

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	6
Metodický list 3	8
Metodický list 4	10
Metodický list 5	12
Metodický list 6	16
Metodický list 7	18
Metodický list 8	21
Metodický list 9	24
Metodický list 10	28
Metodický list 11	32
Metodický list 12	35
Metodický list 13	38
Metodický list 14	43
Metodický list 15	46
Metodický list 16	50
Metodický list 17	53

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorické pravidlo součinu, variace, permutace

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kombinatorické pravidlo součinu

Z místa A do místa B vedou 4 turistické cesty, z místa B do místa C vedou 3 turistické cesty. Určete, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět?

Řešení

Nejprve určíme, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C . Ke každému ze čtyř způsobů, jak dojít z A do B , existují tři způsoby, jak se dostat z B do C . Trasu z A do C je tedy možno vybrat dvanácti způsoby, trasu zpět opět můžeme vybrat dvanácti způsoby. Ke každému výběru trasy z A do C existuje 12 možností výběru trasy zpět, tedy trasu z A do C a zpět lze zřejmě vybrat ze 144 způsobů.

Závěr. Počet způsobů, kterými lze vybrat cestu z místa A do místa C a zpět, je roven 144.

Metodické poznámky

Úloha je vhodná pro demonstraci kombinatorického pravidla součinu ale i pro samostatnou práci žáků i bez znalosti tohoto pravidla.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinatorické pravidlo součinu, variace

V České republice byly státní poznávací značky tvořeny uspořádanou sedmicí, z nichž první tři prvky byly písmena a následující čtyři číslice. Určete, kolik poznávacích značek by bylo k dispozici, kdybychom pro první část použili každé z 27 písmen a třetí část by obsahovala právě tři trojky?

Řešení

První část státní poznávací značky je tvořena uspořádanou trojicí vybranou z 27 znaků, které se mohou opakovat, jde tedy o trojčlenné variace s opakováním z 27 prvků. Počet těchto uspořádaných trojic je

$$V'_3(27) = 27^3 = 19\,683.$$

Druhá část poznávací značky je tvořena uspořádanou čtveřicí, která má obsahovat právě tři trojky, tj. tři trojky a jednu cifru různou od trojky, označme ji X . Uspořádání tří trojek a prvku X je zřejmé

$$X333, \quad 3X33, \quad 33X3, \quad 333X,$$

tj. jedná se o čtyři způsoby uspořádání. Ke každému ze čtyř uspořádání tří trojek a prvku X existuje právě 9 možností výběru prvku X , odtud celkový počet uspořádaných čtveřic, které obsahují právě tři trojky, je zřejmě 36.

Při výběru první trojice existuje právě 19 683 možností a pro výběr následující čtveřice, nezávisle na výběru předcházející trojice, máme 36 možností. Podle kombinatorického pravidla součinu existuje právě

$$V_3'(27) \cdot 4 \cdot 9 = 708\,588$$

různých státních poznávacích značek, které obsahují právě tři trojky.

Závěr. Různých státních poznávacích značek, které by obsahovaly právě tři trojky, bylo celkem k dispozici 708 588.

Metodické poznámky

Úlohu lze využít k procvičení problematiky zaměřené na variace s opakováním i bez opakování, ale také ji mohou řešit i žáci bez této znalosti.

Určení počtu uspořádání tří trojek a prvku X bylo řešeno výčtem všech možností, což lze také řešit s využitím permutací s opakováním.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinatorické pravidlo součinu, permutace

Při výrobě výrobku je třeba provést čtyři operace A , B , C , D , pro které platí následující podmínky:

1. Operace A nesmí být prováděna první a operace B nesmí být prováděna poslední.
2. Operaci D musíme provést dříve než operaci C .

Kolik různých postupů existuje při výrobě tohoto výrobku?

Řešení

Počet možných výrobních postupů bez stanovení podmínek odpovídá počtu permutací bez opakování ze 4 prvků, tj.

$$P(4) = 4! = 24.$$

Nejprve určíme, počet všech výrobních postupů vyhovujících první podmínce. Počet výrobních postupů, kdy operace A je prováděna první, je roven počtu permutací bez opakování z 3 prvků, tj. $P(3) = 3! = 6$. Analogicky počet výrobních postupů, kdy operace B je prováděna poslední, je $P(3) = 3! = 6$. Dále počet výrobních postupů, kdy operace A je prováděna první a operace B poslední, je zřejmě roven $P(2) = 2! = 2$. Odtud počet všech výrobních postupů, kdy operace A je prováděna první nebo operace B je prováděna poslední, je

$$P(3) + P(3) - P(2) = 10.$$

Tedy počet výrobních postupů, kdy operace A není prováděna první a operace B není prováděna poslední, odpovídá rozdílu počtu všech výrobních postupů a počtu těch, kdy A je první nebo B je poslední, tj.

$$P(4) - [P(3) + P(3) - P(2)] = 14.$$

Zřejmě ke každému výrobnímu postupu splňující první podmínku existuje právě jeden výrobní postup lišící se záměnou pořadí operací C , D . Odtud právě polovina výrobních postupů vyhovujících první podmínce splňuje i druhou podmínku, tj. celkem 7 výrobních postupů.

Závěr. Pro výrobu výrobku existuje právě sedm různých výrobních postupů splňujících obě podmínky.

Metodické poznámky

Úlohu lze modifikovat stanovením dalších podmínek či zavedením dalších operací.

Zdroj:

Calda, E., Dupač, V., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Bušek, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika, permutace

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: faktoriály, permutace, kombinatorické pravidlo součinu

Kolika způsoby můžeme posadit do řady tři prváky, tři druháky a tři třetáky tak, aby na obou krajích seděli studenti prvního ročníku?

Řešení

Máme celkem 9 míst, na která máme umístit 9 studentů. Na první místo (krajní) máme tři možnosti umístění (jeden ze 3 studentů prvního ročníku), na poslední místo (krajní) máme 2 možnosti (jeden ze dvou zbývajících studentů prvního ročníku). Zůstává nám umístit 7 studentů na 7 míst, podle kombinatorického pravidla součinu máme $7!$ možností. Celkem tedy máme $3 \cdot 2 \cdot 7! = 30\,240$ možností.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy využíváme kombinatorické pravidlo součinu.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: faktoriály, permutace, kombinatorické pravidlo součinu

Kolika způsoby můžeme posadit do řady tři prváky, tři druháky a tři třetáky tak, aby

- a) všichni studenti prvního ročníku seděli vedle sebe,
- b) všichni studenti stejného ročníku seděli vedle sebe?

Řešení

- a) Žáky prvního ročníku vezmeme jako jeden prvek, takže máme umístit celkem 7 prvků na 7 míst, tedy je $7!$ možností pro tato umístění. Žáci prvního ročníku si mohou vyměnit místa $3!$ způsoby, takže podle kombinatorického pravidla součinu máme celkem $7! \cdot 3! = 30\,240$ možností rozsazení.
- b) Žáky stejného ročníku vezmeme jako jeden prvek, máme tedy umístit 3 prvky na 3 místa, tedy $3!$ možností. Žáci stejného ročníku si mohou vyměnit místa $3!$ způsoby, takže máme $3! \cdot (3!)^3 = (3!)^4 = 1\,296$ možností jejich rozsazení.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy využíváme kombinatorické pravidlo součinu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: faktoriály, permutace, kombinatorické pravidlo součinu, princip inkluze a exkluze

Kolika způsoby můžeme posadit do řady tři prváky, tři druháky a tři třetáky tak, aby žádní tři studenti stejného ročníku neseděli vedle sebe?

Řešení

Máme celkem 9 míst, na která máme umístit 9 studentů, celkový počet rozsazení je tedy $9!$. Označme N hledaný počet rozsazení, platí $N = 9! - n$, kde n je počet rozsazení, kdy aspoň jedna trojice žáků téhož ročníku sedí vedle sebe.

Pro n platí

$$n = |M_1 \cup M_2 \cup M_3|,$$

kde M_i jsou ta rozsazení, kdy žáci i -tého ročníku sedí vedle sebe.

Pro počet prvků sjednocení množin M_1, M_2, M_3 platí

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup M_3| &= |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_2 \cap M_3| - \\ &\quad - |M_1 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|. \end{aligned}$$

Přitom pro počty rozsazení platí $|M_i| = 7! \cdot 3!$, protože žáky i -tého ročníku vezmeme jako 1 nový prvek, rozsadíme 7 prvků ($7!$ možností), žáci i -tého ročníku se mohou vyměnit $3!$ způsoby. Dále platí $|M_i \cap M_j| = 5! \cdot (3!)^2$, žáky i -tého ročníku vezmeme jako 1 nový prvek, žáky j -tého ročníku vezmeme jako druhý nový prvek, dále máme zbývajících 3 prvky, celkem tedy 5 prvků, tj. $5!$ možností rozsazení, v každé ze dvou skupin žáků i -tého a j -tého ročníku je $3!$ možností rozsazení

$$|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 3! (3!)^3 = (3!)^4,$$

žáky 1. ročníku vezmeme jako jeden prvek, žáky 2. ročníku vezmeme jako druhý prvek a žáky 3. ročníku jako třetí prvek, máme tedy 3 prvky, tj. $3!$ možností jejich rozsazení, v každé skupině se mohou žáci rozsadit $3!$ způsoby.

Pro n dostáváme

$$n = |M_1 \cup M_2 \cup M_3| = 3 \cdot 7! \cdot 3! - 3 \cdot 5! \cdot (3!)^2 + (3!)^4 = 90\,720 - 12\,960 + 1\,296 = 79\,056.$$

Pro N pak dostaneme

$$N = 9! - 79\,056 = 362\,880 - 79\,056 = 283\,824.$$

Metodické poznámky

Náročnost úlohy spočívá v tom, že k vyřešení je třeba znát nejen kombinatorické pravidlo součinu, ale také princip inkluze a exkluze pro tři množiny (počet prvků sjednocení tří množin).

Zdroj: archiv autora, Mathrace 2012, sada 2

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Machačíková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: permutace a jejich počet

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: permutace a jejich počet

V lavici je 5 hochů, z nichž 2 bratři chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby je možné ty hochy přesadit?

Řešení

Permutací, které mají pevně na prvních dvou místech bratry a na ostatních místech zbývajících 3 chlapce je $4!$ Permutací dvou bratrů je $2!$ Celkem tedy je $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$ permutací.

Závěr. Chlapce můžeme přesadit 48 způsoby.

Metodické poznámky

Permutace z n prvků je uspořádaná n -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje právě jednou. Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je

$$P(n) = V(n, n) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: cyklické permutace

Dokažte, že v desítkové soustavě aritmetický průměr 3 trojčiferných čísel, tvořících 3 cyklické permutace, je vždy celé číslo dělitelné 37.

Řešení

Číslice označíme a, b, c . Čísla jsou $100a + 10b + c$, $100b + 10c + a$ a $100c + 10a + b$. Jejich aritmetický průměr je

$$\frac{111a + 111b + 111c}{3} = \frac{111}{3}(a + b + c) = 37(a + b + c),$$

kde $a + b + c$ je celé číslo.

Závěr. V desítkové soustavě aritmetický průměr 3 trojčiferných čísel, tvořících 3 cyklické permutace, je vždy celé číslo dělitelné 37.

Metodické poznámky

Je třeba znát zápis čísla v desítkové soustavě a umět vytvořit cyklickou záměnu. Permutace nazýváme cyklické, jestliže je vytvoříme z libovolné uspořádané n -tice čísel postupnou cyklickou záměnou čísl.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: cyklické permutace

Určete v desítkové soustavě trojmístné číslo, které je aritmetickým průměrem obou svých cyklických permutací a má se k jejich rozdílu jako 7 : 9.

Řešení

Dané číslo je $100a + 10b + c$. První cyklickou permutací je $100b + 10c + a$, druhou je $100c + 10a + b$, jejich součet je $11a + 101b + 110c$ a jejich rozdíl je $9a + 99b + 90c$. Podle zadání, máme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned}100a + 10b + c &= 11a + 101b + 110c, \\(100a + 10b + c) : (9a + 99b + 90c) &= 7 : 9.\end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned}7a - 3b - 4c &= 0, \\31a + 29b - 23c &= 0.\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu dvou lineárních kvadratických rovnic o třech neznámých vázané podmínkou, aby kořeny byly celé, kladné a v intervalu $\langle 0; 10 \rangle$. Položíme

$$a = \frac{3b + 4c}{7}$$

a dosadíme do obou rovnic. Dostaneme

$$\begin{aligned}93b + 124c - 203b - 161c &= 0, \\8b - c &= 0.\end{aligned}$$

Řešení jsou $b = 0$, $c = 0$, což není možné a $b = 1$, $c = 8$, $a = 5$. Číslo je 518.

Závěr. Úloze vyhovuje číslo 518.

