát, což se dá ukázat např. na třech bodech A, B, C , jednou jako trojice ABC , podruhé jako trojice ACB , potřetí jako trojice BAC , počtvrté jako trojice BCA , popáté jako trojice CAB a pošesté jako trojice CBA . Proto se musí výše získaný součin dělit šesti, tj.

$$\frac{12n \cdot 11n \cdot 10n}{6} = 220n^3.$$

Závěr. Počet hledaných trojúhelníků je $220n^3$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pravidlo součinu v kombinatorice, kombinace bez opakování

Vybereme libovolné tři různé hrany krychle, což lze provést $\binom{12}{3}$ způsoby a na každé hraně vybereme jeden libovolný bod, což lze pro každou hranu provést n způsoby. Celkem jsme tedy vybrali $\binom{12}{3} \cdot n^3 = 220n^3$ trojic bodů, neboli $220n^3$ požadovaných trojúhelníků.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravidlo součinu v kombinatorice, kombinace bez opakování

Na krychli je dáno $12n$ různých bodů. Z nich vytvoříme všechny možné trojice bodů, což lze povést $\binom{12n}{3}$ způsoby. Mezi těmito trojicemi bodů jsou i takové, které leží na jedné přímce, a tudíž netvoří trojúhelník. Těch je na každé hraně $\binom{n}{3}$, takže celkem $12\binom{n}{3}$, a tyto všechny je třeba odečíst. Také je třeba odečíst počet takových trojic bodů, z nichž

právě dva leží na jedné hraně. Těch je $12\binom{n}{2} \cdot 11n$, neboť dva body leží na jedné hraně, ale dalších $11n$ bodů leží na zbylých hranách. Celkem jsme tedy vybrali

$$\begin{aligned}\binom{12n}{3} - 12\binom{n}{3} - 12\binom{n}{2} \cdot 11n &= \\ &= 2n(12n-1)(12n-2) - 2n(n-1)(n-2) - 6n(n-1) \cdot 11n = \\ &= 2n(144n^2 - 36n + 2 - n^2 + 3n - 2 - 33n^2 + 33n) = 220n^3\end{aligned}$$

požadovaných trojúhelníků.

Při tomto způsobu řešení je nutné, aby na každé hraně krychle byly aspoň tři různé body, tj. $n \geq 3$. Pro $n = 2$ je počet trojúhelníků roven

$$\binom{12n}{3} - 12\binom{n}{2} \cdot 11n = 2n(144n^2 - 36n + 2 - 33n^2 + 33n) = 2n(111n^2 - 3n + 2),$$

což je na první pohled jiná hodnota než $220n^3$. Když se ale dosadí $n = 2$ do obou výrazů, získáme stejnou hodnotu. Pro $n = 1$ je počet trojúhelníků roven

$$\binom{12n}{3} = 2n(144n^2 - 36n + 2),$$

což je na první pohled jiná hodnota než $220n^3$. Když se ale dosadí $n = 1$ do obou výrazů, získáme stejnou hodnotu.

Metodické poznámky

Jde o klasickou školní úlohu, která bývá zadána ve formě „určit počet trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na několika přímkách, přičemž na každé přímce leží určitý počet bodů“. Využije se pouze „selský rozum“ a vzorec pro výpočet počtu kombinací. Velmi netradiční jsou úvahy ve třetím způsobu řešení pro $n = 1$, resp. $n = 2$, určité jsou ale pro talentovanější žáky důležité.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

severní a západní hranici sítě, se můžeme dostat právě jedním způsobem. Do každého dalšího bodu se můžeme dostat buď ze severu, nebo ze západu. Například do bodu P se můžeme dostat buď z bodu, který leží na sever od bodu P , nebo z bodu, který leží na západ od bodu P . Do bodu, který leží na sever od bodu P , se můžeme dostat a způsoby. Do bodu, který leží na západ od bodu P , se můžeme dostat b způsoby. Z toho plyne, že počet způsobů, kterými se můžeme dostat do bodu P je roven $a + b$. Postupným přiřazováním počtu procházek od bodu Z zjišťujeme, že do bodu K se dostaneme 210 způsoby.