Metodické poznámky

Řešená soustava je příkladem tzv. diofantické soustavy rovnic. *Diofantická rovnice* (někdy též *diofantovská*) v matematice je neurčitá polynomiální rovnice, která dovoluje proměnným nabývat pouze hodnot z oboru celých čísel. Diofantovské problémy mají méně rovnic než neznámých a zahrnují nalezení celých čísel, která jsou řešením pro všechny rovnice soustavy. Slovo diofantické odkazuje k helénskému matematikovi z 3. století, *Diofantovi z Alexandrie* v Egyptě, který takové rovnice studoval a byl také jedním z prvních matematiků, který zavedl symbolismus v algebře.

Zdroj:

Maška, O. *Matematika v úlohách. Algebra a geometrie*. Nakladatelství Barvič a Novotný, Brno, 1947.

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: variace, kombinace, permutace

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kombinační číslo, binomická věta

Určete pátý člen binomického rozvoje výrazu

$$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^7.$$

Existuje v tomto rozvoji člen neobsahující x ?

Řešení

k -tý člen binomického rozvoje je

$$\binom{7}{k-1} (x^3)^{7-k+1} \left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1},$$

pátý člen má tvar

$$\binom{7}{4} (x^3)^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^4 = \frac{7}{4} x^5.$$

Předpokládejme, že k -tý člen neobsahuje x , musí pro něj platit

$$(x^3)^{7-k+1} \left(-\frac{1}{x^{k-1}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(7-k+1) - (k-1) = 0.$$

Řešením poslední rovnice je $k = \frac{25}{4}$, což však není celé nezáporné číslo. Vzhledem k významu k jako pozice určitého členu v binomickém rozvoji musí být k přirozené. Odtud plyne, že takové k neexistuje.

Závěr. Pátý člen rozvoje má tvar $\frac{7}{4}x^5$ a v binomickém rozvoji neexistuje člen neobsahující x .

Metodické poznámky

V binomickém rozvoji $(a+b)^n$ je k -tý člen rozvoje $a_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$. Pro řešení výše uvedené úlohy je vhodnější užít vztah pro člen a_{k+1} , kde platí $a_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (zejména pro slabší žáky).

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kartézský součin množin

Trezor má dvojí dveře, které jsou opatřeny zámkem s trojmístným kódem. Určete největší počet pokusů potřebných k otevření obou dveří.

Řešení

Máme-li vybrat $a \in A$ a prvek $b \in B$ je počet všech možných výběrů uspořádaných dvojic (a, b) roven $|A| \cdot |B| = |A \times B|$, což je počet všech prvků kartézského součinu $A \times B$. Na otevření jednoho zámku opatřeného trojmístným kódem využijeme kartézského součinu $(A \times A \times A)$, proto potřebujeme (podle principu součinu) nejvýše $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ pokusů. Obdobně u druhého zámku.

Závěr. K otevření trezoru potřebujeme nejvýše 2000 pokusů.

Metodické poznámky

Je vhodné odkázat se na již dříve probírané „pravidlo součinu“. Je patrné, že jeden čtyřmístný kód (viz PIN kód u kreditních karet) je „bezpečnější“, než dva trojmístné.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kanonický rozklad na součin prvočinitelů, dělitelnost, faktoriál

Kolika nulami končí číslo $258!$

Řešení

Zajímá nás vlastně, kolikrát se v rozkladu čísla $258!$ vyskytuje číslo $10 = 2 \cdot 5$. Protože mocnina dvojky v prvočíselném rozkladu je větší než mocnina pětky (každý druhý činitel čísla $258! = 258 \cdot 257 \cdot 256 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ je sudý, kdežto pěti je dělitelný každý pátý činitel), stačí zjistit jaká je mocnina pětky.

Každé páté číslo je dělitelné pěti. Takových je 51. Každé pětadvacáté číslo je navíc dělitelné $5^2 = 25$ – takových je 10. Konečně každé stopětadvacáté číslo je navíc dělitelné číslem $5^3 = 125$ – taková jsou 2. Celkem 63. Prvočíselný rozklad čísla $258!$ proto obsahuje 63 pětek. K nim zřejmě najdeme 63 dvojek.

Závěr. Číslo $258!$ končí 63 nulami.

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit jako klasickou nerovnici. Řešení užitím vlastnosti polynomiálních funkcí je elegantnější a kratší.

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál: vlastní

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnost, množina možných výsledků, náhodný jev

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: hrací kostka, pojem množina

Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu hrací kostkou padne liché číslo?

Řešení

Najdeme množinu Ω všech možných výsledků uvažovaného pokusu – hodu kostkou. Možných výsledků je šest:

$$\Omega = \{\text{padne 1, padne 2, padne 3, padne 4, padne 5, padne 6}\}$$

Všechny prvky takto zkonstruované množiny Ω jsou rovnocenně dosažitelné!

Nyní vybereme podmnožinu A množiny Ω (nazýváme ji náhodný jev), která obsahuje příznivé možnosti, tj.

$$A = \{\text{padne 1, padne 3, padne 5}\}.$$

Protože všechny prvky množiny Ω jsou rovnocenné, jedná se o výpočet *klasické pravděpodobnosti*, kdy

$$P(A) = \frac{\text{počet prvků } A}{\text{počet prvků } \Omega}.$$

Závěr. Hledaná pravděpodobnost toho, že při hodu kostkou padne liché číslo, je tedy

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Analogické úlohy:

1. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne číslo menší než 3?
2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne orel?
3. Jaká je pravděpodobnost, že při vyjmutí karty z úplného balíčku karet na mariáš vytáhneme eso?

Metodické poznámky

Podmínka *všechny prvky množiny Ω jsou rovnocenné*, je nezbytně nutná k tomu, aby bylo možné počítat klasickou pravděpodobnost. Kdybychom stanovili např. $\Omega = \{\text{padne 1, padne 3, padne 5, padne sudé číslo}\}$, pak nejsou všechny prvky množiny Ω rovnocenné a nelze použít vzorec pro výpočet klasické pravděpodobnosti, jde o pravděpodobnost neklasickou. Pak se postupuje takto: Každé možnosti ω přiřadíme číslo v (tzv. váhu), které vyjadřuje míru očekávání, že tento výsledek nastane, přitom součet vah všech prvků Ω musí být roven 1. Jestliže nebudeme žádnou možnost preferovat (klasická pravděpodobnost je speciálním případem), pak je rozumné přiřadit všem možnostem ω_1 až ω_6 stejnou váhu, v naší úloze: $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v$. Je tedy $6v = 1$ a $v = 1/6$. Dále určíme náhodný jev A , tj. $A = \{\text{padne 1, padne 3, padne 5}\}$. Nakonec sečteme váhy prvků jevu A , a to je hledaná pravděpodobnost, že nastane jev A . V našem případě tedy $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: množinové operace

Uvažujme hod dvěma hracími kostkami (červenou, modrou). Uvažujme následující jevy:

- A součet bodů je 7,
- B na červené kostce padne šestka,
- C na červené kostce padne nejvýš pět bodů,
- D součet bodů na obou kostkách bude menší než 20,
- E součet bodů na obou kostkách bude roven 13,
- F na červené kostce padne číslo menší než na modré,
- G na modré kostce nepadne víc bodů než na červené.

Jaká je pravděpodobnost nastoupení každého z těchto jevů?

Řešení

Množina Ω všech možných výsledků má celkově 36 prvků. Zapišeme je do tabulky ve formě (i, j) , kde i označuje počet bodů, které padly na červené kostce, j počet bodů, které padly na modré kostce. Všechny uvedené možnosti mají stejnou váhu, jedná se tedy o výpočet klasické pravděpodobnosti.

$\begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Můžeme zapsat

$$A = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\},$$

$$B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\},$$

$$C = \Omega \setminus B,$$

$$D = \Omega,$$

$$E = \emptyset,$$

$$F = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$

$$(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4),$$

$$(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\},$$

$$G = \Omega \setminus F.$$

Závěr. Jde o klasickou pravděpodobnost, proto $P(A) = 6/36 = 1/6$, $P(B) = 1/6$, $P(C) = (36 - 6)/36 = 5/6$ (všimněte si, že $C = \Omega \setminus B$ a $P(C) = 1 - P(B)$), $P(D) = 1$, $P(E) = 0$, $P(F) = 15/36$, $P(G) = 1 - 15/36 = 21/36$.

Metodické poznámky

Doporučujeme upozornit na vztah mezi pravděpodobností jevu a jeho doplňku, tj.: Jestliže $A = \Omega \setminus B$, pak platí $P(A) = 1 - P(B)$. Úloha 2 byla mj. vybrána jako ilustrace této skutečnosti.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: jev, jev opačný, vztah mezi jejich pravděpodobnostmi, variace, rostoucí posloupnost

Kolik osob musí přijít na večírek, aby pravděpodobnost toho, že na večírku jsou aspoň dvě osoby, mající narozeniny ve stejný den, byla větší než 0,5? (Uvažujeme pouze nepřestupné roky a předpokládáme, že pravděpodobnost toho, že se dítě narodí v určitý den, je stejná po celý rok.) [tzv. *problém večírku*]

Řešení

Označíme symbolem A jev, že mezi n osobami na večírku existují aspoň 2 lidé se stejným dnem narození, a vypočteme $P(A)$. V tomto případě je ale výhodné užít pro výpočet $P(A)$ opačný jev A^c , tedy jev, že ve skupině n osob neexistují 2 lidé se stejným dnem narození. Mezi pravděpodobnostmi nastoupení jevu A a nastoupení jevu A^c je vztah

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

(Nastane-li A , nemůže nastat A^c , a obráceně.) Tento vztah byl ilustrován v příkladu 2.

Pravděpodobnost toho, že nastane jev A^c je

$$P(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

pravděpodobnost toho, že nastane jev A je

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Nyní hledáme n tak, aby

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} > \frac{1}{2}.$$

Protože $P(A)$ představuje rostoucí posloupnost kladných reálných čísel, řešení dostaneme dosazením za n . Pro $n = 22$ je $P(A) = 0,4757$, pro $n = 23$ je $P(A) = 0,5073$.

Závěr. Ve skupině musí být aspoň 23 osob.

Metodické poznámky

Doporučujeme připomenout vztah mezi pravděpodobností jevu a jeho doplňku, tj. jestliže $A = \Omega \setminus B$, pak $P(A) = 1 - P(B)$. K výpočtu $P(A^c)$ v naší úloze lze užít kombinatorického principu součinu, nebo variací bez opakování.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: klasická pravděpodobnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: definice pravděpodobnosti jevu

V osudí je 5 bílých kuliček a 3 černé kuličky. Náhodně vytáhneme jednu kuličku a vrátíme ji do osudí. Totéž provedeme ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že při druhém tahu vytáhneme černou kuličku?

Řešení

Při prvním i druhém tahu je stejná situace. Máme k dispozici 8 kuliček a z nich jsou 3 černé, proto při druhém tahu vytáhneme černou kuličku s pravděpodobností $p = \frac{3}{8}$.

Závěr. Hledaná pravděpodobnost je $p = \frac{3}{8}$.

Metodické poznámky

Jde o klasický výpočet pravděpodobnosti jako podílu počtu všech příznivých výsledků a počtu všech možných výsledků. Je vhodné celou situaci vyzkoušet v praxi, neboť počet kuliček je malý.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: definice pravděpodobnosti jevu, jednoduchá podmíněná pravděpodobnost (spíše „selský rozum“)

V osudí je 5 bílých kuliček a 3 černé kuličky. Náhodně vytáhneme jednu kuličku a nevrátíme ji do osudí. Totéž provedeme ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že při druhém tahu vytáhneme černou kuličku?

Řešení

Využijeme úvahu z úlohy 1. Při prvním tahu vytáhneme buď černou kuličku, nebo bílou kuličku. Vytáhneme-li černou (s pravděpodobností $\frac{3}{8}$) a při druhém tahu také máme vytáhnout černou (s pravděpodobností $\frac{2}{7}$), je v tomto případě pravděpodobnost rovna $p_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$. Vytáhneme-li při prvním tahu bílou kuličku (s pravděpodobností $\frac{5}{8}$) a při druhém tahu máme vytáhnout černou (s pravděpodobností $\frac{3}{7}$), je v tomto případě pravděpodobnost rovna $p_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$. Jelikož může nastat jedna nebo druhá možnost, je celková hledaná pravděpodobnost rovna

$$p = p_1 + p_2 = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

Závěr. Hledaná pravděpodobnost je $p = \frac{3}{8}$.

Metodické poznámky

K řešení této úlohy byla použita podmíněná pravděpodobnost, aby navazovaly úlohy 1 a 2. Je ale možné použít jen klasické definice pravděpodobnosti, a to tak, že se spočítají všechny možnosti, jak se mohou vytáhnout dvě kuličky najednou – počet možností je zde $8 \cdot 7$ – a pak jak vytáhnout dvě černé kuličky – počet možností je zde $3 \cdot 2$ – a pak v pořadí bílou a černou kuličku – počet možností je zde $5 \cdot 3$. Překvapivý je zde výsledek. Stejný výsledek nastane i při třetím tahu, případně dále. Žáci by mohli hledat vysvětlení.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: definice pravděpodobnosti jevu, jednoduchá podmíněná pravděpodobnost (spíše „selský rozum“)

V osudí je 5 bílých kuliček a 3 černé kuličky. Náhodně vytáhneme jednu kuličku a nevrátíme ji do osudí, ale přidáme tam jednu kuličku druhé barvy. Totéž provedeme ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že při druhém tahu vytáhneme černou kuličku?

Řešení

Využijeme úvahy z předchozích úloh a budeme postupovat již rychleji. Při prvním tahu vytáhneme buď černou kuličku, nebo bílou kuličku. Vytáhneme-li černou (s pravděpodobností $\frac{3}{8}$), přidáme bílou a při druhém tahu vytáhneme černou (s pravděpodobností $\frac{2}{8}$), je v tomto případě pravděpodobnost rovna

$$p_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64}.$$

Vytáhneme-li při prvním tahu bílou kuličku (s pravděpodobností $\frac{5}{8}$), přidáme černou a při druhém tahu vytáhneme černou (s pravděpodobností $\frac{3}{8}$), je v tomto případě pravděpodobnost rovna

$$p_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}.$$

Celková hledaná pravděpodobnost je rovna

$$p = p_1 + p_2 = \frac{6}{64} + \frac{15}{64} = \frac{21}{64} < \frac{3}{8}.$$

Závěr. Hledaná pravděpodobnost je $p = \frac{21}{64}$.

Metodické poznámky

K řešení této úlohy byla použita podmíněná pravděpodobnost jako v úloze 2. Je ale možné opět použít jen klasické definice pravděpodobnosti. Výsledek je oproti předchozím úlohám jiný. Žáci by mohli dopředu tipovat, zda bude výsledek stejný/menší/větší v porovnání s předchozími úlohami.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: jevy, pravděpodobnosti jevů, sčítání pravděpodobností, jevy nezávislé neboli navzájem se nevylučující

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: sčítání pravděpodobností jevů

Házeme hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že hodíme liché číslo nebo číslo větší než 2?

Řešení

Označme A jev, že padne liché číslo, B jev, že padne číslo větší než 2. $C = A \cup B$ sjednocení jevů, které se navzájem nevylučují.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Závěr. Pravděpodobnost, že hodíme liché číslo nebo číslo větší než 2 je $\frac{5}{6}$.

Metodické poznámky

Vzorec pro sčítání pravděpodobností jevů A , B je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

naše jevy jsou nezávislé neboli nevylučují se navzájem, tedy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: pravděpodobnost jevu

Ve třídě je 30 žáků, z nichž 6 není připraveno na ústní zkoušení. V hodině budou vyvoláni 3 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň dva budou připraveni?

Řešení

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{24}{2} \binom{6}{1} + \binom{24}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{\frac{24 \cdot 23}{2 \cdot 1} \cdot 6 + \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 3 + 4 \cdot 23 \cdot 22}{5 \cdot 29 \cdot 28} \\ &= \frac{23(72 + 88)}{5 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{23 \cdot 160}{29 \cdot 140} = \frac{23 \cdot 8}{29 \cdot 7} = \frac{184}{203} \doteq 0,91. \end{aligned}$$

Závěr. Pravděpodobnost, že budou aspoň dva žáci připraveni je 0,91.

Metodické poznámky

Pravděpodobnost jevu A , značíme ji $P(A)$, se definuje jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A , což lze vyjádřit vzorcem

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

kde zápis vpravo značí součet těch čísel $p(\omega)$, která odpovídají prvkům $\omega \in A$.
V případě, že pokus má m stejně pravděpodobných pokusů, je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

kde $m(A)$ je počet výsledků příznivých jevů A .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: jevy nezávislé, jevy opačné, pravděpodobnosti jevů a počítání s nimi

Kolikrát musíme hodit kostkou, aby alespoň jednou padla šestka s pravděpodobností větší než 0,999 99?

Řešení

Předpokládejme n hodů. Označme A_i jev, že padne šestka v i -tém hodu. A označme jev, že padne alespoň jedna šestka.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Opačný jev je

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

Jevy jsou navzájem nezávislé.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,99999, \\ -\left(\frac{5}{6}\right)^n &> -0,000\,01, \quad \setminus \cdot (-1) \\ \left(\frac{5}{6}\right)^n &< 0,000\,01, \\ \log\left(\frac{5}{6}\right)^n &< \log 0,000\,01, \\ n \log \frac{5}{6} &< -5, \quad \setminus : \log \frac{5}{6} (< 0) \\ n &> \frac{-5}{\log \frac{5}{6}}, \\ n &> 64. \end{aligned}$$

Kostkou musíme hodit alespoň 64 krát.

Závěr. Kostkou musíme hodit alespoň 64 krát, aby alespoň jednou padla šestka s pravděpodobností větší než 0,999 99.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: definice pravděpodobnosti, opačný jev, kombinace, permutace, De Morganovy vzorce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: výpočet pravděpodobnosti, kombinace, permutace

Čtyři kamarádi šli na výstavu a v šatně si odložili batohy. Když odcházeli, tak jim šatnářka vydávala jejich batohy zcela náhodně.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že každému podá ten správný?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že právě dva chlapci dostanou svůj batoh?
- c) Jaká je pravděpodobnost, že právě tři dostanou svůj batoh?

Řešení

- a) Všechny možnosti vydání batohů jsou $4!$. Možnost, že každý bude mít svůj je pouze jedna. Tedy pravděpodobnost tohoto jevu vypočítáme $\frac{1}{4!} \doteq 0,0417$.
- b) Možností výběru batohů pro dva chlapce je $\binom{4}{2}$, pravděpodobnost tohoto jevu vypočítáme $\binom{4}{2}/4! = \frac{1}{4} = 0,25$.
- c) Pravděpodobnost tohoto jevu je 0, protože, když dostanou svoje batohy právě tři ze čtyř chlapců, tak ten čtvrtý musí mít svůj batoh také.

Závěr. Pravděpodobnost, že šatnářka každému podá správný batoh je 4,17 %. Pravděpodobnost, že dva chlapci dostanou svoje batohy je 25 % a pravděpodobnost, že právě tři dostanou svůj batoh je nulová.

Metodické poznámky

Úlohu můžeme rozšířit například o otázku, jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden chlapec dostane svůj batoh apod.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet pravděpodobnosti, opačný jev, kombinace

Na narozeninové oslavě je prostřený stůl pro 15 přátel. Pod 10 talířů schovali organizátoři malý dárek. Nakonec přišlo pouze 10 hostů a ke stolu se posadili zcela náhodně. Určete pravděpodobnost, že dárek pod talířem uvidí aspoň 6 hostů.

Řešení

Bez dárku může být nejvýše 5 hostů. Jev opačný k požadovanému jevu, že nejvýše 5 hostů uvidí dárek, což v tomto případě znamená právě 5.

Možností posazení u stolu je $\binom{15}{10} = 3003$. Příznivých opačnému jevu je $\binom{10}{5} = 252$.
Pravděpodobnost jevu tedy je

$$1 - \frac{\binom{10}{5}}{\binom{15}{10}} = 1 - \frac{252}{3003} \doteq 0,916.$$

Závěr. Pravděpodobnost, že dárek pod talířem uvidí aspoň 6 hostů je 91,6 %.

Metodické poznámky

Možno též počítat nejprve počet příznivých možností

$$\binom{10}{6} \binom{5}{4} + \binom{10}{7} \binom{5}{3} + \binom{10}{8} \binom{5}{2} + \binom{10}{9} \binom{5}{1} + \binom{10}{10} \binom{5}{0} = 2751$$

a poté ukázat, oč je výhodnější využít jev opačný.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: opačný jev, operace s množinami, De Morganovy vzorce

Brusiči skla vytváří nezávisle na sobě na vázách motivy – jeden brousí květ a druhý hlavičku dívky. Pravděpodobnost, že se v motivu hlavičky objeví chyba je 20 %, v motivu květu je 10 %. Jaká je pravděpodobnost, že

- alespoň jeden motiv bude vytvořen perfektně,
- oba motivy budou v pořádku?

Řešení

Označíme: jev H – hlavička je v pořádku, jev K – květ je v pořádku.

- Označíme $\overline{H}$ – hlavička v pořádku není a víme, že $P(\overline{H}) = 0,20$, $\overline{K}$ – květ v pořádku není a opět ze zadání víme, že $P(\overline{K}) = 0,10$, tedy

$$P(\overline{H} \cap \overline{K}) = 0,02.$$

Máme zjistit $P(H \cup K)$. Každý z těchto jevů může nastat samostatně, jsou to jevy nezávislé. Užijeme opačného jevu

$$P(H \cup K) = 1 - P(\overline{H \cup K}) = 1 - P(\overline{H} \cap \overline{K}) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

- Máme zjistit $P(H \cap K)$. Opět je výhodné využít opačný jev.

$$\begin{aligned} P(H \cap K) &= 1 - P(\overline{H \cap K}) = 1 - P(\overline{H} \cup \overline{K}) = 1 - (P(\overline{H}) + P(\overline{K}) - P(\overline{H} \cap \overline{K})) = \\ &= 1 - (0,20 + 0,10 - 0,02) = 0,72. \end{aligned}$$

Závěr. Pravděpodobnost, že alespoň jeden motiv bude vytvořen perfektně je 98 %.
Pravděpodobnost, že oba motivy jsou v pořádku, je 72 %.

Metodické poznámky

Část a) můžeme řešit i dosazením do známého vztahu

$$P(H \cup K) = P(H) + P(K) - P(H \cap K).$$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnost jevů, permutace, kombinace

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: pravděpodobnost jevu

Student Adámek se nepřipravil na zkoušku, a tak z dvaceti možných otázek umí jen jedinou. Ten den bude zkoušeno 10 žáků, zadání otázek se losuje a student Adámek bude zkoušen jako *prvý* v pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že u zkoušky uspěje (vylosuje si právě tu otázku, kterou umí), jestliže:

- a) tažené otázky se vracejí (několik studentů si tedy může vylosovat tutéž otázku)?
- b) tažené otázky se nevracejí?

Řešení

Student Adámek bude losovat jako první, takže na jeho los nemá vliv to, zda se otázky do losovacího osudí vracejí, nebo ne. Odpověď na obě otázky je tedy stejná.

Student Adámek losuje jednu otázku, nastane tedy právě jeden ze všech stejně možných (stejně pravděpodobných) 20 výsledků pokusu. Jeho pravděpodobnost je dána zlomkem $\frac{1}{20}$.

Závěr. Pravděpodobnost tažení otázky, na kterou zná student Adámek odpověď, je

$$\frac{1}{20} = 0,05.$$

Metodické poznámky

Úloha je velmi snadná a jejím cílem může být upevnit nový pojem v samém začátku výuky počtu pravděpodobnosti a také motivovat k řešení složitějších problémů, jako úvod k následujícím úlohám 2 a 3.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: kombinace, pravděpodobnost jevu, podmíněná pravděpodobnost

Student Adámek se nepřipravil na zkoušku, a tak z dvaceti možných otázek umí jen jedinou. Ten den bude zkoušeno 10 žáků, zadání otázek se losuje a student Adámek bude zkoušen jako *třetí* v pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že u zkoušky uspěje (vylosuje si právě tu otázku, kterou umí), jestliže:

- a) tažené otázky se vracejí (několik studentů si tedy může vylosovat tutéž otázku)?
- b) tažené otázky se nevracejí?

Řešení

- a) Jestliže se otázky do losovacího osudí vracejí, jsou všichni studenti ve stejné situaci (ať jdou ke zkoušce kdykoliv): losují náhodně jednu otázku ze 20 možných. Využijeme proto výsledek z Úlohy 1: Student Adámek losuje jednu otázku, nastane tedy právě jeden ze všech stejně možných (stejně pravděpodobných) 20 výsledků pokusu. Jeho pravděpodobnost je dána zlomkem $\frac{1}{20}$.

Závěr. Pravděpodobnost tažení otázky, na kterou zná student Adámek odpověď, je rovna $\frac{1}{20} = 0,05$.

- b) Jestliže se otázky do losovacího osudí nevracejí, může si student Adámek vylosovat „žádanou“ otázku pouze tehdy, pokud si ji nikdo z jeho dvou předchůdců nevylosoval (jev $\mathcal{A}$). Losuje-li student Adámek jako třetí v pořadí, losuje náhodně jednu otázku z 18 možných (jev $\mathcal{B}$). Výsledná pravděpodobnost je tedy součinem pravděpodobností jevů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Podle předchozí úvahy platí: $P(\mathcal{B}) = \frac{1}{18}$.

Počet příznivých výsledků jevu $\mathcal{A}$ je počet dvojic ze skupiny 19 otázek (není mezi nimi Adámkova „žádaná“ otázka). Počet možných výsledků prvních dvou tahů je počet všech dvojic z původní sady otázek. Pořadí, v jakém byly otázky taženy, není podstatné. Proto

$$P(\mathcal{A}) = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{19 \cdot 18}{20 \cdot 19} = \frac{18}{20}.$$

(Je vidět, že pokud bychom chtěli rozlišovat pořadí tažených otázek, dostáváme stejnou pravděpodobnost.) Proto

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \frac{1}{18} \cdot \frac{18}{20} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Závěr. Pravděpodobnost tažení otázky, na kterou zná student Adámek odpověď, je rovna $\frac{1}{20} = 0,05$.

Poznámka. Jde o pravděpodobnost, že si Adámek otázku vylosoval za předpokladu, že si ji nevylosoval nikdo před ním; přitom ale pravděpodobnost, že si otázku vylosuje za předpokladu, že si ji už někdo vylosoval, je nulová.

Metodické poznámky

Vybrali jsme postup řešení, který je pro žáky nejspíše nejpřirozenější. Později, při řešení Úlohy 3 dojdeme k postupu, který je snazší, protože vychází pouze z jednoduché úvahy. Zatím můžeme zaznamenat to, že v této úloze nezáleží výsledná pravděpodobnost na tom, zda otázky do osudí vracíme nebo ne, což může být pro žáky překvapivé.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: permutace, kombinace, pravděpodobnost jevu

Student Adámek se nepřipravil na zkoušku, a tak z dvaceti možných otázek umí jen jedinou. Ten den bude zkoušeno 10 žáků, zadání otázek se losuje a student Adámek si může vybrat, kolikátý v pořadí bude zkoušen. Jaké pořadové číslo si má zvolit, aby pravděpodobnost, že u zkoušky uspěje (vylosuje si právě tu otázku, kterou umí), byla co největší, jestliže:

- a) tažené otázky se vracejí (několik studentů si tedy může vylosovat tutéž otázku),
- b) tažené otázky se nevracejí.

Řešení

- a) Jestliže se otázky do losovacího osudí vracejí, jsou všichni studenti ve stejné situaci (ať jdou ke zkoušce kdykoliv): losují náhodně jednu otázku ze 20 možných. Pravděpodobnost tažení „žádané“ otázky je vždy dána zlomkem $\frac{1}{20}$.
- b) Jestliže se otázky do losovacího osudí nevracejí, může si student Adámek vylosovat „žádanou“ otázku pouze tehdy, pokud si ji nikdo z jeho k předchůdců nevylosoval (jev $\mathcal{A}$).

Losuje-li student Adámek jako $(k+1)$ -ní v pořadí, losuje náhodně jednu otázku z $20-k$ možných a počítáme pravděpodobnost jevu, že to bude ona „žádaná“ (jev $\mathcal{B}$). Výsledná pravděpodobnost je tedy součinem pravděpodobností jevů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Podle předchozí úvahy platí: $P(\mathcal{B}) = \frac{1}{20-k}$.

Počet příznivých výsledků jevu $\mathcal{A}$ je počet k -tic (k -prvkových podmnožin) ze skupiny 19 otázek (není mezi nimi Adámkova „žádaná“ otázka). Počet všech výsledků prvních dvou tahů je počet všech dvojic z původní sady otázek. Pořadí, v jakém byly otázky taženy, není podstatné. Proto

$$P(\mathcal{A}) = \frac{\binom{19}{k}}{\binom{20}{k}} = \frac{19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot (20-k)}{20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot (20-k+1)} = \frac{20-k}{20}.$$

(Je vidět, že pokud bychom chtěli rozlišovat pořadí tažených otázek, dostáváme stejnou pravděpodobnost.) Proto

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \frac{1}{20-k} \cdot \frac{20-k}{20} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Závěr.

- a) Pořadí, v němž půjde student Adámek ke zkoušce, nemá vliv na pravděpodobnost tažení „žádané“ otázky.
- b) Pravděpodobnost tažení otázky, na kterou zná student Adámek odpověď, je vždy $\frac{1}{20} = 0,05$. Ani v tomto případě nemá pořadí, v němž půjde student Adámek ke zkoušce, vliv na pravděpodobnost tažení „žádané“ otázky.

Řešení (část b) – jiná úvaha

Předpokládejme, že se ten den postupně vylosuje všech 20 otázek, každá jednou. (Očíslujeme si je tedy 1–20.) Konkrétní pořadí vylosovaných otázek je jedna permutace čísel 1–20. Všechna možná pořadí jsou všechny permutace uvedené množiny (těch je $20!$). Mezi nimi se každá otázka vyskytuje na každém místě „stejně-krát“. Tedy otázka p bude mezi všemi permutacemi právě $19!$ -krát na prvním místě, právě $19!$ -krát na druhém místě,...

Tedy: pravděpodobnost, že otázka p bude tažena na místě k , je pro všechna k stejná (a rovná $\frac{1}{20} = 0,05$).

Pokud se v daný den nevylosují všechny otázky, ale jen prvních deset, můžeme si „pokračování losování“ doplnit.

Metodické poznámky

Obtížnost třetí úlohy je především ve formulaci otázky. Pokud zvolíme „klasický“ výpočet, může být pro žáky závěr překvapivý a může motivovat ke hledání jiného zdůvodnění.

Zdroj: archiv autora, autor

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnost, jevy, nezávislé jevy

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: klasická definice pravděpodobnosti

Večírku se zúčastnilo z 1. ročníku 39 dívek a 33 chlapců, ze 2. ročníku 42 dívek a 36 chlapců, každý si koupil jeden los. Jaká je pravděpodobnost toho, že hlavní cenu vyhraje

- a) dívka,
- b) někdo z 1. ročníku?

Řešení

Večírku se zúčastnilo celkem $N = 39 + 33 + 42 + 36 = 150$ studentů. Počet všech možných výsledků (kdo může vyhrát hlavní cenu) je tedy 150.

- a) Označme D jev, že hlavní cenu získá dívka, dívek je celkem $N_D = 39 + 42 = 81$, počet výsledků příznivých jevu D je tedy 81. Podle definice pravděpodobnosti platí

$$P(D) = \frac{N_D}{N} = \frac{81}{150} = 0,54.$$

Pravděpodobnost, že hlavní cenu vyhraje dívka je 54 %.

- b) Označme R jev, že hlavní cenu získá někdo z 1. ročníku; v něm je chlapců a dívek celkem $N_1 = 39 + 33 = 72$, počet výsledků příznivých jevu R je tedy 72. Podle definice pravděpodobnosti platí

$$P(R) = \frac{N_1}{N} = \frac{72}{150} = 0,48.$$

Pravděpodobnost, že hlavní cenu vyhraje někdo z 1. ročníku je 48 %.

Metodické poznámky

Na tomto materiálu lze názorně procvičit i pojem opačný jev a jeho pravděpodobnost.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: definice pravděpodobnosti, kombinace

Vybereme libovolně 4 dny v týdnu.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi středa?
- b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi středa není?

Řešení

Nejprve zjistíme, kolik je všech možných čtveřic dní v týdnu. Týden má 7 dní, takže jde o čtyřčlenné kombinace ze sedmi prvků a těch je $N = \binom{7}{4} = 35$.

- a) Jev, že ve vybrané čtveřici je středa, označme S , zjistíme počet N_S výsledků příznivých jevu S . Jsou to čtveřice, v nichž je středa a k ní další trojice ze zbývajících 6 dnů; těchto trojic je $N_S = \binom{6}{3} = 20$ a stejně tolik je tedy čtveřic se středou. Pak

$$P(S) = \frac{N_S}{N} = \frac{20}{35} \doteq 0,5714.$$

Pravděpodobnost jevu, že ve vybrané čtveřici dnů v týdnu je středa, je 57,14 %.

- b) Zde jde o jev S' opačný k jevu S , takže pravděpodobnost, že nastane, je $P(S') = 1 - P(S)$. Proto

$$P(S') = 1 - \frac{N_S}{N} = 1 - \frac{20}{35} = \frac{15}{35} = 0,4286.$$

Pravděpodobnost jevu, že ve vybrané čtveřici dnů v týdnu není středa, je 42,86 %.

Metodické poznámky

Je možno doporučit, aby si žáci prošli způsob řešení této úlohy znovu, a to na mírně pozměněném příkladu, kdy vybereme například jen 3 dny v týdnu.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace, definice pravděpodobnosti jevu, pravděpodobnost dvou navzájem se vylučujících jevů

Z anglické abecedy, která obsahuje 26 písmen, z toho 6 samohlásek, byla vylosována 4 písmena.

- a) Jaká je pravděpodobnost toho, že ve skupině je méně samohlásek než souhlásek?
b) Jaká je pravděpodobnost toho, že ve skupině je právě jedno z písmen x , y , z ?

Řešení

Nejprve zjistíme, kolik existuje různých čtveřic; jde o čtyřčlenné kombinace z 26 prvků, jejich počet je $N = \binom{26}{4} = 14\,950$.

- a) Mohou nastat dva případy, a to, že ve skupině není žádná samohláska (jev J_0) nebo že je tam jen jedna (jev J_1).

- ad J_0 : Počet skupin tvořených jen souhláskami je $N_0 = \binom{20}{4} = 4\,845$, pravděpodobnost jejich výskytu je

$$P(J_0) = \frac{N_0}{N} = \frac{4\,845}{14\,950}.$$

- ad J_1 : Různých samohlásek je 6 a ke každému tomuto případu se přidají 3 souhlásky, počet trojic souhlásek je $\binom{20}{3} = 1\,140$, počet N_1 čtveřic J_1 je tedy celkem $N_1 = 6 \cdot 1\,140 = 6\,840$. Pravděpodobnost výskytu těchto čtveřic je

$$P(J_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{6\,840}{14\,950}.$$

$J_0 \cup J_1$: Jevy J_0 a J_1 se vylučují, takže platí

$$P(J_0 \cup J_1) = P(J_0) + P(J_1) = \frac{N_0 + N_1}{N} = \frac{4\,845 + 6\,840}{14\,950} \doteq 0,7816.$$

Pravděpodobnost, že ve skupině je méně samohlásek než souhlásek, je 78,16 %.

- b) Tento jev označme J . Předpokládejme, že ve skupině je písmeno x , ale není v ní ani y ani z (jev J_0). Kromě toho x jsou tu další 3 písmena, vyloučíme však y a z , takže ty potřebné trojice vybíráme jen z 23 písmen. Takových trojic je $N_0 = \binom{23}{3} = 1\,771$, takže

$$P(J_0) = \frac{N_0}{N} = \frac{1\,771}{14\,950}.$$

Je-li ve skupině písmeno y a nikoli x ani z , je situace přesně stejná a stejná je i pravděpodobnost tohoto případu. Totéž dostaneme i pro z . Tyto tři případy (jevy) se vylučují, takže

$$P(J) = 3 \cdot P(J_0) = \frac{3N_0}{N} = \frac{31\,771}{14\,950} \doteq 0,3554.$$

Pravděpodobnost jevu v zadání b) je 35,54 %.

Metodické poznámky

Je vždy možno počítat už i dílčí pravděpodobnosti, ale zde je zvolen způsob racionálnější a vzhledem k zaokrouhlování i přesnější.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinace, definice pravděpodobnosti jevu, pravděpodobnost dvou navzájem se vylučujících jevů, pravděpodobnost nezávislých jevů

Skupina studentů, dvaceti dívek a šestnácti chlapců, chce uspořádat večírek. Dohodli se, že o organizaci se bude starat pětičlenný výbor, jehož členové budou vylosováni.

- Jaká je pravděpodobnost, že ve výboru budou mít dívky většinu?
- Večírku se zúčastní také sourozenci Adam a Eva. Jaká je pravděpodobnost, že ve výboru bude někdo z nich?

Řešení

Nejprve zjistíme, kolika způsoby lze výbor sestavit. Skupina má celkem 36 členů, počet pětic je dán jako počet pětičlenných kombinací z 36 prvků, což je $N = \binom{36}{5} = 376\,992$.

a) Mají-li většinu ve výboru tvořit dívky (jev J), pak to znamená, že jich ve výboru bude 5 nebo 4 nebo 3 (jevy J_5, J_4 a J_3).

- ad J_5 ; dívek je celkem 20, takže počet pětic je $N_5 = \binom{20}{5} = 15\,504$.
- ad J_4 ; počet možných čtveřic dívek je $\binom{20}{4} = 4\,845$ a ke každé čtveřici dívek lze vzít jednoho chlapce ze šestnácti, $\binom{16}{1} = 16$, což dává $N_4 = \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{1} = 77\,520$.
- ad J_3 ; z 20 dívek lze vytvořit $\binom{20}{3} = 1\,140$ trojic a ke každé trojici přidáme dvojici chlapců, těchto dvojic je $\binom{16}{2} = 120$, takže počet těchto možností je celkem $N_3 = \binom{20}{3} \cdot \binom{16}{2} = 136\,800$.

Platí $J = J_5 \cup J_4 \cup J_3$, přičemž se tyto tři dílčí jevy navzájem vylučují, takže

$$\begin{aligned} P(J) &= P(J_5) + P(J_4) + P(J_3) = \frac{N_5}{N} + \frac{N_4}{N} + \frac{N_3}{N} = \\ &= \frac{15\,504 + 77\,520 + 136\,800}{376\,992} = \frac{229\,824}{376\,992} \doteq 0,6096; \end{aligned}$$

Hledaná pravděpodobnost je 60,96 %.

b) Označme výběr Adama jako jev A , výběr Evy jako jev B , hledáme $P(A \cup B)$.

- Jev A ; je-li vybrán Adam, pak další 4 k němu se vybírají ze 35 zbývajících (včetně Evy), takže počet pětic s Adamem je $N_A = \binom{35}{4} = 52\,360$, takže

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{52\,360}{376\,992}.$$

- Jev B ; situace je přesně stejná, k Evě lze opět vybrat čtveřici ze všech zbývajících (včetně Adama), takže jev B nastane $N_B = N_A = 52\,360$ krát a $P(B) = \frac{N_B}{N}$.
- Jev $A \cup B$; Jevy A, B se nevylučují (ve výboru mohou být současně Adam i Eva). Najdeme $P(A \cap B)$. Jsou-li ve výboru Adam i Eva, pak z ostatních 34 studentů jsou vybráni ještě 3, počet takových trojic je $N_{A \cap B} = \binom{34}{3} = 5\,984$, takže

$$P(A \cap B) = \frac{N_{A \cap B}}{N} = \frac{5\,984}{376\,992}.$$

Pro pravděpodobnost jevu $A \cup B$, v případě, že se jevy A, B nevylučují, platí

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} - \frac{N_{A \cap B}}{N} = \\ &= \frac{52\,360 + 52\,360 - 5\,984}{376\,992} \doteq 0,2619. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že ve výboru bude Adam nebo Eva, je 26,19 %.

Metodické poznámky

V případě b) je vhodné neopírat se jen o vzorec pro výpočet $P(A \cup B)$, ale přiblížit si situaci i takto: zjistíme počet případů, kdy je ve výboru Adam, včetně možností, že je tam i Eva, to je zjištěné číslo N_A . Pak uvažujeme případy, kdy je ve výboru jen Eva, Adam ne, protože společné členství je započteno už u Adama. Počet pětic, kdy je jen Eva, je proto $N_B - N_{A \cap B}$ a dojdeme ke stejnému výsledku.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnosti jevů a počítání s nimi, opačný jev

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: pravděpodobnost jevu

V dílně, v níž pracovalo 9 mužů a 6 žen, přišly 4 osoby k úrazu. Jaká je pravděpodobnost, že to byly samé ženy.

Řešení

Možných výsledků je tolik, kolik kombinací po 4 lze vytvořit z 15 prvků. Příznivých případů je tolik, kolik lze skupin po 4 vytvořit ze 6 prvků. Je tedy

$$P = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{1}{7 \cdot 13} = \frac{1}{91}.$$

Závěr. Pravděpodobnost, že to byli samé ženy je $\frac{1}{91}$.

Metodické poznámky

Pravděpodobnost jevu A , značíme ji $P(A)$, se definuje jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A , což lze vyjádřit vzorcem

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

kde zápis vpravo značí součet těch čísel $p(\omega)$, která odpovídají prvkům $\omega \in A$.

V případě, že pokus má m stejně pravděpodobných pokusů, je

$$P(A) = \frac{m(A)}{m},$$

kde $m(A)$ je počet výsledků příznivých jevu A .

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: opačný jev, pravděpodobnosti opačného a výchozího jevu

Chceme dvěma kostkami hodit nejprve 4 a pak 5. Jaká je pravděpodobnost, že se

- a) oba hody podaří,
- b) žádný nepodaří,
- c) podaří jen první,
- d) podaří jen druhý?

Řešení

- a) $P = p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{108},$
- b) $P = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = \frac{33}{36} \cdot \frac{32}{36} = \frac{22}{27},$
- c) $P = p_1 \cdot (1 - p_2) = \frac{3}{36} \cdot \frac{32}{36} = \frac{2}{27},$
- d) $P = (1 - p_1) \cdot p_2 = \frac{33}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{11}{108},$

Závěr. Pravděpodobnost, že se

- a) oba hody podaří je $\frac{1}{108},$
- b) žádný nepodaří je $\frac{22}{27},$
- c) podaří jen první je $\frac{2}{27},$
- d) podaří jen druhý je $\frac{11}{108}.$

Metodické poznámky

Pravděpodobnosti, že oba jevy nastanou, jsou p_1, p_2 ; že nenastanou jsou $1 - p_1, 1 - p_2$. Pravděpodobnost, že

- a) oba jevy nastanou je $P_1 = p_1 \cdot p_2,$
- b) jenom A nastane je $P_2 = p_1 \cdot (1 - p_2),$
- c) jenom B nastane je $P_3 = (1 - p_1) \cdot p_2,$
- d) žádný jev nenastane je $P_4 = (1 - p_1)(1 - p_2),$
- e) oba jevy spolu nenastanou je $P_5 = 1 - p_1 p_2,$
- f) nejméně jeden jev nastane je $P_6 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravděpodobnost jevu

Nádoba je rozdělena stěnou ve dvě oddělení; v jednu je 6 bílých a 10 červených kuliček, v druhém je 5 bílých a 7 červených. Jaká je pravděpodobnost, že bude vytáhena bílá? Kdybychom stěnu odstranili, která z obou pravděpodobností vytáhnutí bílé koule bude větší?

Řešení

Pravděpodobnost, že sáhneme do 1. oddělení je $\frac{1}{2}$; že odtud vytáhneme bílou je $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$; tedy, že oba ty jevy nastanou je pravděpodobnost $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$; stejně, že namátkou sáhneme do 2. oddělení a odtud vytáhneme bílou, je $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$.

Tedy pravděpodobnost celková, že buď do 1. nebo 2. odd. sáhneme a bílou kouli vytáhneme (oba jevy se vylučují, sáhneme-li do první, nemůžeme do 2.), je

$$p = \frac{3}{16} + \frac{5}{24} = \frac{19}{48}.$$

Kdybychom stěnu odstranili, bylo by 11 bílých a 17 červených koulí. Pravděpodobnost vytažení bílé koule by pak byla $p_3 = \frac{11}{28}$. Pravděpodobnosti vytažení bílé koule z nádoby s přepážkou a bez ní jsou

$$p = \frac{19}{48} = \frac{133}{336} > p_3 = \frac{11}{28} = \frac{132}{336}.$$

Je tedy $p > p_3$.

Závěr. Pravděpodobnost vytažení bílé koule je $\frac{19}{48}$. Po odstranění přepážky se pravděpodobnost vytažení bílé koule zmenší na $\frac{132}{336}$.

Zdroj:

Maška, O. *Matematika v úlohách. Algebra a geometrie*. Nakladatelství Barvič a Novotný, Brno, 1947.

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: pravděpodobnost průniku jevů

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: určení pravděpodobnosti průniku nezávislých jevů, určení pravděpodobnosti sjednocení jevů

Pravděpodobnost narození dívky je asi 0,485, pravděpodobnost narození chlapce je asi 0,515. Jaká je v rodině se třemi dětmi pravděpodobnost, že právě dvě děti jsou dívky?

Řešení

Označme jev A : „Nejstarší dítě je dívka“, jev B : „Prostřední dítě je dívka.“ a jev C : „Nejmladší dítě je dívka.“, dále označme po řadě A' , B' , C' jevy k nim opačné. Jevy A , B , C zřejmě můžeme pokládat za vzájemně nezávislé. Pravděpodobnost každého z těchto jevů je $P(A) = P(B) = P(C) = 0,485$. Podle zadání mají dvě z dětí být dívky a jedno dítě chlapec, mají tedy nastat právě dva z jevů A , B , C .

Situaci můžeme rozdělit na tři dílčí (navzájem se vylučující) případy a určit pravděpodobnost v každém z těchto případů. Výsledná pravděpodobnost pak bude součtem těchto pravděpodobností.

- (i) Nejstarší dítě je chlapec, ostatní jsou dívky

$$P_i = P(A' \cap B \cap C) = P(A') \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,515 \cdot 0,485 \cdot 0,485 \doteq 0,121.$$

- (ii) Nejstarší dítě je dívka, prostřední chlapec, nejmladší dívka

$$P_{ii} = P(A \cap B' \cap C) = P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) = 0,485 \cdot 0,515 \cdot 0,485 \doteq 0,121.$$

- (iii) Nejstarší dítě je dívka, prostřední dívka, nejmladší chlapec

$$P_{iii} = P(A \cap B \cap C') = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') = 0,485 \cdot 0,485 \cdot 0,515 \doteq 0,121.$$

Výsledná pravděpodobnost je tedy $P = P_i + P_{ii} + P_{iii} \doteq 0,121 + 0,121 + 0,121 = 0,363$.

Provedenou úvahu můžeme zjednodušit následujícím způsobem. Dvě z dětí mají být dívky a jedno dítě chlapec, tomu odpovídá (v nějakém pořadí) součin pravděpodobností $0,485^2 \cdot 0,515$. Dále jsou tři možnosti, které z dětí je chlapec, proto je výsledná pravděpodobnost $P = 3 \cdot 0,485^2 \cdot 0,515 \doteq 0,363$.

Závěr. V rodině se třemi dětmi je pravděpodobnost $3 \cdot 0,485^2 \cdot 0,515 \doteq 0,363$, že právě dvě děti jsou dívky.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno pouze na určení pravděpodobnosti průniku nezávislých jevů a na jednoduché úvaze. Úlohu můžeme rovněž řešit s využitím Bernoulliho schématu, případně lze úlohu využít jako motivaci pro jeho odvození.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: určení pravděpodobnosti průniku nezávislých jevů, určení pravděpodobnosti sjednocení jevů

Pravděpodobnost narození dívky je asi 0,485, pravděpodobnost narození chlapce je asi 0,515. Pravděpodobnost, že rodič, který má jistou vrozenou chorobu, přenesou tuto chorobu na svého potomka, je 0,3 u potomka stejného pohlaví a 0,5 u potomka opačného pohlaví. Rodičovský pár, kde otec trpí danou chorobou a matka je zdravá, má jedno dítě. Jaká je pravděpodobnost, že je dítě zdravé (tj. netrpí danou chorobou)?

Řešení

Dcera těchto rodičů bude zdravá s pravděpodobností $1 - 0,5 = 0,5$. Pravděpodobnost jevu „Dítě je dívka a zároveň je zdravé.“ je tedy $0,485 \cdot 0,5 = 0,2425$.

Syn těchto rodičů bude zdravý s pravděpodobností $1 - 0,3 = 0,7$. Pravděpodobnost jevu „Dítě je chlapec a zároveň je zdravé.“ je tedy $0,515 \cdot 0,7 = 0,3605$.

Pravděpodobnost jevu „Dítě je zdravé.“ bude součtem pravděpodobností jevů „Dítě je dívka a zároveň je zdravé.“ a „Dítě je chlapec a zároveň je zdravé.“, tedy

$$P = 0,2425 + 0,3605 = 0,603.$$

Závěr. Dítě těchto rodičů je zdravé s pravděpodobností 0,603.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na určení pravděpodobnosti průniku nezávislých jevů a pravděpodobnosti sjednocení jevů se zřejmě prázdným průnikem, zároveň využívá pravděpodobnost jevů navzájem opačných.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: určení pravděpodobnosti průniku nezávislých jevů, určení pravděpodobnosti sjednocení jevů

Pravděpodobnost narození dívky je asi 0,485, pravděpodobnost narození chlapce je asi 0,515. Pravděpodobnost, že rodič, který má jistou vrozenou chorobu, přenesou tuto chorobu na svého potomka, je 0,3 u potomka stejného pohlaví a 0,5 u potomka opačného pohlaví. Rodičovský pár, kde otec trpí danou chorobou a matka je zdravá, má tři děti. Jaká je pravděpodobnost, všechny tři děti jsou zdravé a právě dvě z nich jsou dívky?