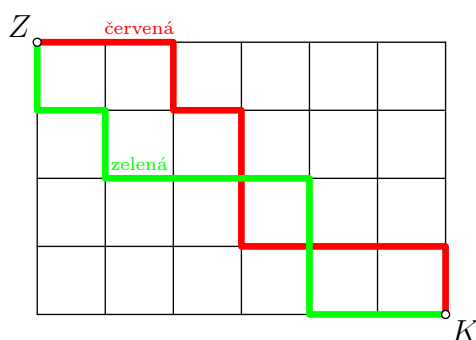
Je zřejmé, že tímto způsobem vznikl Pascalův trojúhelník s vrcholem v bodě Z . To znamená, že počet procházek je dán kombinačním číslem. Počtu procházek, kterými se dostaneme do bodu P , odpovídá kombinační číslo $\binom{4+3}{4}$. Obdobně počtu procházek, kterými se dostaneme do bodu K , odpovídá kombinační číslo $\binom{6+4}{6}$.

Závěr. Z obce Začátek do obce Konec lze projít celkem $\binom{10+6}{4} = \binom{10+6}{6} = 210$ způsoby.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování

Dvě procházky (červenou a zelenou) ze Z do K (obr. 3) můžeme znázornit následující tabulkou.



Obr. 3

Procházka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
červená	—	—		—			—	—	—	
zelená		—		—	—	—			—	—

Těmito dvěma procházkám odpovídají čtyřčlenné a šestičlenné kombinace bez opakování, které tvoříme z 10 prvků:

- Čtyřčlenné – jde o kombinace $\{3, 5, 6, 10\}$, $\{3, 1, 8, 7\}$.
- Šestičlenné – jde o kombinace $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$, $\{10, 4, 5, 6, 9, 2\}$.

Je zřejmé, že pokud chceme absolvovat procházku ze Z do K na obr. 3, musíme vždy jít čtyři úseky na jih a šest úseků na východ. To znamená, že počet procházek bude počet všech čtyřčlenných, popřípadě počet všech šestičlenných kombinací bez opakování, které tvoříme z 10 prvků. To znamená, že počet všech procházek na obr. 3 je $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$.

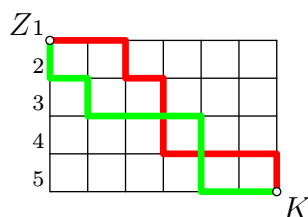
Závěr. Opět z obce Začátek do obce Konec lze projít celkem $\binom{10+6}{4} = \binom{10+6}{4} = 210$ způsoby.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinace s opakováním

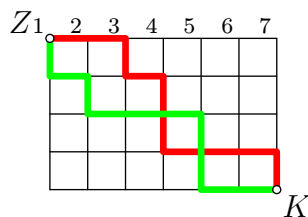
Vodorovné úseky sítě označíme čísly 1 až 5, svislé úseky sítě čísly 1 až 7. Dvěma procházkám ze Z do K pak odpovídají šestičlenné kombinace s opakováním z pěti prvků (obr. 4) a čtyřčlenné kombinace s opakováním ze sedmi prvků (obr. 5).

1. Šestičlenné – jde o kombinace $\{1, 1, 2, 4, 4, 4\}$, $\{2, 3, 3, 3, 5, 5\}$.



Obr. 4

2. Čtyřčlenné – jde o kombinace $\{3, 4, 4, 7\}$, $\{1, 2, 5, 5\}$.



Obr. 5

Počet procházek podle obr. 4 bude počet šestičlenných kombinací s opakováním z pěti prvků, jejich počet se rovná kombinačnímu číslu $\binom{5+6-1}{6}$.

Počet procházek podle obr. 5 bude počet čtyřčlenných kombinací s opakováním ze sedmi prvků, jejich počet se rovná kombinačnímu číslu $\binom{7+4-1}{4}$.

Závěr. Z obce Začátek do obce Konec lze projít celkem $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$ způsoby.