Řešení

Označme jev K_1 : „Nejstarší dítě je zdravá dívka.“, K_2 : „Prostřední dítě je zdravá dívka.“, K_3 : „Nejmladší dítě je zdravá dívka.“, H_1 : „Nejstarší dítě je zdravý chlapec.“, H_2 : „Prostřední dítě je zdravý chlapec.“ a H_3 : „Nejmladší dítě je zdravý chlapec.“

Podle řešení předchozí úlohy je

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = P(K) = 0,485 \cdot 0,5 = 0,2425,$$

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H) = 0,515 \cdot 0,7 = 0,3605.$$

Podle zadání mají dvě z dětí být zdravé dívky a jedno dítě zdravý chlapec, tomu odpovídá (v nějakém pořadí) součin pravděpodobností $P(K)^2 \cdot P(H) = 0,2425^2 \cdot 0,3605$. Dále jsou tři možnosti, které z dětí je chlapec, proto je výsledná pravděpodobnost

$$P = 3 \cdot 0,2425^2 \cdot 0,3605 \doteq 0,0636.$$

Závěr. V dané rodině je pravděpodobnost $P \doteq 0,0636$, že všechny tři děti jsou zdravé a právě dvě z nich jsou dívky.

Metodické poznámky

Řešení úlohy využívá poznatků, které byly odvozeny či využity v úlohách 1 a 2, proto je velmi vhodné řešit úlohy v navrhaném pořadí. Pro studenty může být pravděpodobnost, kterou určíme v úloze 3, překvapivě nízká, proto je zajímavé nechat studenty před samotným řešením úlohy provést odhad výsledku a na závěr pak jejich odhady s vypočteným výsledkem porovnat.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: PhDr. Lucie Růžicková; lucie_ruzickova@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: statistický soubor, aritmetický průměr, medián, modus, kvartil, směrodatná odchylka

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: aritmetický průměr, medián, modus

Během pololetí dostal Petr z matematiky postupně tyto známky: 3, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 2. Pavel dostal z matematiky postupně tyto známky: 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 2. Určete aritmetický průměr, medián a modus hodnot jejich známek.

Řešení

Známky každého z žáků můžeme považovat za statistický soubor, jehož statistickou jednotkou je jedna známka (jednička, dvojka, trojka, čtyřka), její hodnota (1, 2, 3, 4) je pak statistickým znakem, tj. zkoumanou veličinou. Označme tuto veličinu v případě Petra x , v případě Pavla y .

Aritmetickým průměrem (značíme $\bar{x}$, resp. $\bar{y}$) je součet hodnot všech známek, dělený jejich počtem (tzv. rozsahem statistického souboru), tedy

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 + 2}{11} = \frac{19}{11} \doteq 1,73 \\ \bar{y} &= \frac{2 + 3 + 3 + 4 + 2 + 2 + 3 + 2}{8} = \frac{21}{8} \doteq 2,63\end{aligned}$$

Mediánem (značíme $\tilde{x}$, resp. $\tilde{y}$) je takové číslo, že právě polovina hodnot souboru je menší nebo rovna jak toto číslo a polovina hodnot větší nebo rovna jak toto číslo – jde o „prostřední“ hodnotu.

Abychom mohli medián zjistit musíme statistický soubor známek každého z žáků uspořádat vzestupně (nebo sestupně) podle hodnoty známky (setřídít). Dostaneme:

Petr: 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3 Pavel: 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4.

Petrův soubor známek má 11 prvků, hledáme tedy takové číslo, aby 5 známek bylo menších nebo stejných a 5 známek bylo větších nebo stejných – tedy 6 známku v uspořádaném souboru, tou je dvojka, tedy $\tilde{x} = 2$.

Petr: 1, 1, 1, 1, 1, **2**, 2, 2, 2, 3, 3.

Pavův soubor známek má 8 prvků, hledáme tedy takové číslo, aby 4 známky byly menší nebo stejné a 4 známky byly větší nebo stejné. Takové číslo se ale v Pavlově souboru nenalézá, musí totiž ležet mezi 4 a 5 prvkem.

Pavel: 2, 2, 2, **2**, **3**, 3, 3, 4.

V tomto případě si můžeme medián libovolně vybrat z intervalu (2, 3). Většinou se za medián volí střed tohoto intervalu, tj. $\tilde{y} = 2,5$, ale lze zvolit jakékoliv jiné číslo z tohoto intervalu.

Modus (značíme $\hat{x}$, resp. $\hat{y}$) je hodnota, která se v daném statistickém souboru vyskytuje nejčastěji. V případě našich souborů je hned zřejmé, vidíme, že $\hat{x} = 1$ (vyskytuje se 5krát), resp. $\hat{y} = 2$ (vyskytuje se 4krát).

Závěr. Aritmetický průměr, medián a modus hodnot Petrových známek jsou po řadě $\bar{x} \doteq 1,73$, $\tilde{x} = 2$, $\hat{x} = 1$. Aritmetický průměr, medián a modus hodnot Pavlových známek jsou po řadě $\bar{y} \doteq 2,63$, $\tilde{y} \in (2, 3)$ (obvykle $\tilde{y} = 2,5$) a $\hat{y} = 2$.

Metodické poznámky

Aritmetický průměr bývá často používán k reprezentaci statistického souboru (průměrný plat obyvatel, stanovení výsledné známky žáka). Aritmetický průměr je výrazně ovlivněn případným výskytem extrémních hodnot statistického znaku (aritmetický průměr souboru 1, 1, 1, 2, 95 je 20), ani nezachycuje trend změny hodnoty statistického znaku. Např. obdržel-li žák po řadě známky 1, 1, 2, 4, 5, vypovídá to o něčem jiném, než obdržel-li po řadě známky 5, 4, 2, 1, 1; stejný průměr 2,6 nezachycuje snahu žáka o zlepšení studijních výsledků. Zde je vypočítací hodnota aritmetického průměru malá. V prvním případě by situaci lépe popsal medián nebo modus, ve druhém vážený průměr.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet váženého aritmetického průměru

Během pololetí dostal Petr z matematiky postupně tyto známky: 1, 1, 2, 4, 5. Pavel dostal z matematiky postupně tyto známky: 5, 4, 2, 1, 1. Určete:

- aritmetický průměr hodnot známek u každého žáka;
- vážený aritmetický průměr hodnot známek u každého žáka v případě, že váha známky je přímo úměrná jejímu pořadí.

Řešení

- Vzhledem k tomu, že oba žáci obdrželi stejné známky, je aritmetický průměr jejich hodnot v obou případech stejný, a to

$$\frac{1 + 1 + 2 + 4 + 5}{5} = \frac{13}{5} = 2,6.$$

- V případě váženého aritmetického průměru je situace jiná. Vzorec pro jeho výpočet je

$$\frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n},$$

kde $x_1, \dots, x_n$ jsou hodnoty statistického znaku a $v_1, \dots, v_n$ jejich příslušné váhy.

Označíme-li váhu první obdržené známky v , pak druhá známka v pořadí má váhu $2v$ atd. Je tedy vážený aritmetický průměr hodnot Petrových známek

$$\frac{1 \cdot v + 1 \cdot 2v + 2 \cdot 3v + 4 \cdot 4v + 5 \cdot 5v}{v + 2v + 3v + 4v + 5v} = \frac{50v}{15v} \doteq 3,33.$$

Vážený aritmetický průměr hodnot Pavlových známek je

$$\frac{5 \cdot v + 4 \cdot 2v + 2 \cdot 3v + 1 \cdot 4v + 1 \cdot 5v}{v + 2v + 3v + 4v + 5v} = \frac{28v}{15v} \doteq 1,87.$$

Závěr. Aritmetický průměr známek je u obou žáků stejný, a to 2,6. Vážený aritmetický průměr s vahou známek přímo úměrnou jejich pořadí je v Petrově případě přibližně 3,33, v Pavlově přibližně 1,87. Petr se zhoršuje ($3,33 > 2,6$), Pavel se zlepšuje ($1,87 < 2,6$).

Metodické poznámky

Je vidět, že vážený aritmetický průměr zachycuje snahu žáka o změnu jeho studijních výsledků, zatímco aritmetický průměr sice hodnotí výsledky žáka, ale neříká nic o jeho studijním úsilí.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet směrodatné odchylky

Při několikerém opakovaném měření délky tyče byly naměřeny tyto hodnoty: 10,1, 10,2, 10,2, 10,1, 10,3, 10,2, 10,2, 10,1, 10,2, 10,3, 10,2, 10,1, 10,2, 10,1, 10,2.

- Určete absolutní a relativní četnosti naměřených hodnot.
- Vypočtěte aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku s .

Řešení

- Absolutní četnost hodnoty statistického znaku n_i je počet jeho výskytů. Relativní četnost f_i dostaneme, vydělíme-li absolutní četnost rozsahem souboru n . Součet všech relativních četností je tedy 1.

Sestrojíme tabulku

i	1	2	3
x_i	10,1	10,2	10,3
n_i	5	8	2
f_i	$\frac{5}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

v níž x_i je i -tá hodnota statistického znaku, rozsah daného souboru je $n = 15$.

- Vážený aritmetický průměr naměřených hodnot je:

$$\bar{x} = \frac{10,1 \cdot 5 + 10,2 \cdot 8 + 10,3 \cdot 2}{15} = 10,18$$

Směrodatná odchylka s je dána vzorcem

$$s = \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + (x_3 - \bar{x})^2 \cdot n_3]}.$$

Doplníme naši tabulku o hodnoty výrazů $(x_i - \bar{x})^2$ pro $i = 1, 2, 3$

i	1	2	3
x_i	10,1	10,2	10,3
n_i	5	8	2
$x_i - \bar{x}$	-0,08	0,02	0,12
$(x_i - \bar{x})^2$	0,0064	0,0004	0,0144

a vypočteme směrodatnou odchylku

$$s = \sqrt{\frac{1}{15} \cdot (0,0064 \cdot 5 + 0,0004 \cdot 8 + 0,0144 \cdot 2)} \doteq 0,065.$$

Závěr.

- Statistický znak nabývá hodnot 10,1, 10,2 a 10,3. Jejich absolutní četnosti jsou po řadě 5, 8, 2, relativní četnosti jsou po řadě $\frac{5}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{15}$, v procentech přibližně 33,33 %, 53,33 % a 13,34 %.
- Aritmetický průměr naměřených hodnot je 10,18, jejich směrodatná odchylka je přibližně 0,065.

Metodické poznámky

Uvedené příklady ilustrují tzv. popisnou statistiku. V matematické statistice, kdy statistický soubor obsahuje hodnoty náhodné veličiny x , se k výpočtu směrodatné odchylky užívá odlišný vzorec

$$s' = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k]},$$

kde k je počet navzájem různých hodnot statistického znaku, $x_1, \dots, x_k$ tyto hodnoty a $n_1, \dots, n_k$ jejich absolutní četnosti, $n_1 + \dots + n_k = n$, n je rozsah souboru. Je tedy $s' = \sqrt{\frac{n}{n-1}} s$. V příkladu 3 je $s' = 0,0676$ a $s = 0,0653$.

Platí, že má-li náhodná veličina normální rozdělení pravděpodobnosti $N(\bar{x}, s^2)$ (např. opakované měření hodnoty fyzikální veličiny za stejných podmínek apod.), pravděpodobnost toho, že hodnota náhodné veličiny bude v intervalu $\langle \bar{x} - s, \bar{x} + s \rangle$ je 68.27 %, v intervalu $\langle \bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s \rangle$ je 95.45 % a v intervalu $\langle \bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s \rangle$ je 99.73 %. (Např. vyrábíme-li metrové tyče s přesností ± 1 mm a zákazníkovi vyhovuje tyč délky 99 mm až 101 mm, pak vyrobíme pravděpodobně 31.73 % zmetků. Chceme-li méně zmetků, pak musíme zpřesnit výrobní proces, při přesnosti ± 0.5 mm bude jen 4.55 % zmetků, při přesnosti ± 0.33 mm bude jen 0.27 % zmetků.)

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: koeficient korelace

Při pokusu byla postupně změřena hodnota veličin x a y (viz tabulku):

i	1	2	3	4	5	6
x_i	5	10	15	20	25	28
y_i	0	18	54	126	210	190

Rozhodněte, zda mezi veličinami x a y existuje závislost.

Řešení

O tom, zda mezi dvěma veličinami existuje nějaká závislost, lze rozhodnout pomocí korelačního koeficientu, který je dán vzorcem

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

kde x_i a y_i jsou i -té naměřené hodnoty, n je počet měření. Je-li $|k|$ blízká 1, pak mezi oběma veličinami závislost existuje, je-li $|k|$ blízká 0, pak nelze o závislosti jednoduše rozhodnout (veličiny jsou tzv. nekorelované).

Vypočteme $\bar{x} \doteq 17,17$ a $\bar{y} \doteq 99,67$ a sestavíme tabulku

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	5	0	-12,17	-99,67	1 213,0	148,1	9 934
2	10	18	-7,17	-81,67	585,6	51,4	6 670
3	15	54	-2,17	-45,67	99,1	4,7	2 086
4	20	126	2,83	26,33	74,5	8,0	693
5	25	210	7,83	110,33	863,9	61,3	12 173
6	28	190	10,83	90,33	978,3	117,3	8 160
Σ	103	598			3 814,3	390,8	39 716

Dosadíme hodnoty do vzorce a dostaneme

$$k = \frac{3814}{\sqrt{391} \cdot \sqrt{39716}} \doteq 0,97.$$

Vidíme, že k je velmi blízké 1.

Závěr. Mezi oběma veličinami závislost existuje.

Metodické poznámky

Vzorec pro výpočet koeficientu korelace je analogický vzorci pro výpočet kosinu úhlu sevřeného vektory o složkách $x_i - \bar{x}$ a $y_i - \bar{y}$.

Zdroj: Dílo autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: posloupnost, členy posloupnosti

Je dána vodorovná tabulka o dvou řádcích a n sloupcích (na obrázku má tabulka 10 sloupců), u níž rozeznáváme levý a pravý konec. Do tabulky klademe kostky domina bez ok o rozměru 2×1 . Označme p_n počet možností, jak můžeme do této tabulky položit

n kostek domina. Určete p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 .



Řešení

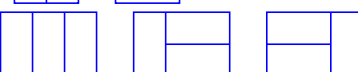
1. Pro $n = 1$ je jediná možnost, takže $p_1 = 1$.



2. Pro $n = 2$ jsou dvě možnosti, takže $p_2 = 2$.



3. Pro $n = 3$ jsou tři možnosti, takže $p_3 = 3$.



4. Pro $n = 4$ je pět možností, takže $p_4 = 5$.



5. Pro $n = 5$ je osm možností, takže $p_5 = 8$.



Závěr. Je $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3, p_4 = 5, p_5 = 8$.

Metodické poznámky

Úloha je podstatou kombinatorická, ale výsledky tvoří posloupnost, proto je možné zařadit ji do obou matematických celků. Úloha není obtížná, neboť výsledky se dají získat malováním obrázků.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: posloupnost, členy posloupnosti, kombinatorické pravidlo součtu, kombinatorické pravidlo součinu

Je dána vodorovná tabulka o dvou řádcích a 10 sloupcích, u níž rozeznáváme levý a pravý konec. Do tabulky klademe kostky domina bez ok o rozměru 2×1 . Označme p_{10} počet možností, jak můžeme do této tabulky položit 10 kostek domina. Dokažte, že $p_{10} = p_4^2 + p_5^2$, kde p_4 a p_5 jsou označení z předchozí úlohy, a pomocí těchto hodnot určete

p_{10} .



Řešení

Všimněme si rozhraní mezi 5. a 6. sloupcem. Mohou nastat následující případy. Buď přes toto rozhraní jsou položeny dvě kostičky vodorovně

nebo na tomto rozhraní sousedí dva bloky 5×2 , které neobsahují společnou kostku domina

V prvním tabulce záleží jenom na tom, kolika způsoby se vyplní kostkami domina první čtyři sloupce a poslední čtyři sloupce, proto počet možností v tomto případě je p_4^2 . Ve druhém tabulce záleží jenom na tom, kolika způsoby se vyplní kostkami domina prvních pět sloupců a posledních pět sloupců, proto počet možností v tomto případě je p_5^2 . Obě uvedené možnosti jsou nezávislé, proto $p_{10} = p_4^2 + p_5^2$. Pomocí předchozí úlohy určíme, že $p_{10} = 5^2 + 8^2 = 89$. Zkuste si je všechny nakreslit!

Závěr. Je $p_{10} = 5^2 + 8^2 = 89$.

Metodické poznámky

Úloha je kombinací kombinatoriky a posloupností, proto je možné zařadit ji do obou matematických celků. Úloha vyžaduje znalost kombinatorických pravidel součtu a součinu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: posloupnost, členy posloupnosti, binomická věta

Je dána vodorovná tabulka o dvou řádcích a 10 sloupcích, u níž rozeznáváme levý a pravý konec. Do tabulky klademe kostky domina bez ok o rozměru 2×1 . Označme p_{10} počet možností, jak můžeme do této tabulky položit 10 kostek domina. Dokažte, že

$$p_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{11} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{11} \right).$$

Porovnejte vypočtenou hodnotu s hodnotou z předchozí úlohy.

Řešení

Pro výpočet využijeme binomickou větu

$$\begin{aligned} p_{10} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{11} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{11} \right) = \\ &= \frac{1}{2^{11}\sqrt{5}} \left(\binom{11}{0} + \binom{11}{1}\sqrt{5} + \binom{11}{2}(\sqrt{5})^2 + \binom{11}{3}(\sqrt{5})^3 + \binom{11}{4}(\sqrt{5})^4 + \right. \\ &\quad \left. + \binom{11}{5}(\sqrt{5})^5 + \binom{11}{6}(\sqrt{5})^6 + \binom{11}{7}(\sqrt{5})^7 + \binom{11}{8}(\sqrt{5})^8 + \binom{11}{9}(\sqrt{5})^9 + \right. \\ &\quad \left. + \binom{11}{10}(\sqrt{5})^{10} + \binom{11}{11}(\sqrt{5})^{11} - \left(\binom{11}{0} + \binom{11}{1}\sqrt{5} - \binom{11}{2}(\sqrt{5})^2 + \binom{11}{3}(\sqrt{5})^3 - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\binom{11}{4}(\sqrt{5})^4 + \binom{11}{5}(\sqrt{5})^5 - \binom{11}{6}(\sqrt{5})^6 + \binom{11}{7}(\sqrt{5})^7 - \binom{11}{8}(\sqrt{5})^8 + \\
& + \binom{11}{9}(\sqrt{5})^9 - \binom{11}{10}(\sqrt{5})^{10} + \binom{11}{11}(\sqrt{5})^{11} = \\
& = \frac{2}{2^{11}\sqrt{5}} \left(\binom{11}{1}\sqrt{5} + \binom{11}{3}(\sqrt{5})^3 + \binom{11}{5}(\sqrt{5})^5 + \binom{11}{7}(\sqrt{5})^7 + \right. \\
& \quad \left. + \binom{11}{9}(\sqrt{5})^9 + \binom{11}{11}(\sqrt{5})^{11} \right) = \\
& = \frac{1}{2^{10}\sqrt{5}} \left(11\sqrt{5} + 165 \cdot 5\sqrt{5} + 462 \cdot 25\sqrt{5} + 330 \cdot 125\sqrt{5} + 55 \cdot 625\sqrt{5} + 3125\sqrt{5} \right) = \\
& = \frac{1}{2^{10}} (11 + 165 \cdot 5 + 462 \cdot 25 + 330 \cdot 125 + 55 \cdot 625 + 3125) = 89.
\end{aligned}$$

Závěr. Je $p_{10} = 89$.

Metodické poznámky

Jde sice „jen“ o úpravy číselných výrazů, úpravy jsou však pracnější, tudíž náchylnější k chybám. Je třeba postupovat pomalu a s rozvahou.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinatorika v geometrii

Úloha 1 (úroveň 1)

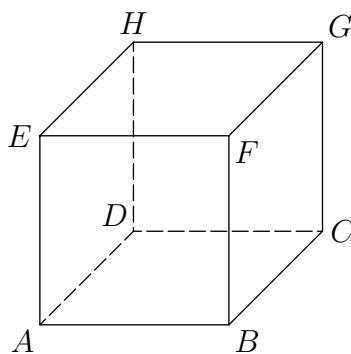
Předpokládané znalosti: geometrické modelování, otočení kolem osy v prostoru, středová souměrnost v prostoru, rovinová souměrnost

Určete počet obarvení stěn krychle dvěma barvami, jestliže celá stěna je vždy obarvena jednou barvou a celá krychle může být i jednobarevná. Za stejná obarvení jsou považována ta, která lze získat zobrazením krychle v otočení kolem osy, ve středové souměrnosti či v rovinové souměrnosti.

Řešení

Označme si vrcholy krychle podle obrázku. Vezmeme černou a bílou barvu. Inverzním obarvením k danému obarvení nazveme takové, kde se vzájemně vymění obě barvy. Všechny možnosti obarvení jsou následující:

1. Celá krychle je černá; druhé obarvení je inverzní.
2. Jedna stěna je černá, ostatní jsou bílé; druhé obarvení je inverzní.
3. Dvě stěny jsou černé, ostatní jsou bílé. Černé stěny mohou být sousední, nebo protilehlé; k oběma situacím existuje inverzní obarvení.
4. Tři stěny jsou černé a tři bílé. Vyjdeme od obarvení, kdy byly dvě stěny černé a čtyři bílé a systematicky probíráme jednu stěnu po druhé a sledujeme, zda vznikne nové obarvení pro tři stěny černé a tři bílé. Existují dvě možnosti pro černé stěny, jednak $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, jednak $ABCD$, $ABFE$, $EFGH$. Zde inverzní obarvení je některé z výše jmenovaných, takže nové obarvení nedostaneme.



Závěr. Požadovaných obarvení je $2 + 2 + 4 + 2 = 10$.

Metodické poznámky

Úloha je jednoduchá, nevyžaduje žádné podstatné znalosti, důležitá je pouze prostorová představivost a systematické probírání všech možností. Shodná zobrazení v prostoru stačí chápat jen intuitivně. Je vhodné mít k dispozici model krychle.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: geometrické modelování, otočení kolem osy v prostoru, středová souměrnost v prostoru, rovinová souměrnost

Určete počet obarvení vrcholů krychle dvěma barvami, jestliže všechny vrcholy mohou mít stejnou barvu. Za stejná obarvení jsou považována ta, která lze získat zobrazením krychle v otočení kolem osy, ve středové souměrnosti či v rovinové souměrnosti.

Řešení

Označme si vrcholy krychle podle obrázku. Vezmeme černou a bílou barvu. Inverzním obarvením k danému obarvení nazveme takové, kde se vzájemně vymění obě barvy. Všechny možnosti obarvení jsou následující:

1. Všechny vrcholy jsou černé; druhé obarvení je inverzní.
2. Jeden vrchol je černý, ostatní jsou bílé; druhé obarvení je inverzní.
3. Dva vrcholy jsou černé, ostatní jsou bílé. Černé vrcholy mohou být např. A a B , nebo A a C , nebo A a G ; ke všem těmto situacím existuje inverzní obarvení.
4. Tři vrcholy jsou černé, ostatní jsou bílé. Vyjdeme od obarvení, kdy byly dva vrcholy černé a šest bílých a systematicky probíráme jeden vrchol po druhém a sledujeme, zda vznikne nové obarvení pro tři vrcholy černé a pět bílých. Černé mohou být vrcholy A a B a C , nebo A a B a G , nebo A a C a F ; ke všem těmto situacím existuje inverzní obarvení.
5. Čtyři vrcholy jsou černé a čtyři bílé. Opět vycházíme z předchozích obarvení a systematicky hledáme požadované obarvení. Černé mohou být vrcholy A a B a C a D , nebo A a B a C a E , nebo A a B a C a F , nebo A a B a C a G , nebo A a B a G a H , nebo A a C a F a H . Zde inverzní obarvení je některé z výše jmenovaných, takže nové obarvení nedostaneme.

Závěr. Požadovaných obarvení je $2 + 2 + 6 + 6 + 6 = 22$.

Metodické poznámky

Úloha je jednoduchá, nevyžaduje žádné podstatné znalosti, důležitá je pouze prostorová představivost a systematické probírání všech možností. Shodná zobrazení v prostoru stačí chápat jen intuitivně. Je vhodné mít k dispozici model krychle. Úloha je obtížnější oproti předchozí úloze v počtu systematicky probíraných možností.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: geometrické modelování, otočení kolem osy v prostoru, středová souměrnost v prostoru, rovinová souměrnost

Určete počet obarvení hran krychle dvěma barvami tak, že čtyři hrany mají jednu barvu a zbylých osm má druhou barvu. Za stejná obarvení jsou považována ta, která lze získat zobrazením krychle v otočení kolem osy, ve středové souměrnosti či v rovinové souměrnosti.

Řešení

Označme si vrcholy krychle podle obrázku. Vezmeme černou a bílou barvu. Inverzním obarvením k danému obarvení nazveme takové, kde se vzájemně vymění obě barvy.

Budeme postupně obarvovat jednu hranu černou barvou, pak k těmto obarvením přidáme druhou černou hranu atd. Všechny možnosti obarvení jsou následující:

1. Jedna hrana je černá, ostatní jsou bílé; druhé obarvení je inverzní.
2. Dvě hrany jsou černé, ostatní jsou bílé. Černé hrany mohou být např. AB a BC , nebo AB a CD , nebo AB a CG , nebo AB a GH ; ke všem těmto situacím existuje inverzní obarvení.
3. Tři hrany jsou černé, ostatní jsou bílé. Vyjdeme od obarvení, kdy byly dvě hrany černé a systematicky probíráme jednu hranu po druhé a sledujeme, zda vznikne nové obarvení pro tři hrany černé a devět bílých. Černé hrany mohou být např. AB a BC a CD , nebo AB a BC a AE , nebo AB a BC a BF , nebo AB a BC a DH , AB a BC a EF , AB a BC a GH , nebo AB a CD a FG , nebo AB a CG a EH ; ke všem těmto situacím existuje inverzní obarvení.
4. Čtyři hrany jsou černé, ostatní jsou bílé. Opět vycházíme z předchozích obarvení a systematicky hledáme požadované obarvení. Černé mohou být hrany AB a BC a CD a DA , nebo AB a BC a CD a AE , nebo AB a BC a CD a BF , nebo AB a BC a CD a EF , nebo AB a BC a CD a FG , nebo AB a BC a CD a EH , nebo AB a BC a AE a CG , nebo AB a BC a AE a DH , nebo AB a BC a AE a GH , nebo AB a BC a BF a DH , nebo AB a BC a DH a EF , nebo AB a BC a DH a GH , nebo AB a BC a EF a FG , nebo AB a BC a EF a GH , nebo AB a BC a EF a EH , nebo AB a BC a GH a EH , nebo AB a CD a FG a EH , nebo AB a CD a EF a GH ; ke všem těmto situacím existuje inverzní obarvení.

Závěr. Požadovaných obarvení je 36.

Metodické poznámky

Úloha je jednoduchá, nevyžaduje žádné podstatné znalosti, důležitá je pouze prostorová představivost a systematické probírání všech možností. Shodná zobrazení v prostoru stačí chápat jen intuitivně. Je vhodné mít k dispozici model krychle. Úloha je obtížnější oproti předchozí úloze v počtu systematicky probíraných možností. Počítat možnosti, kdy je pět či šest hran stejné barvy, je sice také možné, ale je to opakující se proces, který nepřináší již mnoho nového, naopak zde hrozí možnost chyby.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

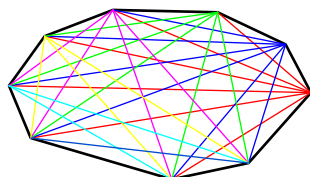
Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinace bez opakování

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, princip součtu

Určete počet úhlopříček konvexního n -úhelníku ($n \geq 3$).



Řešení

Každá dvojice vrcholů je koncovými body některé strany nebo úhlopříčky. Pro n vrcholů máme takových dvojic právě $\binom{n}{2}$. Mezi nimi je n stran, proto počet všech úhlopříček v konvexním n -úhelníku je právě

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Metodické poznámky

Úloha na počet různých dvojic. Tato úloha má zajímavý důsledek.

Uvažujme libovolný vrchol n -úhelníku. Z něj vychází $n-3$ úhlopříček. Nyní postupujme po vrcholech n -úhelníku proti směru hodinových ručiček. Ze sousedního vrcholu vychází také $n-3$ úhlopříček, z dalšího vrcholu vychází $n-4$ úhlopříček, které jsme ještě neuvažovali, atd. Proto počet úhlopříček je

$$(n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + \dots + 2 + 1.$$

Odtud

$$1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2) = \frac{n(n-3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

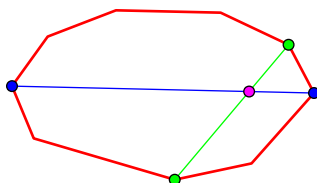
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, princip bijekce

Předpokládejme, že žádné tři úhlopříčky konvexního n -úhelníku ($n \geq 4$) neprocházejí tímž bodem. Určete počet průsečíků úhlopříček, které leží uvnitř n -úhelníku?

Řešení

Každý průsečík úhlopříček uvnitř n -úhelníku je určen dvěma úhlopříčkami. Přitom každá z nich je určena svými dvěma koncovými body. Jednomu průsečíku úhlopříček tak odpovídají čtyři vrcholy n -úhelníku. Naopak, každé čtyři vrcholy n -úhelníku určují právě jeden průsečík úhlopříček (viz obr.).



Počet průsečíků úhlopříček uvnitř n -úhelníku je tak roven počtu výběru čtyř vrcholů z daných n vrcholů n -úhelníku. Proto uvnitř n -úhelníku leží právě

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

průsečíků úhlopříček.

Metodické poznámky

Návodná úloha na užití principu bijekce při řešení kombinatorických úloh. Je nutné si uvědomit, že počet úhlopříček je stejný jako počet výběrů čtyř vrcholů n -úhelníku. Tato úloha má zajímavé důsledky.

Uvažujme n -úhelník $A_1 A_2 \dots A_n$ podle zadání. Počet čtveřic vrcholů, mezi kterými je A_1 je $\binom{n-1}{3}$. Počet čtveřic vrcholů, mezi kterými není A_1 , ale je A_2 , je $\binom{n-2}{3}$. Počet čtveřic vrcholů, mezi kterými nejsou A_1 a A_2 , ale je mezi nimi A_3 , je $\binom{n-3}{3}$, atd. Počet čtveřic vrcholů tak je

$$\binom{n-1}{3} + \binom{n-2}{3} + \dots + \binom{3}{3} = \binom{n}{4}.$$

Jiný důsledek. Uvažujme úhlopříčku, která daný čtyřúhelník rozdělí na dvě části, přičemž v jedné je p vrcholů, ve druhé je $n-2-p$ vrcholů. Potom tuto úhlopříčku protne právě $p(n-2-p)$ dalších úhlopříček (pravidlo součinu). Jednomu danému vrcholu tak odpovídá $1(n-3) + 2(n-4) + \dots + (n-3)1$ průsečíků úhlopříček. Počet průsečíků úhlopříček tak je (uvědomme si, že tímto způsobem uvažujeme každý průsečík úhlopříček 4krát)

$$(1(n-3) + 2(n-4) + \dots + (n-3)1) \cdot \frac{n}{4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Odtud

$$1(n-3) + 2(n-4) + \dots + (n-3)1 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

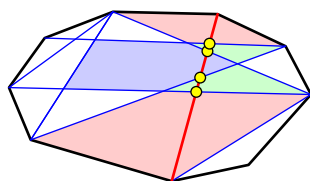
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování

Předpokládejme, že žádné tři úhlopříčky konvexního n -úhelníku ($n \geq 4$) neprocházejí tímž bodem. Na kolik částí rozdělí úhlopříčky tento n -úhelník?

Řešení

Zakreslujme postupně úhlopříčky do n -úhelníku. Pokud není zakreslena žádná úhlopříčka, strany n -úhelníku ohraničují jednu část. Každá úhlopříčka s každým průsečíkem s jinou úhlopříčkou rozdělí jednu jednu již existující část na dvě, počet částí se tedy zvýší o 1, stejná situace nastane s koncovým bodem této úhlopříčky, ten také zvýší počet již existujících částí o 1. Počet částí je tak roven součtu počtu všech průsečíků úhlopříček plus počet všech koncových bodů úhlopříček plus jedna (počáteční počet částí, viz obr.).



Užitím výsledků úloh 1 a 2 tak zjistíme, že počet všech částí, na které úhlopříčky rozdělí n -úhelník, je roven

$$\binom{n}{4} + \frac{n(n-3)}{2} + 1 = \frac{(n-2)(n-1)(n^2 - 3n + 12)}{24}.$$

Pozn. Pokud užijeme běžnou úmluvu, že pro přirozená čísla $n < k$ je $\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, platí tento vztah i pro $n = 3$.

Metodické poznámky

Užití principu součtu při řešení kombinatorických úloh.

Všechny tři úlohy ukazují syntetické odvození uvedených vztahů. Je možné při zadání úloh získané vztahy uvést a požadovat důkaz jejich platnosti. Potom by se s výhodou dal užít princip matematické indukce. Nebo u příkladů 1 a 2 mohou žáci zkusit výsledek odhadnout a dokázat matematickou indukcí.

Zdroj:

Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.; pavel.calabek@upol.cz

Gradované úlohy

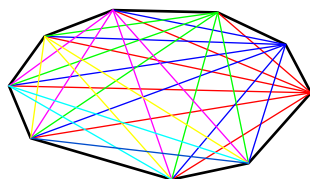
Tematický okruh RVP G: Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost

Klíčové pojmy: kombinace bez opakování

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování

Kolik trojúhelníků má vrcholy ve vrcholech daného konvexního n -úhelníku?



Řešení

Jelikož daný n -úhelník je konvexní, libovolná trojice jeho vrcholů určuje vrcholy trojúhelníku. Z n vrcholů můžeme takových trojic vybrat

$$\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

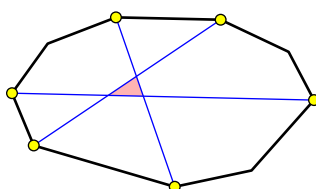
Metodické poznámky

Jednoduchá úloha na počet možných výběrů různých trojic.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, princip bijekce

Předpokládejme, že žádné tři úhlopříčky konvexního n -úhelníku ($n \geq 6$) neprocházejí týmhž bodem. Kolik trojúhelníků má strany na úhlopříčkách tohoto n -úhelníku, přičemž žádný jejich vrchol není vrcholem n -úhelníku?



Řešení

Každá strana takového trojúhelníku leží na úhlopříčce daného n -úhelníku, která je určena dvěma koncovými body, vrcholy n -úhelníku. Žádný z vrcholů trojúhelníku není vrcholem n -úhelníku, jeho strany proto určují šest různých vrcholů daného n -úhelníku.

Naopak, každými šesti vrcholy daného n -úhelníku je určen právě jeden trojúhelník, jehož strany leží na úhlopříčkách n -úhelníku a přitom žádný vrchol tohoto trojúhelníku není vrcholem n -úhelníku.

Počet trojúhelníků daných vlastností je proto

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{720} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

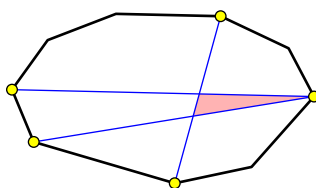
Metodické poznámky

Užití principu bijekce při řešení kombinatorických úloh. Počet trojúhelníků podle zadání úlohy je stejný jako počet výběrů 6 vrcholů.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, princip bijekce

Předpokládejme, že žádné tři úhlopříčky konvexního n -úhelníku ($n \geq 5$) neprocházejí tímž bodem. Kolik trojúhelníků má strany na úhlopříčkách tohoto n -úhelníku, přičemž právě jeden jeho vrchol je vrcholem daného n -úhelníku?



Řešení

Každá strana takového trojúhelníku leží na úhlopříčce nebo straně daného n -úhelníku, která je určena dvěma koncovými body, vrcholy n -úhelníku. Protože jeden vrchol trojúhelníku je vrcholem n -úhelníku, určují tyto strany a úhlopříčky 5 různých vrcholů n -úhelníku. Naopak, z pěti různých vrcholů n -úhelníku můžeme vybrat jeden (pěti způsoby), který bude vrcholem trojúhelníku požadovaných vlastností, a zbývající čtyři vrcholy jednoznačně určují tento trojúhelník.

Počet trojúhelníků daných vlastností je proto

$$5 \binom{n}{5} = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

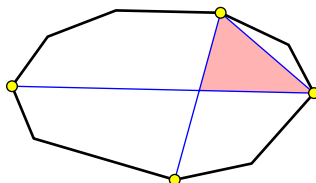
Metodické poznámky

Užití principu bijekce. Nyní každé pětici vrcholů n -úhelníku odpovídá pět různých konfigurací.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, princip bijekce

Předpokládejme, že žádné tři úhlopříčky konvexního n -úhelníku ($n \geq 4$) neprocházejí tímž bodem. Kolik trojúhelníků má strany na úhlopříčkách nebo stranách tohoto n -úhelníku, přičemž dva jeho vrcholy jsou vrcholy daného n -úhelníku?



Řešení

Trojúhelník požadovaných vlastností určuje 4 vrcholy n -úhelníku, přitom každými čtyřmi vrcholy jsou určeny čtyři trojúhelníky daných vlastností. Proto počet trojúhelníků s danou vlastností je právě

$$4 \binom{n}{4} = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Metodické poznámky

Užití principu bijekce. Nyní každé čtveřici vrcholů n -úhelníku odpovídají čtyři různé konfigurace.

Z výsledků úloh 1–4 plyne, že pokud do konvexního n -úhelníku ($n \geq 6$), jehož úhlopříčky neprocházejí tímž bodem, zakreslíme všechny úhlopříčky, na výsledném obrázku bude právě

$$\binom{n}{3} + 4 \binom{n}{4} + 5 \binom{n}{5} + \binom{n}{6} = \frac{(n-2)(n-1)n(n^3 + 18n^2 - 43n + 60)}{720}$$

různých trojúhelníků. Pokud použijeme obvyklou úmluvu, že pro přirozená čísla $n < k$ je $\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, platí tento vztah i pro $n = 3, 4, 5$.

Zdroj:

Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.; pavel.calabek@upol.cz