Metodické poznámky

Tři odlišné přístupy umožní žákům ukázat užití kombinací bez opakování, kombinací s opakováním a Pascalova trojúhelníku při řešení jednoduché kombinatorické úlohy. Úlohu je vhodné zadat při opakování učiva kombinatoriky.

Zdroj:

Calda, E. a kol.: *Matematika pro gymnázia (kombinatorika, pravděpodobnost a statistika)*, Prometheus, 1993.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnost, kombinace, permutace, pravděpodobnost jevu, násobení pravděpodobností

Úloha

V osudí je 10 kuliček: 5 modrých, 3 bílé a 2 zelené. K osudí přistupují hráči, každý si vytáhne jednu kuličku a ponechá si ji. Jaká je pravděpodobnost, že si hráč, který jde losovat jako $(k + 1)$ -ní, tedy v pořadí $(k + 1)$, kde $0 \leq k \leq 9$, vytáhne zelenou kuličku?

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rozbor jevů, sčítání a násobení pravděpodobností a znalost vzorce pro součet kombinačních čísel

Zelenou kuličku si hráč může vylosovat pouze tehdy, pokud hráči před ním do té doby vytáhli z osudí nejvýše jednu zelenou kuličku. Probereme obě vylučující se možnosti – že si hráči před ním nevytáhli žádnou nebo právě jednu zelenou kuličku.

První možnost

- Jev $\mathcal{A}_1$: Dosud lovalo k hráčů a zelenou kuličku nevylosovali. Tažená k -tice kuliček byla tedy vylosována z 8 kuliček jiné barvy než zelené

$$P(\mathcal{A}_1) = \frac{\binom{8}{k}}{\binom{10}{k}}.$$

- Jev $\mathcal{A}_2$: Hráč, který losuje jako $(k + 1)$ -ní si vylosuje jednu ze dvou zelených kuliček z osudí, kde je celkem $(10 - k)$ kuliček (přičemž zde platí $k \leq 8$)

$$P(\mathcal{A}_2) = \frac{2}{10 - k}.$$

Druhá možnost

- Jev $\mathcal{B}_1$: Dosud lovalo k hráčů a během losování vylosovali právě jednu ze dvou zelených kuliček. Tažená k -tice kuliček byla tedy vylosována takto: jedna kulička ze dvojice zelených a $(k - 1)$ kuliček z 8 kuliček jiné barvy než zelené

$$P(\mathcal{B}_1) = 2 \cdot \frac{\binom{8}{k-1}}{\binom{10}{k}}.$$

- Jev $\mathcal{B}_2$: Hráč, který losuje jako $(k+1)$ -ní, si vylosuje jedinou zbývající zelenou kuličku z osudí, kde je celkem $(10 - k)$ kuliček

$$P(\mathcal{B}_2) = \frac{1}{10 - k}.$$

Hráč, který je na tahu, si tedy v případě $\mathcal{A}$ (hráči před ním zelenou nevytáhli) vylosuje zelenou kuličku s pravděpodobností

$$P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_2) = \frac{\binom{8}{k}}{\binom{10}{k}} \cdot \frac{2}{10 - k}.$$

Hráč, který je na tahu, si v případě $\mathcal{B}$ (hráči před ním vytáhli jednu zelenou kuličku) vylosuje zelenou kuličku s pravděpodobností

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}_1) \cdot P(\mathcal{B}_2) = 2 \cdot \frac{\binom{8}{k-1}}{\binom{10}{k}} \cdot \frac{1}{10 - k}.$$

Jevy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ se navzájem vylučují, proto je pravděpodobnost jejich sjednocení rovna součtu jejich pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) &= \frac{\binom{8}{k}}{\binom{10}{k}} \cdot \frac{2}{10 - k} + 2 \cdot \frac{\binom{8}{k-1}}{\binom{10}{k}} \cdot \frac{1}{10 - k} \\ &= \frac{2}{10 - k} \cdot \frac{1}{\binom{10}{k}} \cdot \left(\binom{8}{k} + \binom{8}{k-1} \right) \\ &= \frac{2}{10 - k} \cdot \frac{\binom{9}{k}}{\binom{10}{k}} = \frac{2}{10 - k} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (9 - k + 1)}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (10 - k + 1)} \\ &= \frac{2}{10 - k} \cdot \frac{10 - k}{10} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Závěr. Pravděpodobnost, že si hráč, který jde losovat v pořadí $(k+1)$, vytáhne zelenou kuličku, je $\frac{1}{5} = 0,2$.

Metodické poznámky

První z uvedených řešení vyžaduje kompletní rozbor jevů, sčítání a násobení pravděpodobností a znalost vzorce pro součet kombinačních čísel. Všimneme si, že výsledná pravděpodobnost nezávisí na pořadí hráče (na čísle k) a je stejná, jako kdyby hráči po vytažení kuličku vraceli zpět do osudí.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rozbor jevů, sčítání a násobení pravděpodobností

Kuličky si označíme tak, aby byly všechny navzájem rozlišitelné, například je očíslovujeme (to můžeme udělat bez újmy na obecnosti). Necht zelené kuličky mají čísla 1, 2. Zopakujeme předchozí úvahu: Zelenou kuličku si hráč může vylosovat pouze tehdy, pokud hráči před ním do té doby vytáhli z osudí nejvýše jednu – tedy žádnou nebo jednu – zelenou kuličku. Obě možnosti mají společné to, že dosud tažené kuličky byly vybrány pouze z 9 kuliček, v kuličkách, ze kterých hráči nakonec vybrali, chyběla jedna ze dvou zelených kuliček.

Jev $\mathcal{C}$: Dosud losovalo k hráčů a nevylosovali obě zelené kuličky, jedna ze dvou ve výběru nebude. Buď chybí kulička č. 1 nebo kulička č. 2

$$P(\mathcal{C}) = 2 \cdot \frac{\binom{9}{k}}{\binom{10}{k}}.$$

Jev $\mathcal{D}$: Hráč $(k+1)$ -ní si vylosuje tu zbývající zelenou kuličku z $(10-k)$ kuliček v osudí

$$P(\mathcal{D}) = \frac{1}{10-k}.$$

Výsledná pravděpodobnost je

$$P(\mathcal{C}) \cdot P(\mathcal{D}) = 2 \cdot \frac{\binom{9}{k}}{\binom{10}{k}} \cdot \frac{1}{10-k} = \dots = \frac{1}{5} \quad (\text{viz výpočet v řešení 1}).$$

Metodické poznámky

Druhá z uvedených úvah vyžaduje náročnější úvahu o skupinách vybíraných prvků. Všimneme si, že výsledná pravděpodobnost nezávisí na pořadí hráče (na čísle k) a je stejná, jako kdyby hráči po vytažení kuličku vraceli zpět do osudí.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: permutace

Kuličky si stejně jako v Řešení 2 označíme tak, aby byly všechny navzájem rozlišitelné, očíslovujeme je.

Každý „průběh hry“ – tj. každé možné pořadí tažených kuliček – je jedna permutace deseti prvků.

Všechny permutace (je jich $10!$) jsou navzájem stejně pravděpodobné. Každá kulička se na každé pozici vyskytne při výčtu všech permutací „stejně-krát“ ($9!$ krát).

V každé permutaci je zelená kulička právě na dvou místech.

Zadání bude splněno právě tehdy, když na pozici $(k + 1)$ bude buď kulička č. 1, nebo tehdy, když na pozici $(k + 1)$ bude kulička č. 2. Tyto možnosti se navzájem vylučují. Jev $\mathcal{E}$: Kulička na pozici $(k + 1)$ je zelená, tedy je to buď kulička č. 1, nebo kulička č. 2.

$$P(\mathcal{E}) = 2 \cdot \frac{9!}{10!} = \frac{1}{5}.$$

Metodické poznámky

Poslední z úvah téměř nevyžaduje výpočet, zato ale ukazuje obecný princip, proč je každé z pořadí pro tah kuličky dané barvy stejně pravděpodobné.

Zdroj: archiv autora, autor

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz