

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Geometrie

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	5
Metodický list 3	8
Metodický list 4	11
Metodický list 5	14
Metodický list 6	18
Metodický list 7	22
Metodický list 8	27
Metodický list 9	31
Metodický list 10	35
Metodický list 11	38
Metodický list 12	42
Metodický list 13	45
Metodický list 14	48
Metodický list 15	50
Metodický list 16	53
Metodický list 17	56
Metodický list 18	59
Metodický list 19	64
Metodický list 20	67
Metodický list 21	69
Metodický list 22	75
Metodický list 23	78
Metodický list 24	83
Metodický list 25	86
Metodický list 26	91
Metodický list 27	95
Metodický list 28	100
Metodický list 29	103
Metodický list 30	110

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Pythagorova věta

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

Určete délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, víte-li, že délka jeho druhé odvěsny je 7 cm a délka přepony je 25 cm.

Řešení

V pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta, tedy $c^2 = a^2 + b^2$, kde písmenem c je označena přepona a písmeny a , b odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Je tedy $c = 25$ cm, $a = 7$ cm a platí

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow b = 24 \text{ cm.}$$

Závěr. Druhá odvěsna tohoto trojúhelníku má délku 24 cm.

Metodické poznámky

Úloha je základní úlohou na využití Pythagorovy věty.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta, dělitelnost

V pravoúhlém trojúhelníku je délka jedné odvěsny 13 cm. Určete délku druhé odvěsny a přepony tak, aby všechny strany trojúhelníku měly v cm celočíselnou délku.

Řešení

Délku přepony v uvažovaném trojúhelníku označme c a druhou odvěsnu b . Z Pythagorovy věty tak máme $13^2 = c^2 - b^2$. Dále podle známého vzorce pro rozdíl druhých mocnin dostaneme rovnici $169 = (c - b)(c + b)$. Hledaná čísla b a c jsou celá, proto čísla $c - b$ a $c + b$ jsou také celá. Číslo 169 je možno rozložit na součin buď $1 \cdot 169$, nebo $13 \cdot 13$. Druhá možnost však nevyhovuje naší rovnici, neboť čísla $c - b$ a $c + b$ jsou různá. Tedy nutně $c - b = 1$ a $c + b = 169$. Z této soustavy lineárních rovnic vypočítáme sečtením obou rovnic neznámou c ($c = 85$). Z první rovnice pak vyjádříme neznámou b ($b = 84$).

Závěr. Strany trojúhelníku mají délky 13 cm, 84 cm a 85 cm.

Metodické poznámky

Úloha kombinuje znalosti Pythagorovy věty s použitím vzorce pro rozdíl čtverců, s dělitelností a řešením jednoduché soustavy lineárních rovnic.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta, dělitelnost

V pravoúhlém trojúhelníku je délka jedné odvěsny p , kde p je prvočíslo. Určete délku druhé odvěsny a přepony v závislosti na p tak, aby všechny strany trojúhelníku měly celočíselnou délku.

Řešení

Jedná se o zobecnění předchozí úlohy. V ní byla dána délka odvěsny (prvočíselná), což snížilo počet možností uvedené faktorizace na jedinou. Přeponu v tomto trojúhelníku označme c a druhou odvěsnu b . Máme tak rovnici $p^2 = c^2 - b^2$ a jí odpovídající soustavu rovnic $c - b = 1$ a $c + b = p^2$. Celočíselná řešení této soustavy jsou tedy

$$b = \frac{p^2 - 1}{2} \quad \text{a} \quad c = \frac{p^2 + 1}{2}.$$

Závěr. Strany trojúhelníku mají délky p , $\frac{p^2-1}{2}$ a $\frac{p^2+1}{2}$.

Metodické poznámky

Úloha kombinuje znalosti Pythagorovy věty s použitím vzorce pro rozdíl druhých mocnin, s dělitelností a řešením soustavy lineárních rovnic. Je pro studenty obtížnější, neboť v zadání úlohy je libovolné prvočíslo p . Úlohou lze upozornit na existenci nekonečně mnoha Pythagorejských trojic, což přesahuje rámec RVP G, lze jí však považovat za vhodné téma pro zájemce o matematiku.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: planimetrie, konstrukce na základě výpočtu

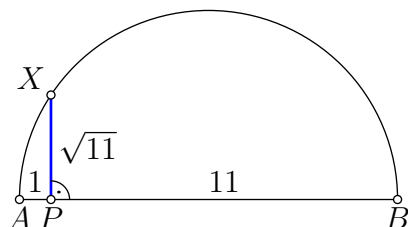
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, Eukleidovy věty, Thaletova věta

Narýsujte úsečku délky $\sqrt{11} + \sqrt{2}$.

Řešení

Úlohu rozdělíme na dvě části. Pro $\sqrt{11}$ použijeme například Eukleidovu větu o výšce $v = \sqrt{x_a \cdot x_b}$ viz obr. 1. Sestrojíme úsečku $|AB| = 12$. Rozdělíme ji bodem P , tak, aby platilo $|AP| = 1$; $|PB| = 11$. Nad AB sestrojíme Thaletovu kružnici. Bodem P vedeme kolmici k úsečce AB , její průsečík s Thaletovou kružnicí označíme X . Potom $|PX| = \sqrt{11}$.



Obr. 1

Pro velikost úsečky $\sqrt{2}$ můžeme zvolit například větu Pythagorovu. Sestrojíme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník KLM o odvěsnách délky 1. Přepona KL tohoto trojúhelníku má délku $\sqrt{2}$.

Závěr. Tyto dvě úsečky PX a KL nanese za sebou na polopřímku.

Metodické poznámky

Pro sestrojení úsečky $\sqrt{11} + \sqrt{2}$ můžeme použít i Eukleidovu větu o odvěsně.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, Eukleidovy věty, Thaletova věta, podobnost trojúhelníků

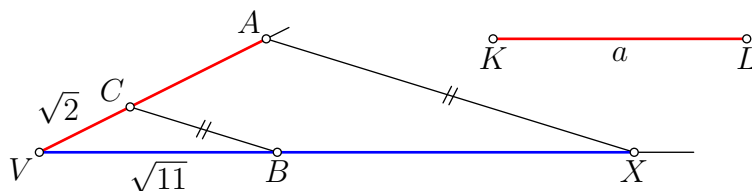
Je dána úsečka KL o délce a . Sestrojte úsečku délky $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot a$.

Řešení

Pro řešení využijeme podobné trojúhelníky. Zvolme libovolný úhel s vrcholem V viz obr. 2. Na jednom rameni sestrojíme úsečku VA tak, aby platilo $|VA| = a$ a úsečku VC o délce $\sqrt{2}$ (viz předchozí příklad), na druhém rameni sestrojíme úsečku VB velikosti $\sqrt{11}$, můžeme použít také postup z předchozího příkladu. Bodem A vedeme rovnoběžku

s přímkou BC , její průsečík s ramenem VB označíme X . Úsečka VX má hledanou délku $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \cdot a$. Z podobnosti trojúhelníků VBC a VXA vyplývá

$$\frac{|VX|}{|VB|} = \frac{|VA|}{|VC|} \quad \text{tedy,} \quad |VX| = \frac{|VA| \cdot |VB|}{|VC|}.$$



Obr. 2

Závěr. Sestrojená úsečka VX má délku vyhovující podmínkám úlohy.

Metodické poznámky

Jedná se o užití čtvrté geometrické úměrné, je to propojení mezi algebraickými úpravami výrazu a geometrií.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: čtvrtá geometrická úměrná

Je dán trojúhelník ABC . Uvnitř stran AC , BC sestrojte po řadě body M , N tak, aby úsečky CM a BN byly shodné a přitom MN byla úsečka rovnoběžná s AB .

Řešení

Označme $|CM| = |BN| = x$. Protože MN je rovnoběžná s AB , na základě podobnosti trojúhelníků ABC a MNC platí

$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CN|}{|BN|},$$

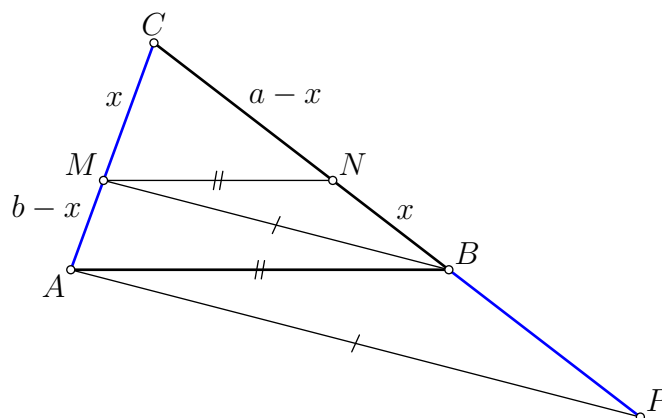
tedy při obvyklém značení stran platí

$$\frac{x}{b-x} = \frac{a-x}{x}.$$

Vyjádríme neznámou

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Konstrukce. Na polopřímce CB sestrojíme za bodem B bod P tak, aby $|BP| = b$. Bodem B vedeme polopřímku rovnoběžnou s AP . Označíme M její průsečík s AC . Dále



Obr. 3

bodem M vedeme rovnoběžku s AB a její průsečík s CB označíme N . Potom M a N jsou hledané body.

Závěr. Úloha má jediné řešení. V trojúhelníku APC je bod B vnitřním bodem strany CP a protože BM je rovnoběžná s AP , je také M vnitřním bodem úsečky AC .

Metodické poznámky

Metody řešení konstrukčních úloh na základě výpočtu používáme zvláště tehdy, jestliže jiné metody nevedou k cíli.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

každé straně vede jedna taková úsečka, a proto je jejich počet $2n - 2 = 2(n - 1)$. Celková délka tkaničky je pak $2b + 2(n - 1)\sqrt{a^2 + b^2}$.

Závěr. Délka tkaničky je $2b + 2(n - 1)\sqrt{a^2 + b^2}$.

Metodické poznámky

Úloha je základním příkladem užití Pythagorovy věty, úlohu druhé úrovně z ní činí především výpočet s obecnými délkami a obecným počtem dírek.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

Tkaničky do zavazovacích bot navléká obuvník vzorem z obrázku 1. Obuvník vyrábí v daném měsíci tři typy obuvi, jejichž parametry jsou uvedeny v tabulce. Kolik celých metrů tkaniček má objednat na tento měsíc? Počítejte, že na smyčku je potřeba 0,5 m tkaničky. S ohledem na celkovou ztrátu na prostřih navyšte hodnotu o 5 %.

Typ bot číslo	Počet dírek na jedné straně	Vzdálenost sousedních dírek v cm	Vzdálenost mezi řadami v cm	Počet párů bot v měsíci
1.	12	2	4	500
2.	6	1	3	1000
3.	4	1	3	800

Řešení

Jelikož máme tři druhy bot, najdeme nejdříve obecný vzorec pro délku tkaničky bez smyčky stejně jako v úloze 2. Délku tkaničky do boty typu 1, 2, 3 označíme po řadě D_1 , D_2 , D_3 . Pak

$$D_1 = 2 \left(0,04 + 11 \cdot \sqrt{0,02^2 + 0,04^2} \right) = 0,08 + 22 \cdot \sqrt{0,002} \text{ m},$$

$$D_2 = 2 \left(0,03 + 5 \cdot \sqrt{0,01^2 + 0,03^2} \right) = 0,06 + 10 \cdot \sqrt{0,001} \text{ m},$$

$$D_3 = 2 \left(0,03 + 3 \cdot \sqrt{0,01^2 + 0,03^2} \right) = 0,06 + 6 \cdot \sqrt{0,001} \text{ m}.$$

Tedy celkem $2(500D_1 + 1000D_2 + 800D_3) + (500 + 1000 + 800) \doteq 4515,904$ m. Zbývá započítat předpokládanou pětiprocentní ztrátu při stříhání tkaniček. Celkem bude potřeba $1,05 \cdot 4515,904 \doteq 4742$ m tkaničky.

Závěr. Obuvník musí na tento měsíc nakoupit 6149 m tkaničky.

Metodické poznámky

V úloze je opět pouze jednoduché užití Pythagorovy věty. Je ale komplikovanější množstvím výpočtů a kombinací s použitím procent. Bylo by ji možné vyřešit také bez obecného vzorce na výpočet délky tkaničky z úlohy 2.

Zdroj:

Stewart I.: *Jak rozkrájet dort a další matematické záhady*. Dokořán a Argo; Praha, 2009.

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

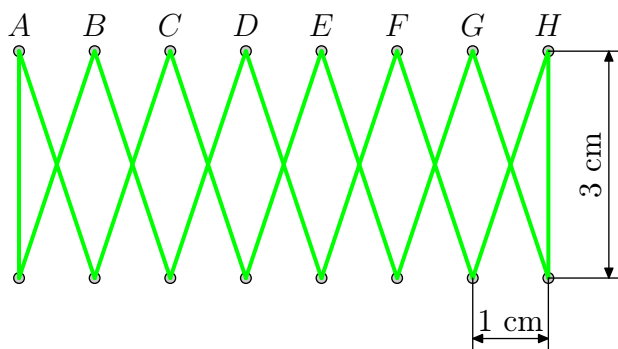
Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Pythagorova věta

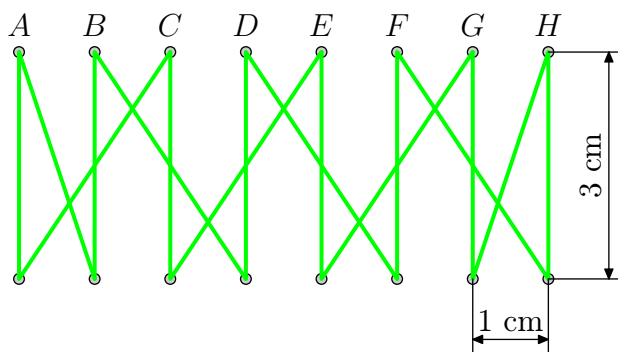
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

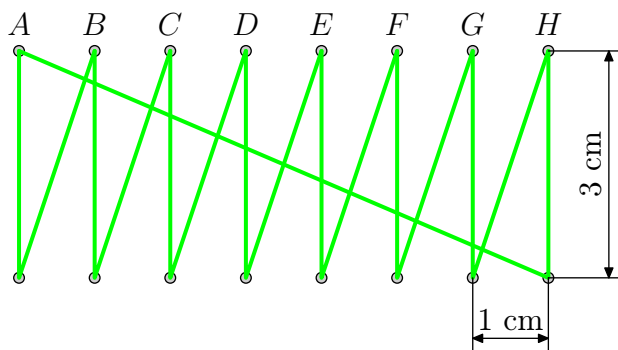
Na obrázcích 1, 2 a 3 jsou po řadě znázorněny znázorněny americký, evropský a obchodní způsob šněrování tkaničky v botě o osmi dírkách na jedné straně. Vypočtěte délky tkaničky, která je potřeba na zašněrování boty všemi níže uvedenými způsoby. Jednotlivé délky porovnejte.



Obr. 1 Americký styl



Obr. 2 Evropský styl



Obr. 3 Obchodní styl

Řešení

Vypočítáme délky jednotlivých úseček na obrázcích a sečteme je. Některé z nich lze vyčíst přímo z obrázku a jiné vypočítáme pomocí Pythagorovy věty.

Americký styl:

$$2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = 6 + 14\sqrt{10} \doteq 50,272 \text{ cm.}$$

Evropský styl:

$$8 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} + 6 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2} = 24 + 2\sqrt{10} + 6\sqrt{13} \doteq 51,958 \text{ cm.}$$

Obchodní styl:

$$8 \cdot 3 + 7 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} + 1 \cdot \sqrt{7^2 + 3^2} = 24 + 7\sqrt{10} + \sqrt{58} \doteq 53,752 \text{ cm.}$$

Závěr. Pokud budeme tuto botu šněrovat jednotlivými styly, budeme potřebovat tkaničky délek uvedených výše. Nejdelší tkanička je potřeba na styl obchodní a nejkratší na styl americký.

Metodické poznámky

Úloha je základní příkladem využití Pythagorovy věty. Navíc by se dala nazvat úlohou aplikační. Ve výuce je možné před zahájením výpočtu udělat pokusné měření tkaniček jednotlivých délek a učinit tak hypotézu, který způsob má nejkratší délku, což by mohlo vést ke zvýšení zájmu o výpočet. Je možné využít kreativitu studentů v hledání nových stylů šněrování s různými podmínkami.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

Spočítejte délky tkaničky pro jednotlivé typy šněrování z úlohy 1 pro obecný počet dírek větší než 3 na jedné straně boty.

Řešení

Postupujeme podobně jako v řešení úlohy 1. Označme počet dírek na jedné straně boty písmenem n , $n > 3$.

Americký styl:

$$2 \cdot 3 + (n - 1) \cdot 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = 6 + 2(n - 1)\sqrt{10}.$$

Evropský styl:

$$n \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} + (n - 2) \cdot \sqrt{2^2 + 3^2} = n \cdot 3 + 2\sqrt{10} + (n - 2)\sqrt{13}.$$

Obchodní styl:

$$n \cdot 3 + (n - 1) \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} + 1 \cdot \sqrt{(n - 1)^2 + 3^2} = n \cdot 3 + (n - 1)\sqrt{10} + \sqrt{9 + (n - 1)^2}.$$

Závěr. Délky tkaniček navlečených jednotlivými styly vypočteme podle výše uvedených vzorců pro $n > 3$.

Metodické poznámky

Úloha je základním příkladem užití Pythagorovy věty, úlohu druhé úrovně z ní činí především výpočet s obecným počtem dírek. V úloze 1 lehce spočítáme na obrázku počet všech úseček v jednotlivých způsobech šněrování, u této úlohy je potřeba zapojit jistý stupeň abstrakce. Studentům je možné položit otázku, z jakých důvodů je v zadání uveden minimální počet dírek vedle sebe 4. Je možné také poukázat na obtížnost porovnání jednotlivých délek nyní.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

Spočítejte délky tkaničky pro jednotlivé typy šněrování z úlohy 1 pro obecný počet dírek větší než 3 na jedné straně boty a obecnou vzdálenost mezi dírkami a obecnou roztečí mezi řadami dírek na botě.

Řešení

Vzdálenost mezi oběma řadami označme písmenem a a rozteč mezi dírkami označme písmenem b .

Americký styl:

$$2 \cdot a + (n - 1) \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Evropský styl:

$$n \cdot a + 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + (n - 2) \cdot \sqrt{4b^2 + a^2}.$$

Obchodní styl:

$$n \cdot a + (n - 1) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + 1 \cdot \sqrt{b^2(n - 1)^2 + a^2}.$$

Závěr. Délky tkaniček navlečených jednotlivými vzory vypočteme podle výše uvedených vzorců pro $n > 3$.

Metodické poznámky

Úloha je ze všech tří nejobecnější, proto ji řadíme mezi úlohy třetí úrovně.

Zdroj:

Stewart I.: *Jak rozkrájet dort a další matematické záhady*. Dokořán a Argo; Praha, 2009.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: trojúhelník, průsečík výšek, zobrazení

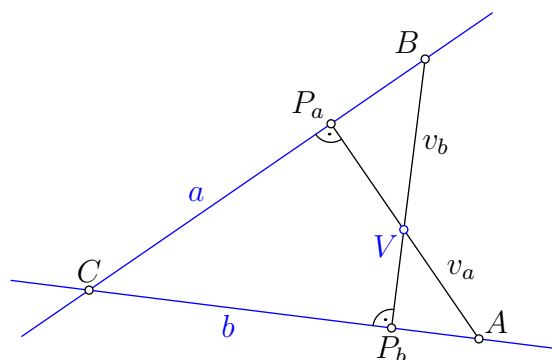
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: trojúhelník, vlastnosti průsečíku výšek (ortocentra)

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán průsečík výšek V a přímky, na nichž leží strany BC , AC trojúhelníku.

Řešení

Každá výška trojúhelníku prochází vrcholem a je kolmá k odpovídající straně. Výšky ke stranám a , b umíme sestrojit, a tak umíme nalézt k těmto stranám odpovídající vrcholy.



Obr. 1: Výšky trojúhelníku s vyznačenými vrcholy

Postup konstrukce

1. Průsečík daných přímek a , b je vrchol C .
2. Bodem V vedeme kolmice v_a , v_b k daným přímkám a , b .
3. Sestrojíme vrcholy A , B jako průsečíky sestrojených výšek s danými přímkami stran: $v_a \cap b = \{A\}$, $v_b \cap a = \{B\}$ (obráz. 1).

Závěr. V pravoúhlém trojúhelníku leží průsečík výšek ve vrcholu pravého úhlu. Jsou-li dané přímky a , b navzájem kolmé a daný bod V neleží v jejich průsečíku, nemá úloha řešení. Jsou-li dané přímky a , b navzájem kolmé a daný bod V leží v jejich průsečíku, není trojúhelník určen. Nejsou-li dané přímky a , b navzájem kolmé a daný bod V leží v jejich průsečíku, nemá úloha řešení. V ostatních případech má úloha jediné řešení.

Řešení (nástin jiného řešení)

Znalý řešitel může postupovat také takto: Obrazy ortocentra v osových souměrnostech s osami v přímkách proložených stranami trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané. Můžeme tedy sestrojit zmíněné obrazy bodu V – body V' a V'' – a opsanou kružnici určenou body C , V' , V'' , která protíná dané přímky stran ve zbývajících vrcholech.

Metodické poznámky

Úloha je velmi snadná a jejím cílem je upevnit poznatky o vlastnostech průsečíku výšek trojúhelníku.

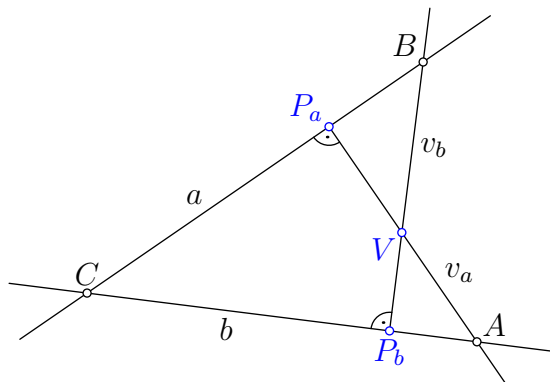
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: trojúhelník, vlastnosti průsečíku výšek (ortocentra)

Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): průsečík výšek V a paty výšek P_a, P_b po řadě na strany trojúhelníku BC, CA .

Řešení

Každá výška trojúhelníku prochází vrcholem a je kolmá na protilehlou stranu. Výšky na strany a, b umíme sestrojit, a poté umíme sestrojit i přímky k nim kolmé, na nichž leží strany trojúhelníku a, b . Tím jsme úlohu převedli na předchozí případ.



Obr. 2: Výšky trojúhelníku s vyznačenými vrcholy

Popis konstrukce

1. Sestrojíme výšky (přímky) $v_a = VP_a$, $v_b = VP_b$.
2. Body P_a, P_b vedeme kolmice a, b k sestrojeným přímkám v_a, v_b .
3. Průsečík přímek a, b je vrchol C : $\{C\} = a \cap b$.
4. Sestrojíme vrcholy A, B jako průsečíky výšek s přímkami na nichž leží odpovídající strany: $v_a \cap b = \{A\}$, $v_b \cap a = \{B\}$ (viz obr. 2).

Závěr. V pravoúhlém trojúhelníku leží průsečík výšek ve vrcholu pravého úhlu. Jsou-li přímky VP_a, VP_b navzájem kolmé, nemá úloha řešení. V ostatních případech má úloha jediné řešení.

Řešení (nástin jiného řešení)

Znalý řešitel může i zde využít kružnici opsanou trojúhelníku: Obrazy ortocentra v osových souměrnostech s osami v přímkách proložených stranami trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané. Jsou tedy souměrné i ve středových souměrnostech se středy

v patách výšek. Můžeme tedy sestrojit obrazy V' a V'' vrcholu V a kružnici určenou body C , V' , V'' , která protíná přímky stran (kolmic k VP_a , VP_b) ve vrcholech B , A .

Metodické poznámky

Úloha je stále velmi snadná, na rozdíl od Úlohy 1 však potřebuje jeden krok – sestrojení přímek stran – navíc. Uvědomit si potřebné vztahy a sestrojit z nich vyplývající objekty bývá v geometrii pro mnohé žáky obtížné.

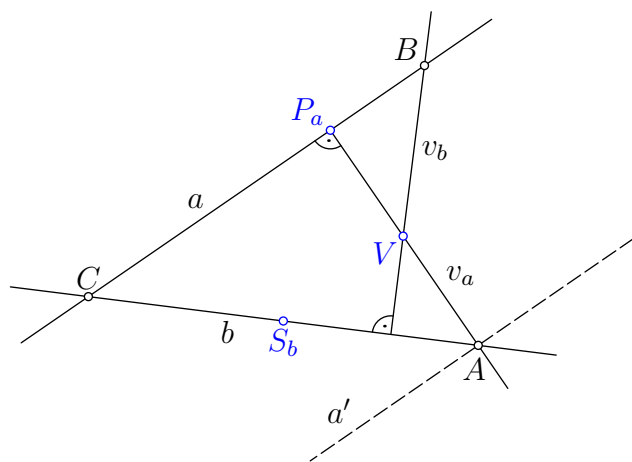
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: trojúhelník, vlastnosti průsečíku výšek (ortocentra), středová souměrnost

Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): průsečík výšek V , pata výšky P_a na stranu BC a střed S_b strany CA .

Řešení

Každá výška trojúhelníku prochází vrcholem a je kolmá na odpovídající stranu. Výšku v_a na stranu a , a tedy i přímku, na níž leží strana a , umíme sestrojit (obr. 3). Vrchol A leží na výšce v_a , vrchol C na stranách a , b a daný bod S_b je střed strany b , tedy střed úsečky AC . Body A , C jsou obrazy jeden druhého ve středové souměrnosti se středem S_b .



Obr. 3

Popis konstrukce

1. Sestrojíme výšku (přímku) $v_a = VP_a$.
2. Bodem P_a vedeme kolmici a k sestrojené přímce v_a (obr. 3).
3. Sestrojíme přímku a' jako obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem S_b .
4. Sestrojíme vrchol A : $v_a \cap a' = \{A\}$.
5. Sestrojíme přímku $b = AS_b$ a její průsečík C s přímkou a : $b \cap a = \{C\}$ (obr. 3).
6. Vedeme kolmici v_b k přímce b bodem V .
7. Sestrojíme její průsečík B s přímkou a : $v_b \cap a = \{B\}$ (obr. 3).

Poznámka. 3. a 4. krok konstrukce jsme mohli vést pomocí obrazu přímky v_a :

3. Sestrojíme výšku v'_a jako obraz přímky v_a ve středové souměrnosti se středem S_b .
4. Sestrojíme vrchol C : $v'_a \cap a = \{C\}$.
5. Sestrojíme vrchol A – obraz bodu C ve středové souměrnosti se středem S_b .

Závěr. Pokud by střed S_b strany b ležel na straně a , splýval by s vrcholem strany b a trojúhelník by splynul v úsečku. Je-li tedy přímka $P_a S_b$ kolmá na přímkou $P_a V$, nemá úloha řešení. V ostatních případech má úloha jediné řešení.

Metodické poznámky

Postup je obtížný potřebou úvahy o souměrnosti úsečky AC podle středu, a tedy potřebou využít středové souměrnosti v konstrukci trojúhelníku. Pokud budeme úlohu řešit bezprostředně po výkladu a procvičení shodných zobrazení, bude nalezení tohoto kroku pro žáky snazší.

Zdroj:

Holan, T., Gergelitsová, Š.: *GeoTest* [online]. Praha, 2011, [cit. 2013-07-30], dostupné
www: <http://geotest.geometry.cz>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz

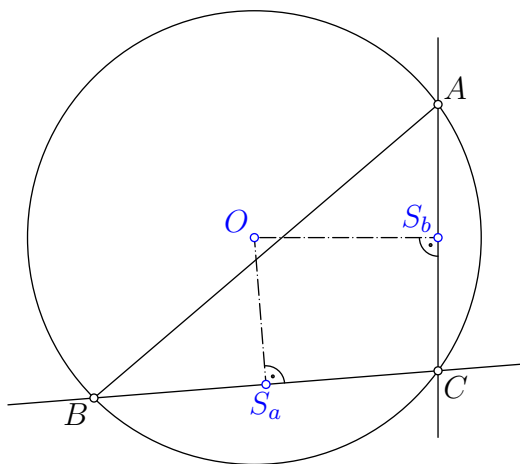
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: trojúhelník, středy stran, osy stran, kružnice opsaná trojúhelníku

Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): střed O kružnice trojúhelníku opsané a středy S_a, S_b stran po řadě BC, CA .

Řešení

Přímky OS_a, OS_b jsou osy stran BC, CA . Strany BC, CA jsou ke svým osám kolmé, a umíme tudíž sestrojit přímky, na nichž leží.



Obr. 2: Střed kružnice opsané a osy a středy stran

Popis konstrukce

1. Sestrojíme osy stran $o_a = OS_a, o_b = OS_b$.
2. Body S_a, S_b vedeme kolmice a, b k sestrojeným osám o_a, o_b .
3. Průsečík přímek a, b je vrchol C : $a \cap b = \{C\}$.
4. Sestrojíme kružnici o se středem O procházející bodem C – kružnici opsanou trojúhelníku ABC : $o(O; |OC|)$.
5. Sestrojíme zbývající vrcholy A, B jako průsečíky kružnice opsané o s přímkami, na nichž leží strany trojúhelníku. $o \cap b = \{A\}, o \cap a = \{B\}$.

Závěr. Je-li trojúhelník OS_aS_b pravoúhlý s odvěsnou S_aS_b , protínají se kolmice a, b k S_aO, S_bO v jednom z daných středů stran a úloha nemá řešení. V ostatních případech má úloha jediné řešení.

Metodické poznámky

Úloha je snadná a jejím cílem je upevnit poznatky o vlastnostech os stran a kružnice opsané trojúhelníku. Obtíž může být jen v tom, aby si žáci uvědomili, že mohou začít konstrukci nikoliv od nějakého požadovaného prvku trojúhelníku, ale od sestrojení os stran.

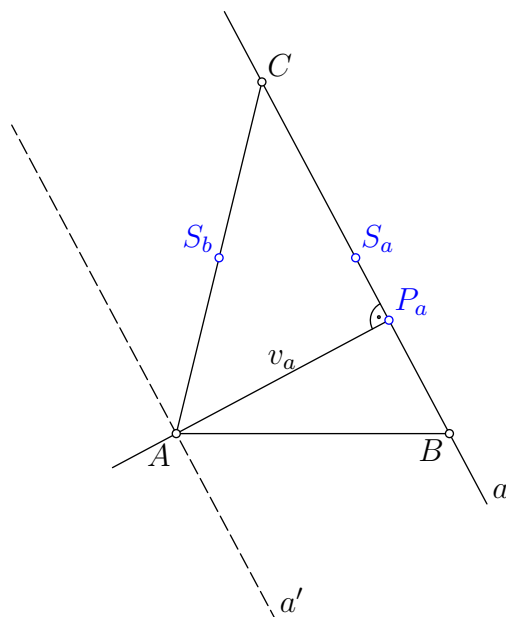
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: trojúhelník, vlastnosti ortocentra, středová souměrnost

Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány tři nekolineární body (body, které neleží v jedné přímce): pata výšky P_a na stranu BC a středy S_a, S_b stran po řadě BC, CA .

Řešení

Přímka strany a je určena body P_a, S_a . Výška na tuto stranu je kolmice k a v bodě P_a (obr. 3). Vrchol A leží na výšce v_a , vrchol C na stranách a, b a daný bod S_b je střed strany AC . Body A, C jsou obrazy jeden druhého ve středové souměrnosti se středem S_b (obr. 3). Bod S_a je střed úsečky BC (obr. 3).



Obr. 3

Popis konstrukce

1. Sestrojíme přímku $a = P_a S_a$ a k ní v bodě P_a kolmici v_a – výšku na stranu a .
2. Sestrojíme přímku a' jako obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem S_b .
3. Sestrojíme vrchol A : $v_a \cap a' = \{A\}$.
4. Sestrojíme přímku $b = AS_b$ a její průsečík C s přímkou a : $b \cap a = \{C\}$ (obr. 3).
5. Sestrojíme bod B jako průsečík přímky a a kružnice se středem S_a procházející bodem C : $k(S_a; |S_a C|) \cap a = \{B\}$ (obr. 3).

Poznámka. 4. a 5. krok konstrukce jsme mohli vést pomocí středové souměrnosti, jde však v principu o tutéž konstrukci:

4. Sestrojíme bod C středově souměrný s bodem A v souměrnosti se středem S_b .
5. Sestrojíme (na přímce a) bod B středově souměrný s bodem C podle středu S_a .

Závěr. Pokud by byla poloha bodů taková, že by bod S_b byl středem úsečky $S_a A$, splýval by střed strany a s jejím vrcholem C a trojúhelník ABC by splýnul v úsečku.

Tato poloha nastává právě tehdy, je-li trojúhelník $P_a S_a S_b$ rovnoramenný se základnou $P_a S_a$. V tomto případě nemá úloha řešení. V ostatních případech má úloha jediné řešení.

Řešení (nástin jiného řešení)

Zkušenější žáci si mohou uvědomit, že S_b jako střed přepony pravoúhlého trojúhelníku je zároveň středem kružnice jemu opsané. Proto po sestrojení přímek a a $P_a A$ jsou body C a A jejich průsečíky s kružnicí se středem S_b procházející bodem P_a .

Metodické poznámky

Prvé dva kroky postupu jsou přímočaré. Postup je obtížný potřebou úvahy o souměrnosti úsečky AC podle středu, a tedy potřebou využít středové souměrnosti v konstrukci trojúhelníku.

Zdroj:

Holan, T., Gergelitsová, Š.: *GeoTest* [online]. Praha, 2011, [cit. 2013-07-30], dostupné
www: <http://geotest.geometry.cz>

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: shodná zobrazení (středová souměrnost)

Úloha 1 (úroveň 3)

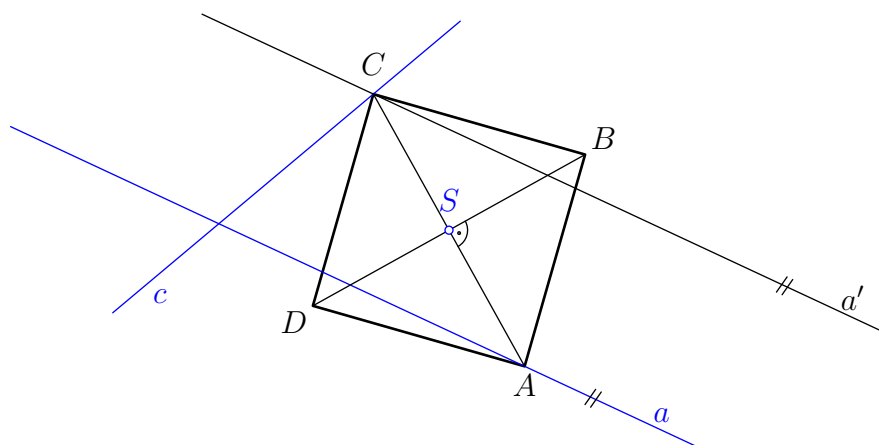
Předpokládané znalosti: čtverec a jeho vlastnosti, definice středové souměrnosti, zobrazení bodu a přímky ve středové souměrnosti

Jsou dány dvě různoběžky a, c a bod S , který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a, C \in c$ a bod S byl středem čtverce.

Řešení

Rozbor. (obr. 1) Předpokládáme, že má úloha řešení. Protože bod S je středem hledaného čtverce, je středem úsečky AC , která je jeho úhlopříčkou. Body A a C jsou tudíž navzájem vzor a obraz ve středové souměrnosti se středem S . Bod A má být bodem přímky a , proto bod C jako jeho obraz bude bodem obrazu přímky a , tj. bodem přímky a' . Pro bod C tak máme dvě podmínky: $C \in c$ a $C \in a'$. Bod A je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem S . Ve čtverci se úhlopříčky navzájem půlí a jsou na sebe kolmé. Tyto dvě vlastnosti využijeme pro sestavení bodů B a D , ty leží na kolmici k úsečce AC ,

$$|SB| = |SD| = |SA| = |SC|.$$



Obr. 1

Zápis konstrukce.

1. a, c, S
2. a' ; a' je obraz a ve středové souměrnosti se středem S
3. C ; $a' \cap c$
4. A ; A je obraz C ve středové souměrnosti se středem S
5. p ; $S \in p, p \perp AC$
6. B, D ; $B, D \in p, |SB| = |SD| = |SA|$

7. čtverec $ABCD$

Závěr. Úloha má vždy právě jedno řešení.

Metodické poznámky

Úsečka AC je příčkou mezi přímkami a , c , která má střed v daném bodě S . Před řešením úlohy je vhodné připomenout základy středové souměrnosti, tj. zobrazení bodu, zobrazení přímky (rovnoběžnost vzoru a obrazu) a zdůraznit princip řešení úloh na konstrukci příček mezi dvěma útvary: Leží-li bod na útvaru, leží jeho obraz na obrazu útvaru; symbolicky: $X \in U \Rightarrow X' \in U'$. Úlohu je možné začít řešit sestrojením bodu A jako průsečíku přímky a a obrazu přímky c , tj. přímky c' .

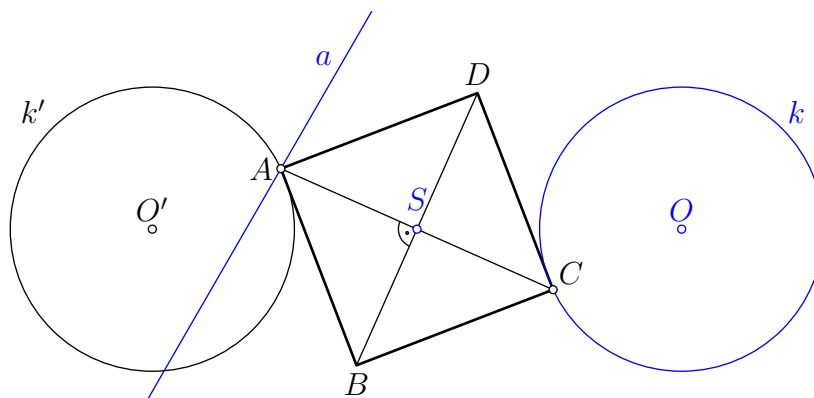
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: čtverec a jeho vlastnosti, definice středové souměrnosti, zobrazení bodu a přímky a kružnice ve středové souměrnosti

Je dána přímka a , kružnice $k(O; r)$ a bod S . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $C \in k$ a bod S byl středem čtverce.

Řešení

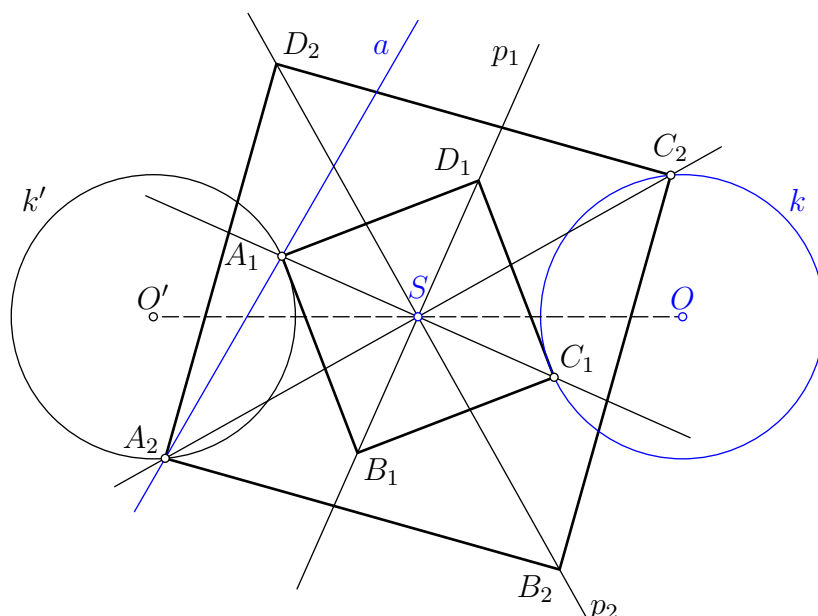
Rozbor (obr. 2a) Předpokládáme, že má úloha řešení. Protože bod S je středem hledaného čtverce, je středem úsečky AC , která je jeho úhlopříčkou. Body A a C jsou tudíž navzájem vzor a obraz ve středové souměrnosti se středem S . Bod C má být bodem kružnice k , proto bod A jako jeho obraz bude bodem obrazu kružnice k , tj. bodem kružnice k' . Pro bod A tak máme dvě podmínky: $A \in a$ a $A \in k'$. Bod C je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem S . Body B , D leží na kolmici k úsečce AC a $|SB| = |SD| = |SA| = |SC|$.



Obr. 2a

Zápis konstrukce. (obr. 2b)

1. $a, k(O; r), S$
2. k' ; k' je obraz k ve středové souměrnosti se středem S
3. A ; $A \in a \cap k'$
4. C ; C je obraz A ve středové souměrnosti se středem S
5. p ; $S \in p, p \perp AC$
6. B, D ; $B, D \in p, |SB| = |SD| = |SA|$
7. čtverec $ABCD$



Obr. 2b

Diskuse. Počet řešení odpovídá počtu společných bodů kružnice k' a přímky a . Úloha tak může mít 2, nebo 1, nebo 0 řešení, neboť přímka a může být sečnou, nebo tečnou, nebo vnější přímkou kružnice k' .

Metodické poznámky

Úsečka AC je příčkou mezi přímkou a a kružnicí k, c , která má střed v daném bodě S . Úlohu je možné začít řešit sestrojením bodu C jako průsečíku kružnice k a obrazu přímky a , tj. přímky a' . Pro rozbor a konstrukci je vhodné volit zadání tak, aby úloha měla dvě řešení, na závěr je však žádoucí rozebrat situace i pro 1, resp. 0 řešení. Při diskusi lze využít grafický software Geogebra.

Úloha 3 (úroveň 1)

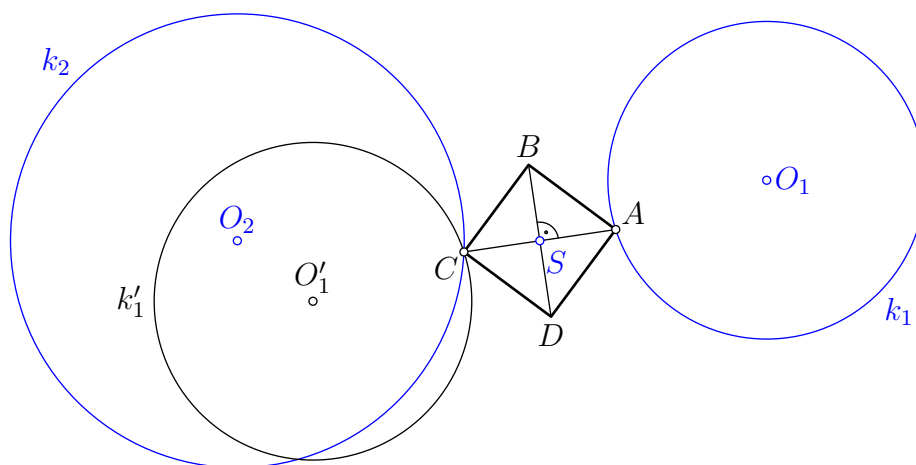
Předpokládané znalosti: definice středové souměrnosti, zobrazení bodu a kružnice ve středové souměrnosti, vzájemná poloha dvou kružnic, čtverec a jeho vlastnosti

Jsou dány kružnice $k_1(O_1; r_1), k_2(O_2; r_2), r_1 \neq r_2$ a bod S . Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo: $A \in k_1, C \in k_2$ a bod S je středem čtverce.

Řešení

Rozbor. (obr. 3a) Předpokládáme, že má úloha řešení. Úhlopříčky ve čtverci se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé. Protože bod S je středem hledaného čtverce, je středem úsečky AC , která je jeho úhlopříčkou. Body A a C jsou tudíž navzájem vzor a obraz ve středové souměrnosti se středem S . Bod A leží na kružnici k_1 , jeho obraz leží na obrazu kružnice k_1 , tj. na kružnici k'_1 . Pro bod C tak máme dvě podmínky: $C \in k_2$ a zároveň $C \in k'_1$. Bod A je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem S . Body B, D leží na kolmici k úsečce AC a platí

$$|BS| = |DS| = |AS| = |CS|$$



Obr. 3a

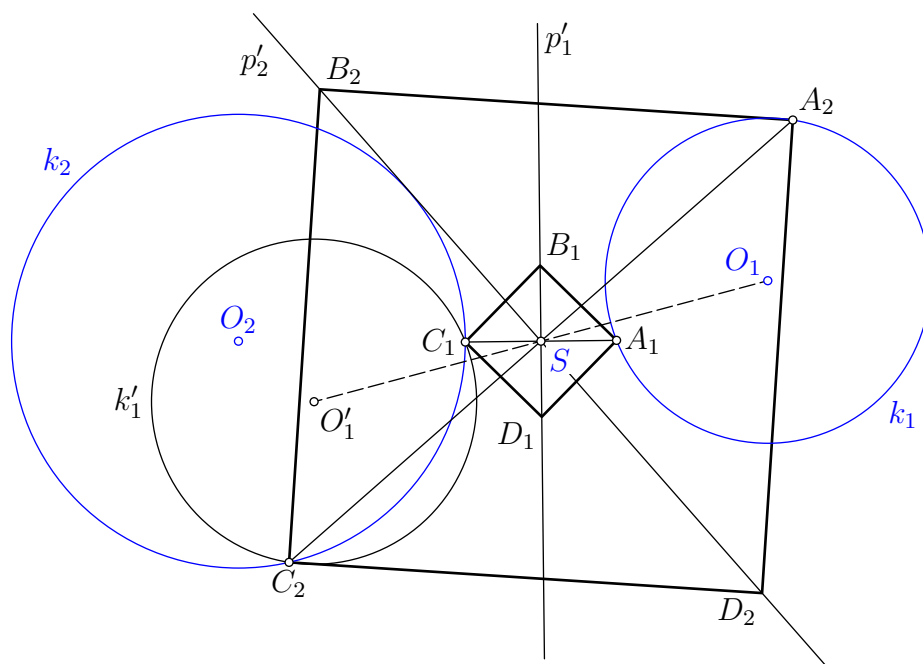
Zápis konstrukce. (obr. 3b)

1. $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, S
2. k'_1 ; k'_1 je obraz k_1 ve středové souměrnosti se středem S
3. C ; $C \in k_2 \cap k'_1$
4. A ; A je obraz C ve středové souměrnosti se středem S
5. p ; $S \in p$, $p \perp AC$
6. B, D ; $B, D \in p$, $|SB| = |SD| = |SA|$
7. čtverec $ABCD$

Diskuse. Počet řešení odpovídá počtu společných bodů kružnic k_2 a k'_1 . Úloha tak může mít 2, nebo 1, nebo 0 řešení, neboť kružnice o různých poloměrech mohou mít společné 2 body (protínají se), nebo 1 bod (mají vnější resp. vnitřní dotyk), nebo žádný bod (jedna leží vně, resp. uvnitř druhé).

Metodické poznámky

Úsečka AC je příčkou mezi kružnicemi k_1 a k_2 , která má střed v daném bodě S . Úlohu je možné začít řešit sestrojením bodu A jako průsečíku kružnic k_1 a k'_2 , kde k'_2 je obrazem kružnice k_2 . Pro rozbor a konstrukci je vhodné volit zadání tak, aby úloha měla dvě řešení. Na závěr je však žádoucí rozebrat situace i pro 1, resp. 0 řešení a případně zmínit možnost nekonečně mnoha řešení pro $r_1 = r_2$. Při diskusi lze využít grafický software Geogebra.



Obr. 3b

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: středový úhel, obvodový úhel, odchylka přímek

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vztah mezi obvodovým a středovým úhlem

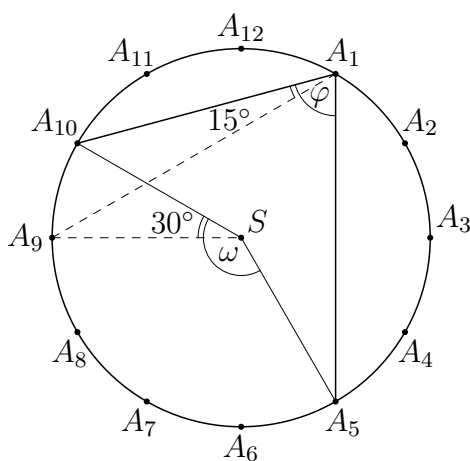
Na ciferníku standardních hodin jsou vyznačeny hodiny 1 až 12. Jakou velikost má úhel, jehož vrchol je na značce 1 a ramena prochází značkami 5 a 10?

Řešení

Ciferník hodin můžeme ztotožnit s vrcholy pravidelného 12úhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$ (obr. 1) tak, že značka 1 odpovídá vrchol A_1 , značka 2 vrchol A_2 atd.

Využijeme vztah mezi obvodovým úhlem φ a jemu příslušným středovým úhlem ω . Platí $\omega = 2\varphi$.

Protože je ciferník rozdělen na 12 hodin, odpovídá jedné hodině středový úhel o velikosti 30° , neboť 12 hodinám odpovídá plný úhel velikosti 360° . Protože příslušný obvodový úhel má poloviční velikost, odpovídá jedné hodině obvodový úhel o velikosti 15° . Velikost hledaného obvodového úhlu odpovídá pěti hodinám, je tedy $5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$.



Obr. 1

Závěr. Úhel, jehož vrchol je na značce 1 a ramena prochází značkami 5 a 10 má velikost 75° .

Metodické poznámky

Můžeme také nejprve spočítat velikost středového úhlu A_5SA_{10} ($5 \cdot 30^\circ$), a pak teprve velikost obvodového úhlu $\frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ$.

Lze volit analogické úlohy s jiným dělením kružnice, např. na 10 dílů apod.

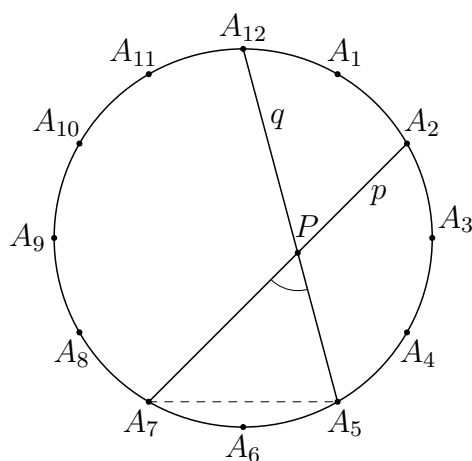
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztah mezi obvodovým a středovým úhlem

Na ciferníku standardních hodin jsou vyznačeny hodiny 1 až 12. Přímka p prochází značkami 2 a 7, přímka q prochází značkami 5 a 12. Jakou velikost má odchylka přímek p a q ?

Řešení

Ciferník hodin můžeme ztotožnit s pravidelným dvanáctiúhelníkem stejně jako v úloze 1. Označme P průsečík přímek p a q a spojme body A_5 a A_7 (obr. 2).



Obr. 2

V trojúhelníku A_7A_5P určíme na základě výsledků úlohy 1 velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A_7 a A_5 . Úhel u vrcholu A_7 je obvodový úhel odpovídající 3 hodinám a jeho velikost je tudíž $3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$. Úhel u vrcholu A_5 je obvodový úhel odpovídající 5 hodinám a jeho velikost je tudíž $5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$. Zbývajících úhel při vrcholu P má tedy velikost $180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$. Protože je tento úhel menší než úhel pravý, jedná se o odchylku přímek p a q .

Závěr. Odchylka přímek p a q je 60° .

Metodické poznámky

Spojíme-li místo bodů A_7 a A_5 body A_2 a A_5 , pak úhel A_7PA_5 je vnějším úhlem trojúhelníku A_5A_2P při vrcholu P . Vnitřní úhly u vrcholu A_5 i vrcholu A_2 odpovídají 2 hodinám, jejich velikosti jsou tedy 30° . Příslušný vnější úhel při vrcholu P (hledaná odchylka) je jejich součtem, tj. 60° .

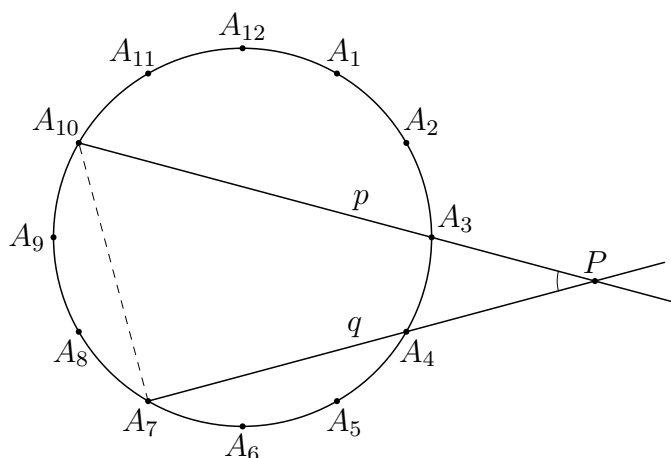
Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztah mezi obvodovým a středovým úhlem

Na ciferníku standardních hodin jsou vyznačeny hodiny 1 až 12. Přímka p prochází značkami 10 a 3, přímka q prochází značkami 7 a 4. Jakou velikost má odchylka přímek p a q ?

Řešení

Ciferník hodin můžeme ztotožnit s pravidelným dvanáctiúhelníkem stejně jako v úloze 1. Označme P průsečík přímk p a q a spojme značky A_{10} a A_7 (obr. 3).



Obr. 3

V trojúhelníku A_7PA_{10} určíme na základě výsledků příkladu 1 velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A_7 a A_{10} . Úhel u vrcholu A_7 je obvodový úhel odpovídající 6 hodinám a jeho velikost je tudíž $6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. Úhel u vrcholu A_{10} je obvodový úhel odpovídající 4 hodinám, jeho velikost je tudíž $4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$. Zbývajících úhel při vrcholu P má tedy velikost $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Protože je tento úhel menší než úhel pravý, jedná se o odchylku přímk p a q .

Závěr. Ochylka přímk p a q je 30° .

Úloha 4 (úroveň 3)

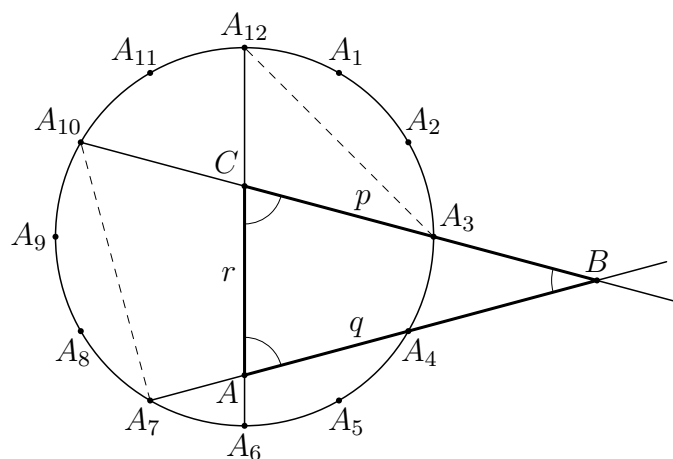
Předpokládané znalosti: Předpokládané znalosti: vztah mezi obvodovým a středovým úhlem

Na ciferníku standardních hodin jsou vyznačeny hodiny 1 až 12. Přímka p prochází značkami 10 a 3, přímka q prochází značkami 7 a 4 a přímka r prochází značkami 12 a 6. Označme A průsečík přímk r a q , B průsečík přímk p a q a C průsečík přímk p a r . Určete vnitřní úhly trojúhelníku ABC .

Řešení

Velikost vnitřního úhlu při vrcholu B trojúhelníku ABC určíme postupem uvedeným v úloze 3.

Ciferník hodin můžeme ztotožnit s pravidelným dvanáctiúhelníkem stejně jako v úloze 1. Spojíme body A_{10} a A_7 (obr. 4) a z trojúhelníku A_7BA_{10} zjistíme, že jeho velikost je 30° (viz úloha 3).



Obr. 4

Velikost vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC určíme postupem uvedeným v metodické poznámce u příkladu 2. Spojíme body A_{12} a A_3 (obr. 4).

V trojúhelníku $A_{12}CA_3$ je úhel u vrcholu A_{12} obvodový úhel odpovídající 3 hodinám, jeho velikost je $3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, úhel u vrcholu C je obvodový úhel odpovídající 2 hodinám a jeho velikost je $2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC je tedy $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC je doplňkem do 180° , tj. $180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$.

Závěr. Velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A , B a C v trojúhelníku ABC jsou po řadě 75° , 30° a 75° .

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

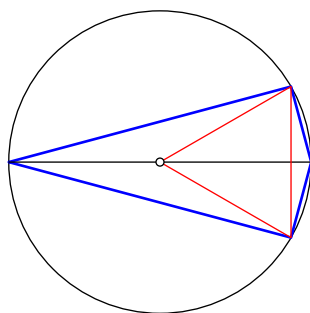
Klíčové pojmy: úhly v kružnici

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: úhly v kružnici, deltoid

Je dán tětíkový deltoid, jehož vrcholy dělí kružnici jemu opsanou na oblouky, jejichž délky jsou v poměru 1 : 1 : 5 : 5. Určete vnitřní úhly deltoidu a poměr délek jeho úhlopříček.

Řešení



Vzhledem k osově souměrnosti deltoidu je delší úhlopříčka průměrem opsané kružnice a dva shodné vnitřní úhly deltoidu jsou pravé (Thaletova věta).

Menší oblouk nad kratší úhlopříčkou tvoří $\frac{1}{6}$ délky kružnice, proto má středový úhel, který přísluší menšímu oblouku nad kratší tětívou, velikost 60° . Odpovídající obvodový úhel je nejmenším vnitřním úhlem deltoidu a má tedy velikost $\frac{1}{2}60^\circ = 30^\circ$. Protější tupý úhel pak má velikost $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Vzhledem k tomu, že středový úhel nad kratší úhlopříčkou je 60° , je trojúhelník, jehož strany jsou spojnice středu opsané kružnice s krajními body této úhlopříčky, rovnostranný. To znamená, že kratší úhlopříčka má délku shodnou s délkou poloměru opsané kružnice.

Poměr úhlopříček je tedy roven poměru poloměru ku průměru kružnice, tj. 1 : 2.

Závěr. Vnitřní úhly deltoidu mají velikost 30° , 90° , 150° a 90° . Poměr délek jeho úhlopříček je 1 : 2.

Metodické poznámky

V tětíkovém čtyřúhelníku se uplatňují vztahy mezi středovým a obvodovým úhlem a konstantní součet protějších úhlů.

Úlohu je vhodné modifikovat např. pro poměr 1 : 1 : 2 : 2, úhly 60° , 90° , 120° a 90° a poměr délek úhlopříček $2\sqrt{3} : 3$.

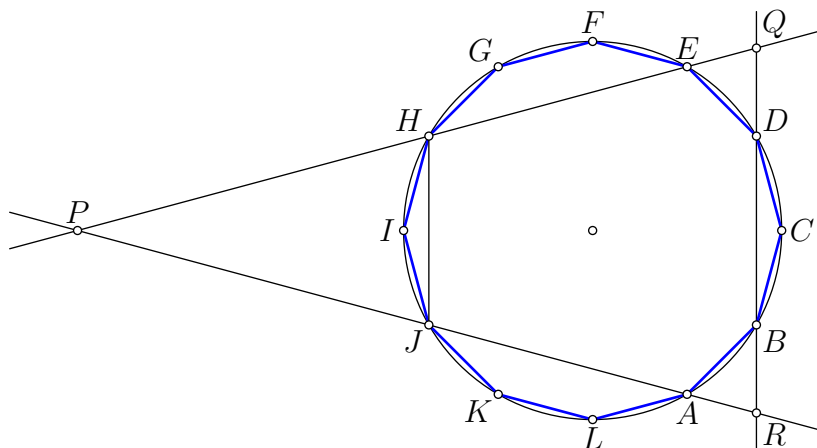
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: úhly v kružnici

Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$. Přímka HE protíná přímky AJ a BD po řadě v bodech P , Q , průsečík přímek AJ a B označme R . Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníku PQR .

Řešení

Doplňme úsečku HJ . Úhly HJA a EHJ jsou vnější úhly trojúhelníku PHJ .



Platí

$$|\sphericalangle HJA| = |\sphericalangle JPH| + |\sphericalangle PHJ| \text{ a současně } |\sphericalangle EHJ| = |\sphericalangle JPH| + |\sphericalangle PJH|,$$

odkud

$$|\sphericalangle HJA| + |\sphericalangle EHJ| = |\sphericalangle JPH| + |\sphericalangle PHJ| + |\sphericalangle JPH| + |\sphericalangle PJH|,$$

kde

$$|\sphericalangle PHJ| + |\sphericalangle JPH| + |\sphericalangle PJH| = 180^\circ \Rightarrow |\sphericalangle JPH| = |\sphericalangle HJA| + |\sphericalangle EHJ| - 180^\circ.$$

Úhel EHJ je obvodovým úhlem, který náleží většímu oblouku EJ , jehož délka je $\frac{7}{12}$ délky kružnice a příslušný středový úhel má velikost $\frac{7}{12} \cdot 360^\circ = 210^\circ$, obvodový úhel má poloviční velikost, tedy $|\sphericalangle EHJ| = 105^\circ$. Stejně pak $|\sphericalangle HJA| = 105^\circ$. Stejnou velikost má úhel HJA , který náleží oblouku HA , jehož délka je shodná s délkou oblouku EJ . Proto

$$|\sphericalangle RPQ| = |\sphericalangle JPH| = |\sphericalangle HJA| + |\sphericalangle EHJ| - 180^\circ = 105^\circ + 105^\circ - 180^\circ = 30^\circ.$$

Vzhledem k tomu, že délky oblouků JA a EH i oblouků DE a AB jsou shodné, je trojúhelník PQR rovnoramenný.

$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle QRP| = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Závěr. Vnitřní úhly v trojúhelníku PQR mají velikosti 30° , 75° a 75° .

Metodické poznámky

Možno zadat též jako práci ve 3 skupinách, kde každá skupina počítá jiný úhel a součet výsledků musí být 180° .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: úhly v kružnici; goniometrické funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, trigonometrie

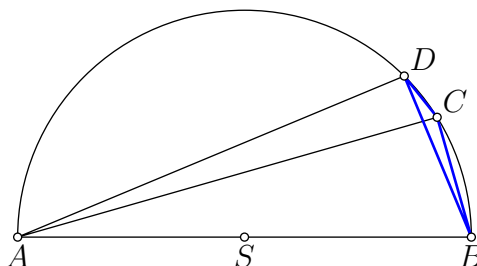
Body A, B, C, D leží na půlkružnici se středem S a s průměrem o délce $|AB| = 26$. Délka tětiv $|AC| = 25$, $|AD| = 24$.

Určete hodnoty goniometrických funkcí $\cos \beta$, $\cos \gamma$, $\cos \delta$, kde β, γ, δ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku BCD .

Řešení

AB je průměr kružnice, trojúhelník ABC i ABD je tedy pravoúhlý (Thaletova věta), proto

$$|\sphericalangle ADB| = 90^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ACB| = 90^\circ.$$



Podle Pythagorovy věty platí

$$|BD| = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{(26 - 24) \cdot (26 + 24)} = 10.$$

Označme $|\sphericalangle DBC| = \beta$, $|\sphericalangle DCB| = \gamma$, $|\sphericalangle BDC| = \delta$. Trojúhelníku BCD lze opsat kružnici s poloměrem $R = 13$. Podle sinové věty

$$\frac{|DB|}{\sin \gamma} = 2R, \quad \text{tedy} \quad \frac{10}{\sin \gamma} = 26 \quad \Rightarrow \quad \sin \gamma = \frac{5}{13}.$$

Úhel γ je zřejmě tupý ($\gamma = 90^\circ + |\sphericalangle ACB|$), funkce kosinus bude mít zápornou hodnotu

$$\cos \gamma = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

Úhel $|\sphericalangle BDC| = \delta$ je obvodový, přísluší stejnému oblouku jako $|\sphericalangle BAC|$, pro který z pravoúhlého trojúhelníku ABC vypočítáme $\cos |\sphericalangle BAC| = \frac{25}{26} = \cos \delta$.

Pro další výpočet určíme

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{51}}{26}, \quad \text{kde} \quad \sqrt{51} = |BC|.$$

Nyní využijeme součtové vzorce

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= (\cos x \cos y + \sin x \sin y), \\ \cos(x + y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y).\end{aligned}$$

Úhel $\beta = 180^\circ - (\gamma + \delta)$, proto $\cos \beta = -\cos(\gamma + \delta) = -(\cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta)$. Po dosazení výše vypočítaných hodnot dostáváme

$$\cos \beta = -\left(-\frac{12}{13} \cdot \frac{25}{26} - \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{51}}{26}\right) = \frac{5}{338} (60 + \sqrt{51}).$$

$$\text{Závěr. } \cos \beta = \frac{5}{338} (60 + \sqrt{51}), \cos \gamma = -\frac{12}{13}, \cos \delta = \frac{25}{26}.$$

Metodické poznámky

Vhodné počítat bez kalkulačky. Úloha propojuje znalosti z planimetrie, goniometrie a trigonometrie. Na závěr možno dopočítat hodnoty úhlů a porovnat s obrázkem.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: geometrie v rovině – Pythagorova věta a věty Eukleidovy, konstrukční úlohy

Úloha 1 (úroveň 1)

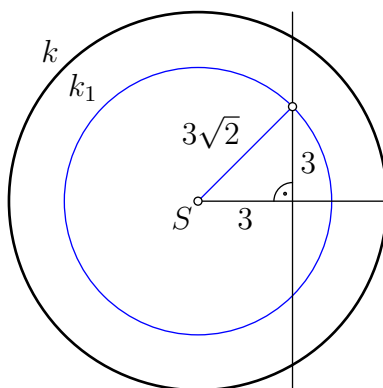
Předpokládané znalosti: vzorec pro obsah kruhu, Pythagorova věta, usměrňování zlomků

Kruh $K(S; r = 6 \text{ cm})$ rozdělte kružnicí $k_1(S; r_1)$ na dvě části stejného obsahu.

Řešení

Ze zadání plyne $\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$, odkud $r_1 = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; pro $r = 6 \text{ cm}$ je $r_1 = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

Konstrukce. Úsečku o délce $3\sqrt{2} \text{ cm}$ sestojíme využitím Pythagorovy věty – sestojíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 3 cm. Přepóna tohoto trojúhelníku má požadovanou délku, neboť $\sqrt{3^2 + 3^2} \text{ cm} = \sqrt{18} \text{ cm} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$.



Metodické poznámky

Lze řešit obecnou úlohu „Kruh $K(S; r)$ rozděl kružnicí $k_1(S; r_1)$ na dvě části stejného obsahu.“ A to nejen využitím věty Pythagorovy, ale i vět Eukleidových, neboť $\sqrt{\frac{r^2}{2}} = \sqrt{r \cdot \frac{r}{2}}$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzorec pro obsah kruhu, Pythagorova věta, usměrňování zlomků

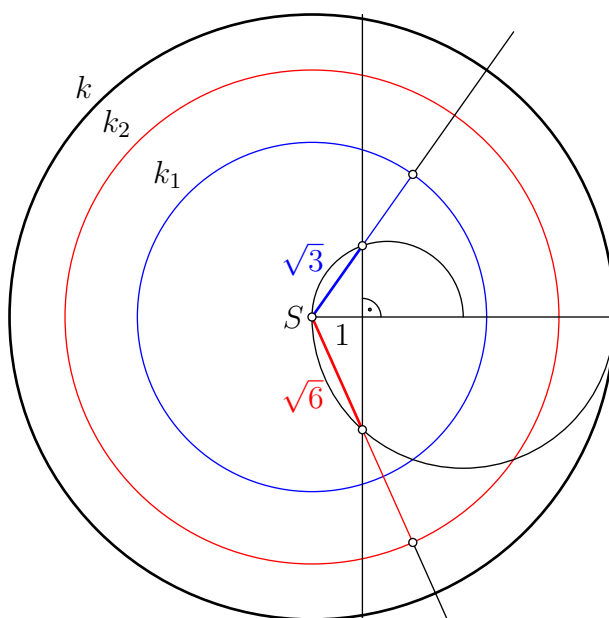
Kruh $K(S; r = 6 \text{ cm})$ rozdělte kružnicemi $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$ na tři části stejného obsahu.

Řešení

Ze zadání plyne pro poloměr r_1 menší kružnice $\pi r_1^2 = \frac{1}{3}\pi r^2$, odkud $r_1 = \sqrt{\frac{r^2}{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$; pro $r = 6$ cm je $r_1 = 2\sqrt{3}$ cm.

Pro poloměr r_2 větší kružnice pak platí $\pi r_2^2 = \frac{2}{3}\pi r^2$, odkud $r_2 = \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = r\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{6}}{3}$; pro $r = 6$ cm je $r_2 = 2\sqrt{6}$ cm.

Konstrukce. Úsečky o délkách $\sqrt{3}$ cm a $\sqrt{6}$ cm sestrojíme využitím Eukleidovy věty o odvěsně. $\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 1}$, proto $\sqrt{3}$ cm je délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku 3 cm a přilehlý úsek délku 1 cm. $\sqrt{6} = \sqrt{6 \cdot 1}$, proto $\sqrt{6}$ cm je délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku 6 cm a přilehlý úsek délku 1 cm.



Metodické poznámky

Můžeme řešit obecnou úlohu: „Kruh $K(S; r)$ rozdělte kružnicemi $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$ na dvě části stejného obsahu.“ A to nejen využitím věty Pythagorovy, ale i vět Eukleidových, neboť $\sqrt{\frac{r^2}{3}} = \sqrt{r \cdot \frac{r}{3}}$, $\sqrt{\frac{2r^2}{3}} = \sqrt{r \cdot \frac{2}{3}r}$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vzorec pro obsah mezikruží, usměrňování zlomků, Pythagorova věta

Mezikruží ohraničené kružnicemi $k_1(S; r_1 = 5$ cm), $k_2(S; r_2 = 3$ cm) rozdělte kružnicí $k(S; r)$ na dvě části stejného obsahu.

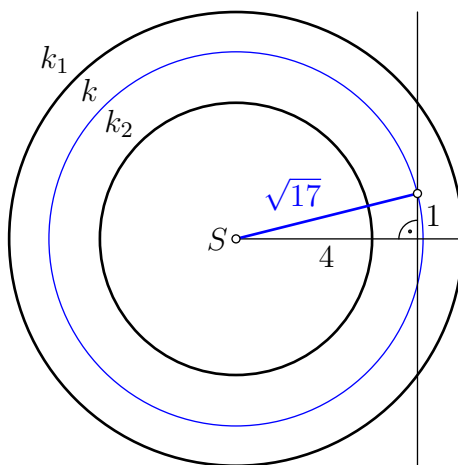
Řešení

Ze zadání plyne

$$\pi r_1^2 - \pi r^2 = \pi r^2 - \pi r_2^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{2(r_1^2 + r_2^2)}{4}} = \frac{\sqrt{(r_1\sqrt{2})^2 + (r_2\sqrt{2})^2}}{2};$$

pro $r_1 = 5$ cm a $r_2 = 3$ cm je $r = \sqrt{17}$ cm.

Konstrukce. Úsečku o délce $\sqrt{17}$ cm sestrojíme využitím Pythagorovy věty $\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1^2}$, proto $\sqrt{17}$ cm je délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky 4 cm a 1 cm.



Metodické poznámky

Úsečku o délce $r = \sqrt{17}$ cm můžeme sestrojit i využitím Eukleidových vět, neboť např. $\sqrt{17} = \sqrt{17 \cdot 1}$ nebo $\sqrt{17} = \sqrt{8,5 \cdot 2}$. Lze řešit obecnou úlohu: „Mezikruží ohraničené kružnicemi $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$ rozdělte kružnicí $k(S; r)$ na dvě části stejného obsahu.“

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Gradované úlohy

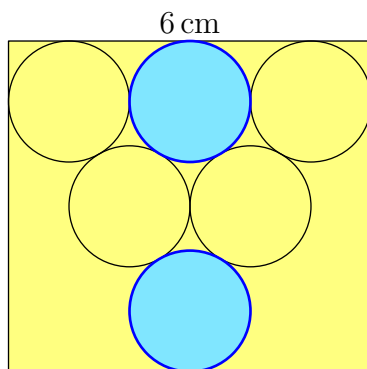
Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: trojúhelník (rovnostanný, pravoúhlý), kruh, kružnice, polokružnice

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kruh, rovnostanný trojúhelník, Pythagorova věta

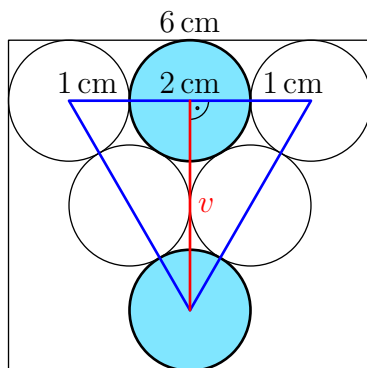
Do obdélníku o délce jedné strany 6 cm jsou vepsány shodné dotýkající se kruhy jako na obrázku 1. Určete nejmenší vzdálenost mezi vyznačenými kruhy.



Obr. 1

Řešení

Spojíme-li středy tří kruhů na obrázku, dostaneme rovnostanný trojúhelník (viz obr. 2). Délka jeho strany je rovna 4, protože poloměr zadaných kruhů je 1. Hledanou vzdálenost vypočítáme pomocí výšky v v tomto rovnostanném trojúhelníku. Výška v má velikost $v = 2\sqrt{3}$. Hledaná vzdálenost je rovna výšce rovnostanného trojúhelníku zmenšená o dva poloměry kruhu, tedy $2\sqrt{3} - 2$ cm.



Obr. 2

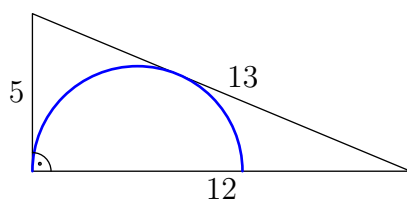
Metodické poznámky

Abychom mohli určit hledanou vzdálenost, je třeba v zadaném obrázku najít rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy zadaných kruhů.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, délka tečny ke kružnici, Pythagorova věta (řešení 1), podobnost trojúhelníků (řešení 2)

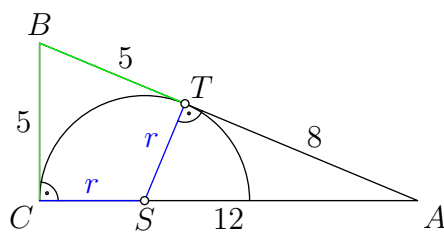
Je dán pravoúhlý trojúhelník s délkami stran 5, 12 a 13. Určete poloměr vepsané půlkružnice.



Obr. 3

Řešení

Označíme vrcholy pravoúhlého trojúhelníku A, B, C , velikost úhlu ACB je 90° , střed vepsané půlkružnice označíme S , bod dotyku půlkružnice s přeponou c označíme T (viz obr. 4). Délka úsečky BT je 5, protože délky tečen vedoucích z bodu ke kružnici jsou stejné ($|BT| = |BC| = 5$). Délka úsečky TA je tedy 8 ($|TA| = |BA| - |BT|$).



Obr. 4

- a) (*1. způsob řešení*) – řešíme užitím Pythagorovy věty. Pro délky odvěsen a přepony v pravoúhlém trojúhelníku AST platí

$$\begin{aligned}|TA|^2 + |TS|^2 &= |AS|^2, \\ 8^2 + r^2 &= (12 - r)^2, \\ 64 + r^2 &= 144 - 24r + r^2, \\ 24r &= 80, \\ r &= \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

- b) (*2. způsob řešení*) — řešíme užitím podobnosti trojúhelníků. Pravoúhlé trojúhelníky ABC a AST jsou podobné (podle věty (uu)), platí tedy

$$\frac{|BC|}{|ST|} = \frac{|AC|}{|AT|},$$

$$\frac{5}{r} = \frac{12}{8} \Rightarrow r = \frac{10}{3}.$$

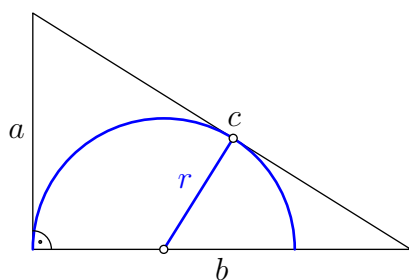
Metodické poznámky

Úlohu lze řešit různými způsoby (užitím Pythagorovy věty nebo užitím podobnosti trojúhelníků), tato řešení můžeme na závěr porovnat.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, délka tečny ke kružnici, Pythagorova věta (řešení 1), podobnost trojúhelníků (řešení 2)

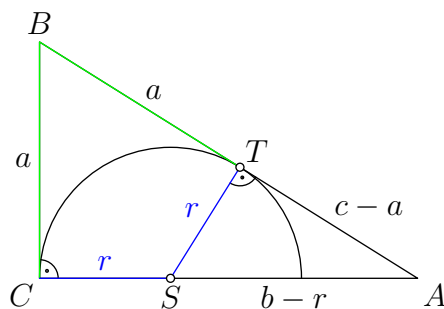
Je dán pravoúhlý trojúhelník se stranami délek a , b a c . Určete poloměr jemu vepsané půlkružnice.



Obr. 5

Řešení

Označíme vrcholy pravoúhlého trojúhelníku A , B , C , velikost úhlu ACB je 90° , střed vepsané půlkružnice označíme S , bod dotyku půlkružnice s přeponou c označíme T (viz obr. 6). Délka úsečky BT je a , protože délky tečen vedoucích z bodu ke kružnici jsou stejné ($|BT| = |BC| = a$). Délka úsečky TA je tedy $c - a$ ($|TA| = |BA| - |BT|$).



Obr. 6

- a) (1. způsob řešení) – řešíme užitím Pythagorovy věty. Pro délky odvěsen a přepony v pravoúhlém trojúhelníku AST platí

$$\begin{aligned}(b-r)^2 &= r^2 + (c-a)^2, \\ b^2 - 2br + r^2 &= r^2 + c^2 - 2ac + a^2, \\ -2br &= c^2 - 2ac + a^2 - b^2.\end{aligned}\tag{1}$$

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $c^2 = a^2 + b^2$, tedy $c^2 - b^2 = a^2$. Po dosazení do rovnice (1) vyjádříme

$$r = \frac{2ac - 2a^2}{b} = \frac{a(c-a)}{b}.$$

Pokud zlomek rozšíříme $c+a$, výraz upravíme na tvar

$$r = \frac{a(c-a)}{b} \cdot \frac{c+a}{c+a} = \frac{a(c^2-a^2)}{b(c+a)} = \frac{ab^2}{b(c+a)} = \frac{ab}{a+c}.$$

- b) (2. způsob řešení) – řešíme užitím podobnosti trojúhelníků. Pravoúhlé trojúhelníky ABC a AST jsou podobné (podle věty (uu)), platí tedy

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{c-a} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a(c-a)}{b}.$$

Pokud zlomek rozšíříme $c+a$, výraz upravíme na tvar

$$r = \frac{ab}{a+c}.$$

Metodické poznámky

Úloha 3 je zobecněním úlohy 2 pro obecné délky stran pravoúhlého trojúhelníku a , b , c .

Zdroj: archiv autora, zadání soutěže Matematický klokan 2012

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Macháčiková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obvod kruhu, vnitřní a vnější úhly v mnohoúhelnících

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obvod kruhu, elementární úpravy výrazů

Zdeňkovo autíčko má kola o průměru 2 cm. Autíčko ujede přímou vzdálenost, která se rovná obvodu kruhu o poloměru 10 m. Kolikrát se otočí každé kolo autíčka?

Řešení

Jestliže se kolo otočí jednou, pak autíčko ujede vzdálenost $x = 2\pi$ cm. Dráha, kterou autíčko urazí má délku $y = 2\pi \cdot 1000$ cm = 2000π cm. Počet otáček $p = \frac{y}{x} = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000$.

Závěr. Kolo se na naší dráze otočí 1000krát. Počet otáček je podíl délky dráhy a obvodu kola.

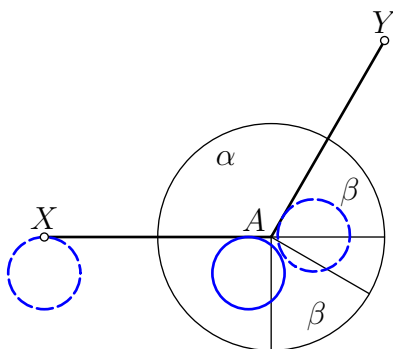
Metodické poznámky

Úloha 1 slouží jako východisko k řešení dalších úloh. S žáky je třeba prodiskutovat, co znamená, že například korunová mince se při nějakém pohybu otočí jednou kolem svého středu. Při počítání otáček budeme sledovat číslici 1 na minci. Po každé, když se tato číslice vrátí do výsledné polohy, otočí se mince právě jednou.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obvod kruhu, vedlejší úhly

Korunová mince se pohybuje po lomené čáře XAY z bodu X do bodu Y (obr. 1). Úseky lomené čáry svírají úhel velikosti $\alpha = 120^\circ$, délka lomené čáry se rovná dvojnásobku obvodu mince a dále $|XA| = |YA|$. Kolikrát se mince otočí?



Obr. 1

Při pohybu z bodu X do bodu A se mince otočí jednou. Pokud má mince v bodě A zaujmout takovou polohu, aby se dotýkala přímky AY , musí se mince otočit kolem bodu A o úhel rovnající se úhlu $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. (Oba úhly β vyznačené na obrázku jsou shodné, protože jejich ramena jsou k sobě kolmá.) To znamená, že v bodě A mince vykoná dodatečnou otáčku, která se rovná jedné šestině úplné otáčky. Po úsečce AY vykoná mince stejně jako na úsečce XA jednu úplnou otáčku.

Závěr. Při pohybu po úsečce XY vykoná mince dvě otáčky, při pohybu po lomené čáře XAY vykoná mince $2 + \frac{\beta}{360}$ otáček (β je velikost úhlu ve stupních), v našem případě $2 + \frac{1}{6}$ otáčky.

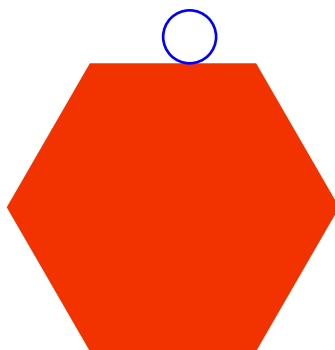
Metodické poznámky

Vhodné je příklad provést prakticky s korunovou mincí.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obvod kruhu, elementární úpravy výrazů

Korunová mince se pohybuje vně po stranách konvexního šestiúhelníku (obr. 2). Součet délek stran šestiúhelníku se rovná šestinásobku obvodu mince. Kolikrát se mince otočí, jestliže jednou obejde šestiúhelník?



Obr. 2

Řešení

Lemma 1. Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku se rovná $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Důkaz. V n -úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ zvolíme libovolný bod M , který leží uvnitř n -úhelníku. Úsečky $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ dělí konvexní n -úhelník na n trojúhelníků. Součet velikostí jejich vnitřních úhlů je $n \cdot 180^\circ$. Tento součet je o 360° (součet velikostí vnitřních úhlů n trojúhelníků u vrcholu M) větší, než je součet vnitřních úhlů n -úhelníku.

Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku je roven

$$n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2)180^\circ.$$

Lemma 2. Součet velikostí všech vnějších úhlů konvexního n -úhelníku, kdy do součtu zahrnujeme právě jeden vnější úhel u každého vrcholu n -úhelníku, je 360° .

Důkaz. U každého vrcholu n -úhelníku je součet velikostí vnitřního a vnějšího úhlu 180° . U n vrcholů je tento součet $n \cdot 180^\circ$. Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku je $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Součet velikostí všech vnějších úhlů konvexního n -úhelníku je $n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

Po přímočaré dráze, jejíž délka se rovná obvodu šestiúhelníku, se mince otočí šestkrát. Při pohybu, při kterém mince obejde šestiúhelník, vykoná $6 + \frac{\gamma}{360}$ otáček. ($\gamma = 360$ je součet vnějších úhlů šestiúhelníku ve stupních, kdy do tohoto součtu zahrnujeme právě jeden vnější úhel u každého vrcholu šestiúhelníku.)

Závěr. Jestliže mince jednou obejde šestiúhelník, vykoná $6 + \frac{360}{360} = 6 + 1 = 7$ otáček.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy 3 žáci navazují na úlohu 2. Při řešení úlohy 3 procvičí věty o součtu velikostí vnitřních a vnějších úhlů v konvexním mnohoúhelníku.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obvod kruhu, věty o součtu velikostí vnitřních a vnějších úhlů v konvexním mnohoúhelníku

Korunová mince se pohybuje vně po jiné nehybné korunové minci. Kolikrát se mince otočí, pokud jednou obejde nehybnou korunovou minci?

Řešení

Z řešení úlohy 3 plyne obecný závěr pro počet otáček korunové mince, která se pohybuje vně po stranách libovolného konvexního mnohoúhelníku a obejde ho právě jednou. Počet otáček je o jednu větší, než počet otáček, které mince vykoná, když se pohybuje po přímočaré dráze, jejíž délka se rovná obvodu konvexního mnohoúhelníku.

Představme si, že počet stran pravidelného konvexního mnohoúhelníku se blíží nekonečnu. Pak tento pravidelný konvexní mnohoúhelník se blíží kružnici. Všechny úvahy, které jsme provedli pro konvexní mnohoúhelník, zůstávají v platnosti i pro kružnici.

Závěr. Počet otáček je o jednu větší, než počet otáček, které mince vykoná, když se pohybuje po přímočaré dráze, jejíž délka se rovná obvodu nehybné mince.

Mince vykoná $1 + 1$ otáčku = 2 otáčky.

Metodické poznámky

Díky tomu, že korunové mince mají zoubkovaný okraj, se tento příklad velmi snadno ukazuje prakticky na dvou korunových mincích.

Zdroj:

Perelman, J. I., Boček, L.: *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: trojúhelník, kružnice trojúhelníku vepsaná a její poloměr, obsah trojúhelníku

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: výpočet obsahu trojúhelníku

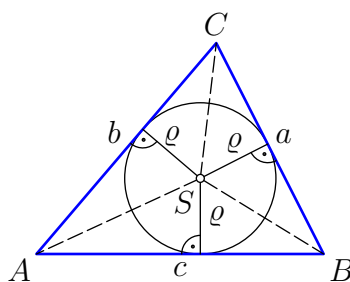
Pro obsah trojúhelníku ABC platí

$$S = \varrho s$$

kde ϱ je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané a s je poloviční obvod trojúhelníku, tj. $2s = a + b + c$. Dokažte.

Řešení

Důkaz vzorce $S = \varrho s$ je poměrně jednoduchý. Z obr. 1 je zřejmé, že platí



Obr. 1

$$S_{ABC} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CAS} = \frac{1}{2}\varrho c + \frac{1}{2}\varrho a + \frac{1}{2}\varrho b = \frac{1}{2}\varrho(a + b + c) = \frac{1}{2}\varrho \cdot 2s = \varrho s,$$

kde S_{ABC} značí obsah trojúhelníku ABC . Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Vzorec $S = \varrho s$ má obecnější platnost. Analogické tvrzení platí pro každý tečnový n -úhelník, tedy také pro každý pravidelný n -úhelník, jak bude dokázáno v úloze 2.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výpočet obsahu trojúhelníku

Má-li pravidelný n -úhelník stranu délky a a velikost poloměru kružnice jemu vepsané je ϱ , pak pro jeho obsah S platí

$$S = \frac{1}{2}na\varrho = \varrho s.$$

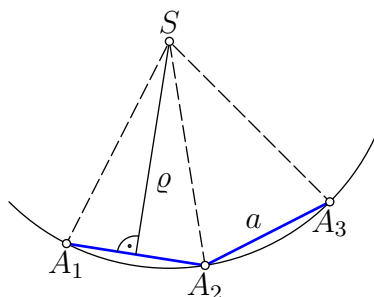
Dokažte.

Řešení

Pravidelný n -úhelník se skládá z n shodných rovnoramenných trojúhelníků (část vidíme na obr. 2). Zřejmě platí $|A_1A_2| = |A_2A_3| = \dots = |A_{n-1}A_n| = a$. Obsah S uvedeného n -úhelníku je roven součtu obsahů těchto n shodných trojúhelníků. Pak platí

$$S = S_{A_1A_2S} + S_{A_2A_3S} + \dots + S_{A_{n-1}A_nS} = \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}a\varrho + \dots + \frac{1}{2}a\varrho = \frac{1}{2}na\varrho = \varrho s,$$

kde $2s = na$ je obvod n -úhelníku.



Obr. 2

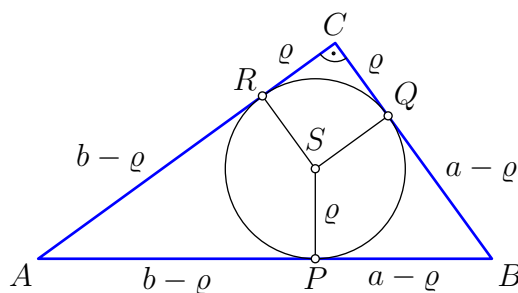
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: ???

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s odvěsnami a , b a přeponou c je vepsána kružnice s poloměrem ϱ , která se dotýká přepony v bodě P . Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = |AP| \cdot |CP|$. Dokažte.

Řešení

Označíme-li body dotyku kružnice trojúhelníku vepsané s odvěsnami BC , AC po řadě Q , R , pak zřejmě platí $|CQ| = |CR| = \varrho$, $|BQ| = a - \varrho$, $|AR| = b - \varrho$. Odtud plyne $|AP| = b - \varrho$, $|BP| = a - \varrho$ (viz obr. 3).



Obr. 3

Zbývá tak dokázat, že

$$S = |AP| \cdot |BP| = (b - \varrho)(a - \varrho) = ab - (a + b)\varrho + \varrho^2.$$

Obsah trojúhelníku ABC však můžeme určit jako součet obsahů čtyřúhelníků $APSR$, $BQSP$, $CRSQ$. Pak platí

$$S_{ABC} = S_{APSR} + S_{BQSP} + S_{CRSQ} = (b - \varrho)\varrho + (a - \varrho)\varrho + \varrho^2 = (a + b)\varrho - \varrho^2.$$

Pro obsah trojúhelníku ABC rovněž platí $S = \frac{1}{2}ab$, resp. $2S = ab$. Pro obsah S trojúhelníku ABC tak platí vztahy

$$2S = ab \quad \text{a} \quad S = (a + b)\varrho - \varrho^2.$$

Odtud již plyne

$$\begin{aligned} 2S - S &= ab - (a + b)\varrho + \varrho^2, \\ S &= ab - (a + b)\varrho + \varrho^2. \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

Metodické poznámky

První a druhá úloha vyjadřují vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníku. Pokud první úlohu žáci dobře zvládnou, mohou druhou úlohu řešit samostatně. K procvičení můžeme zadat žákům vypočítat stejným způsobem obsah pravidelného šestiúhelníku nebo dvanáctiúhelníku. Další vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí jeho obvodu je Heronův vzorec. Třetí úloha je určena pro výborné žáky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Dag Hrubý; hruby@gymjev.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obvody a obsahy rovinných útvarů

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: obsah čtverce a obsah kruhu

Určete délku strany čtverce, který má stejný obsah jako kruh o poloměru 5 cm.

Řešení

Obsah tohoto kruhu spočítáme podle vzorce $S_k = \pi r^2$, tedy obsah kruhu o poloměru 5 cm je 25π cm. Obsah čtverce, délku jehož strany hledáme, je tak $S_c = 25\pi = a^2$, kde a je hledaná délka. Odmocněním dostáváme $a = 5\sqrt{\pi}$ cm.

Závěr. Strana tohoto čtverce má délku $5\sqrt{\pi}$ cm.

Metodické poznámky

Úloha je základní úlohou na využití vzorců pro obsah kruhu a čtverce.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzorce pro obsah a obvod čtverce a kruhu

Porovnejte obvod čtverce a kruhu, které mají stejný obsah.

Řešení

V zadání úlohy je dána rovnost $S_k = \pi r^2 = a^2 = S_c$, kde r je poloměr daného kruhu a a je strana daného čtverce. Tuto rovnici odmocníme a dostáváme $\sqrt{\pi}r = a$. Budeme předpokládat, že obvod tohoto čtverce je větší než obvod kruhu, tedy platí $4a > 2\pi r$. Do nerovnosti dosadíme za a z výše uvedené rovnice a nerovnici budeme dále upravovat.

$$4a > 2\pi r \Leftrightarrow 4\sqrt{\pi}r > 2\pi r \Leftrightarrow 2\sqrt{\pi} > \pi \Leftrightarrow 2 > \sqrt{\pi} \Leftrightarrow 4 > \pi.$$

Poslední nerovnost je pravdivá, proto je pravdivá i původní nerovnost.

Závěr. Má-li daný kruh a daný čtverec stejný obsah, je obvod tohoto čtverce větší než obvod kruhu.

Metodické poznámky

Úloha využívá méně tradičním způsobem všech vzorců pro obvody a obsahy. Slouží mimo jiné k nácviku odhadů v matematice. V řešení je použita myšlenka zvolení jedné nerovnosti za správnou a jejího pozdějšího ověření. Tato úloha je také vhodnou úlohou pro propedeutiku některých úloh variačního počtu. Dá se hezky zobecnit na analogickou úlohu v prostoru.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vzorce pro obvod a obsah čtverce a obdélníku

Dokažte, že ze všech obdélníků stejného obvodu má největší obsah čtverec.

Řešení

Obvod o všech uvažovaných obdélníků je konstantní. Tedy $o = 2(a + b)$, kde a, b jsou strany obdélníku a $a + b = k$, kde k je kladná reálná konstanta. Odtud plyne $a = k - b$. Za a dosadíme do vzorce pro obsah S obdélníku. Platí $S = ab = (k - b)b$. Nyní musíme najít maximum této funkce $S = S(b)$ proměnné b . Je to kvadratická funkce, její maximum je ve vrcholu paraboly $b = \frac{k}{2}$. Obdélník s největším obsahem má tak strany $b = \frac{k}{2}$ a $a = k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$. Jedná se tedy o čtverec, tím je důkaz ukončen.

Metodické poznámky

Úloha kombinuje znalosti vzorců pro obvod a obsah obdélníku a využívá znalosti průběhu kvadratické funkce. To je důvod, proč je zařazena mezi úlohy třetí úrovně. Opět je vhodným navozením obecnějšího tvrzení z variačního počtu a dá se dobře zobecnit do vyšší dimenze.

Zdroj: archiv autora a úloha 3

Acheson D.: *1089 a další parádní čísla*, Dokořán; Praha 2006

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

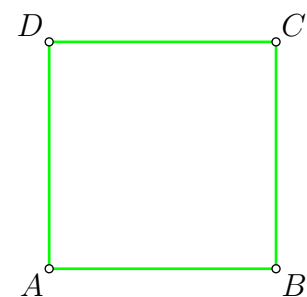
Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: trigonometrie, délky stran pravoúhlého a obecného trojúhelníku, sinová a kosinová věta

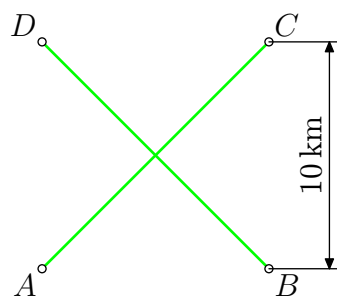
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obvod čtverce a délka úhlopříčky

V oblasti leží čtyři města umístěna do vrcholů čtverce o straně 10 km. Mezi nimi je potřeba vybudovat síť silnic. Jeden architekt navrhuje, aby byly silnice vybudovány po obvodu čtverce a druhý na úhlopříčkách jako na obrázcích 1 a 2. Která síť silnic bude kratší?



Obr. 1 Síť po obvodu



Obr. 2 Síť na úhlopříčkách

Řešení

Obvod čtverce je $o = 4 \cdot 10 = 40$ km. Délku jedné úhlopříčky tohoto čtverce vypočteme pomocí Pythagorovy věty, dostaneme $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ km. Délka obou úhlopříček je tedy celkem $20\sqrt{2}$ km, z čehož plyne, že druhá síť silnic je kratší.

Závěr. Síť silnic vybudovaná na úhlopříčkách je kratší.

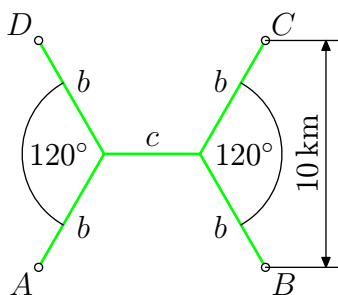
Metodické poznámky

Úloha je základní úlohou na využití vzorce pro obvod čtverce a využití Pythagorovy věty.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: trigonometrie v pravoúhlém trojúhelníku

Dokažte, že síť na úhlopříčkách z úlohy 1 je delší než síť na obrázku 3. Body A, B, C, D opět tvoří vrcholy čtverce se stranou délky 10 km.



Obr. 3 Minimální síť

Řešení

Délka sítě na obrázku se skládá z délek úseček označených na obrázku b , c . K nalezení délek b , c potřebujeme pouze definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku. Vypočítáme délku sítě

$$4b + c = 4 \cdot \frac{5}{\cos 30^\circ} + (10 - 2 \cdot 5 \tan 30^\circ) = 10 + 10\sqrt{3} \text{ km.}$$

Nyní stačí porovnat obě délky. Máme tak dokázat nerovnost

$$10 + 10\sqrt{3} < 20\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 4 < 8 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2.$$

Poslední nerovnost je pravdivá, z čehož vyplývá, že také původní nerovnost je pravdivá.

Závěr. Tvzení v zadání úlohy je pravdivé.

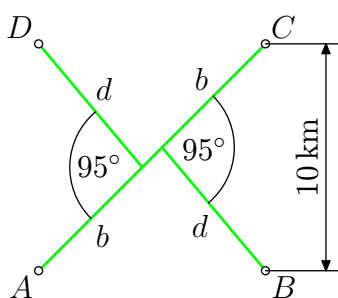
Metodické poznámky

Tato úloha je zařazena mezi středně obtížné, neboť student si zde musí rozmyslet, jak potřebné délky úseček počítat. Tato úloha je také vhodnou úlohou pro propedeutiku některých úloh variačního počtu, zejména úloh o minimální ploše. Kratší síť neexistuje.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta a sinová věta.

Vypočtěte délku silniční sítě, která je znázorněna na obrázku 4. Body A , B , C , D opět tvoří vrcholy čtverce se stranou délky 10 km.



Obr. 4 Delší síť

Řešení

Síť je složena z jedné úhlopříčky čtverce a ze dvou úseček stejné délky označených v obrázku jako d . Neznámou d vypočítáme ze sinové věty

$$\frac{d}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 95^\circ} \Rightarrow d = \sin 45^\circ \cdot \frac{10}{\sin 95^\circ}.$$

Závěr. Délka celé sítě je tak

$$10\sqrt{2} + 2 \sin 45^\circ \cdot \frac{10}{\sin 95^\circ} \doteq 28,34 \text{ km}.$$

Metodické poznámky

Úloha je sice základní úlohou na využití sinové věty, ale pro studenty je toto učivo z trigonometrie trojúhelníku nejobtížnější, proto je zařazena mezi těžší úlohy. Lze na ní také demonstrovat, že tato síť je delší než síť z úlohy 2.

Zdroj:

Acheson D.: *1089 a další parádní čísla*. Dokořán, Praha, 2006.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: sinová věta, kosinová věta, obecný trojúhelník

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obecný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník, sinová věta

Malé kotě vylezlo na strom a tam se zaklínilo ve větvích. Strom roste kolmo k zemi a stojí 10 m od panelového domu. Ze střechy domu je kotě vidět pod hloubkovým úhlem 30° , patu stromu je vidět pod hloubkovým úhlem 50° . Pan Novák z vedlejší ulice má žebřík, který je 6 m vysoký. Bude tento žebřík dost vysoký, aby kotě sundali na zem, nebo budou muset přijet hasiči? Žebřík opřený o strom bude svírat se zemí úhel 75° .

Řešení

Uvažujme situaci dle obr. 1. Ze zadání odvodíme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý, délka strany AB je 10 m. Bod D představuje kotě. Potřebujeme vypočítat velikost AD a porovnat s výškou místa, kde se žebřík bude opírat o strom. V trojúhelníku ACD známe velikost úhlu $|\sphericalangle ACD| = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$. Potřebujeme vypočítat velikost strany AC . V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 50^\circ$, tedy

$$\cos 50^\circ = \frac{10}{|AC|},$$

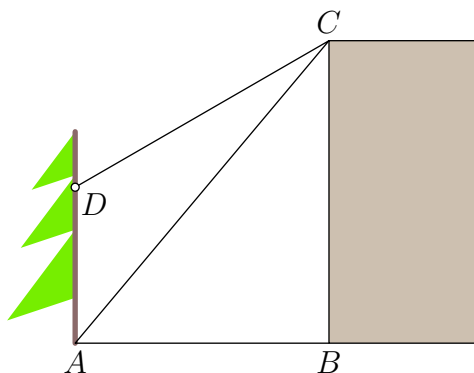
vypočítáme

$$|AC| = \frac{10}{\cos 50^\circ} \doteq 15,56 \text{ m.}$$

Trojúhelník ACD je obecný. Strom roste kolmo k zemi, tak úhly trojúhelníku ACD jsou $|\sphericalangle CAD| = 40^\circ$, $|\sphericalangle ADC| = 120^\circ$. Pro výpočet délky AD použijeme sinovou větu.

$$|AD| = \frac{\sin 20^\circ \cdot 15,56}{\sin 120^\circ} \doteq 6,15 \text{ m.}$$

Kotě je výšce 6,15 m. Ze zadání víme, že žebřík opřený o kmen stromu svírá se zemí úhel 75° . Výška žebříku je 6 m a tvoří přeponu v pravoúhlém trojúhelníku. Vypočítáme, že žebřík se opírá o strom ve výšce asi 5,8 m.



Závěr. Pokud se kotě nevyleká a nevyleze ještě výš, bude možné ho z žebříku pana Nováka chytit a sundat dolů.

Metodické poznámky

Je dobré nechat studenty nejdříve do náčrtu zakreslit hloubkové úhly a vyznačit všechny úhly, u kterých umíme hned určit velikost. Příklad můžeme vypočítat i bez znalosti sinové věty.

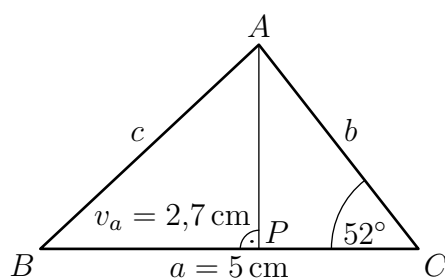
Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: sinová věta, kosinová věta, obecný trojúhelník

V obecném trojúhelníku ABC je dáno $a = 5$ cm, $v_a = 2,7$ cm, $\gamma = 52^\circ$. Určete zbývající prvky trojúhelníku.

Řešení

Vyjádříme délku strany b . Platí $\sin \gamma = \frac{v_a}{b}$, tedy $b = \frac{v_a}{\sin \gamma} = \frac{2,7}{\sin 52^\circ} \doteq 3,426$ cm. Stranu c vypočítáme podle kosinové věty. Platí, že $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, vyjádříme $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$, po dosazení dostaneme $c \doteq 3,955$ cm. Nyní můžeme využít sinovou větu pro výpočet dalšího úhlu, například α , $\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c} \doteq 0,996$, tedy $\alpha \doteq 85^\circ$.



Závěr. Dopočetali jsme strany b , c a úhly α , β . Strana $b \doteq 3,43$ cm, strana $c \doteq 3,95$ cm a úhel $\alpha \doteq 85^\circ$, $\beta \doteq 43^\circ$.

Metodické poznámky

Stranu b lze též vypočítat např. porovnáním z vyjádření obsahu trojúhelníka $\frac{av}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$; v případě, že nechceme pracovat s kosinovou větou, možno též vypočítat stranu c až po velikostech úhlů a použít pouze sinovou větu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice, výpočet obsahu obecného trojúhelníku

Délky dvou stran daného trojúhelníku jsou číselně rovny řešením rovnice

$$(3x + 1)^{\log(3x+1) - 4} = 10^{-3}.$$

Úhel sevřený těmito stranami vyhovuje rovnici $2\sin \gamma = (\cos \gamma - \sin \gamma)(1 + \sqrt{3})$. Určete obsah tohoto trojúhelníku.

Řešení

Vyřešíme první rovnici $(3x + 1)^{\log(3x+1) - 4} = 10^{-3}$, danou rovnici logaritmujeme a upravíme $[\log(3x + 1) - 4] \log(3x + 1) = -3$, je vhodné zavést substituci $y = \log(3x + 1)$, tedy $y^2 - 4y + 3 = 0$, vyřešíme kvadratickou rovnici $y_1 = 3$, $y_2 = 1$. Nyní se vrátíme k substituci a vyřešíme dvě rovnice: pro $\log(3x + 1) = 3$ platí, že $x = 333$ a $\log(3x + 1) = 1$ tedy $x = 3$. Pro délky stran platí $a = 3$, $b = 333$.

Vyřešíme druhou rovnici ze zadání $2\sin \gamma = (\cos \gamma - \sin \gamma)(1 + \sqrt{3})$, roznásobíme pravou stranu a upravíme

$$2\sin \gamma = \cos \gamma + \sqrt{3} \cos \gamma - \sin \gamma - \sqrt{3} \sin \gamma,$$

tedy

$$(3 + \sqrt{3}) \sin \gamma = (1 + \sqrt{3}) \cos \gamma,$$

danou rovnici upravíme na tvar $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$, tj. po úpravě $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$, odkud $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Obsah vypočítáme podle vztahu

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 333 \cdot \frac{1}{2} = \frac{999}{4} = 249,75.$$

Závěr. Obsah zadaného trojúhelníku je 249,75.

Metodické poznámky

Příklad můžeme rozšířit o výpočet všech stran a úhlů tohoto trojúhelníku a aplikovat tak kosinovou větu a sinovou větu.

Zdroj: archiv autora, příklad č. 3 je z písemné maturitní zkoušky pro třídy zaměřené na matematiku, rok 1986

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Heronův vzorec, obsah trojúhelníku, výška lichoběžníku

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kosinová věta, obsah trojúhelníku, goniometrické vzorce

Pomocí kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ a známého vzorce pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ odvoďte Heronův vzorec.

Řešení

Z první rovnice vyjádříme $\cos \gamma$, z druhé rovnice $\sin \gamma$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$
$$\sin \gamma = \frac{2S}{ab}.$$

Obě rovnice umocníme, sečteme a dostaneme

$$1 = \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} + \frac{4S^2}{a^2b^2}.$$

Postupnými úpravami vyjádříme S

$$16S^2 = (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Položíme $2s = a + b + c$, potom $c - a + b = 2s - a$ atd. Dostaneme tak po úpravách

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Závěr. Vzorec $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku a $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, se nazývá Heronův vzorec (podle Herona z Alexandrie – 1. století našeho letopočtu).

Metodické poznámky

V dostupných středoškolských učebnicích matematiky není odvozen Heronův vzorec.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, úpravy algebraických výrazů

Pomocí Heronova vzorce odvoďte vzorec pro obsah rovnoběžníku se stranami délky $2a, a$, které svírají úhel velikosti 60° .

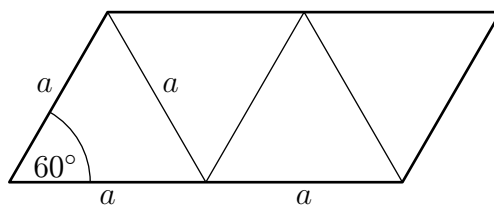
Řešení

Rovnoběžník rozdělíme na čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky (obr. 1), potom

$$S = 4\sqrt{s(s-a)(s-a)(s-a)},$$

přítom $s = \frac{3}{2}a$, odtud

$$S = 4\sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = a^2\sqrt{3}.$$



Obr. 1

Závěr. Obsah rovnoběžníku je $S = \sqrt{3}a^2$.

Metodické poznámky

Obsah rovnostranného trojúhelníku se stranou a můžeme také vypočítat jako $\frac{av}{2}$, kde $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ je výška rovnostranného trojúhelníku.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, úpravy algebraických výrazů

Rovnoběžník má strany délek a , b a jedna z úhlopříček má délku b . Pomocí Heronova vzorce odvoďte vzorec pro jeho obsah.

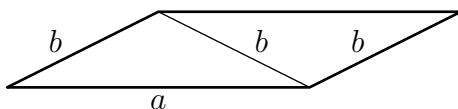
Řešení

Rovnoběžník rozdělíme na dva shodné rovnoramenné trojúhelníky (obr. 2). Pro jeho obsah S tak platí

$$S = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)},$$

kde $s = \frac{a+2b}{2}$. Odtud

$$S = 2\sqrt{\frac{2b+a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$



Obr. 2

Závěr. Obsah rovnoběžníku je $S = \frac{a}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

Metodické poznámky

Obsah rovnoramenného trojúhelníku se základnou a , ramenem b můžeme také vypočítat jako $\frac{av}{2}$, kde $v = \sqrt{4b^2 - a^2}$ je výška rovnoramenného trojúhelníku.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, úpravy algebraických výrazů

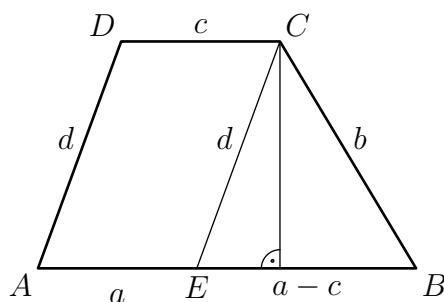
Pomocí Heronova vzorce odvoďte vzorec pro výpočet výšky v lichoběžníku $ABCD$ se základnami a , c , rameny b , d .

Řešení

Obsah trojúhelníku EBC (obr.3) je

$$S = \frac{(a-c)v}{2} \quad \text{a také} \quad S = \sqrt{s(s-a+c)(s-b)(s-d)},$$

kde $s = \frac{a-c+b+d}{2}$.



Obr. 3

Ze vztahu

$$\frac{(a-c)v}{2} = \sqrt{s(s-a+c)(s-b)(s-d)}$$

vyjádříme v

$$v = \frac{1}{2(a-c)} \sqrt{(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a+d-b-c)(a+b-c-d)}.$$

Závěr. Výška v lichoběžníku $ABCD$ má velikost

$$v = \frac{1}{2(a-c)} \sqrt{(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a+d-b-c)(a+b-c-d)}.$$

Zdroj:

Boček, L.: *Základy planimetrie*, SPN, 1985.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vektor, velikost vektoru, skalární součin, úhel sevřený vektory

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: pojem vektoru, souřadnice vektoru

Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1; 2)$ a $\mathbf{b} = (3; 1)$. Určete:

- a) skalární součin vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$,
- b) skalární součin vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, velikost vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$
- c) skalární součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a úhel, který svírají vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Řešení

a) Skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ je definován vztahem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

V našem případě platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

b) Velikost vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ je definována vztahem

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

V našem případě tedy platí

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$$

c) Pro úhel φ , který svírají vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, platí

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

tedy v našem případě je

$$\cos \varphi = \frac{3 + 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odtud $\varphi = 45^\circ$.

Závěr. Skalární součinem vektorů $\mathbf{a} = (1; 2)$ a $\mathbf{b} = (3; 1)$ je 5. Velikost vektoru $\mathbf{a} = (1; 2)$ je $\sqrt{5}$, velikost vektoru $\mathbf{b} = (3; 1)$ je $\sqrt{10}$. Úhel, který oba vektory svírají, je 45° .

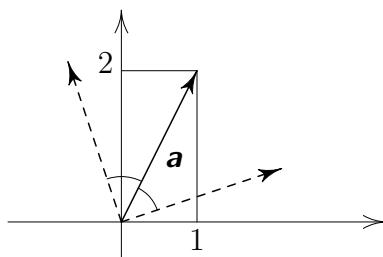
Metodické poznámky

Je vhodné ukázat, že vektor kolmý k vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ lze získat záměnou pořadí souřadnic a nahrazení jedné souřadnice číslem opačným, tj. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ když např. $\mathbf{b} = (a_2, -a_1)$ nebo $(-a_2, a_1)$. Dále je vhodné připomenout, že $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, právě když $\mathbf{a} = k \cdot \mathbf{b}$, kde k je reálné číslo, a že $k \cdot \mathbf{a}$ má velikost $|k| \cdot |\mathbf{a}|$. Je vhodné upozornit žáky i na to, že pokud $k < 0$, má vektor $\mathbf{a}$ opačnou orientaci než $k \cdot \mathbf{a}$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vektor, goniometrické funkce, součtové vzorce

Najděte vektor, který svírá s vektorem $\mathbf{a} = (1; 2)$ úhel 45° a má stejnou velikost jako $\mathbf{a}$.



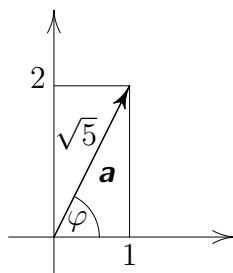
Řešení

Zjistíme odchylku daného vektoru od kladného směru osy x a určíme vektory s odchylkou o daný úhel menší a větší (existují tedy dva takové vektory).

Zřejmě

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

viz obrázek



Hledané vektory jsou:

$$\mathbf{x}_1 = \sqrt{5} \cdot (\cos(\varphi + 45^\circ), \sin(\varphi + 45^\circ))$$

$$\mathbf{x}_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos(\varphi - 45^\circ), \sin(\varphi - 45^\circ))$$

Užitím součtových vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \sqrt{5} \cdot (\cos(\varphi + 45^\circ), \sin(\varphi + 45^\circ)) = \\ &= \sqrt{5} \cdot (\cos \varphi \cos 45^\circ - \sin \varphi \sin 45^\circ, \sin \varphi \cos 45^\circ + \cos \varphi \sin 45^\circ). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

je

$$\mathbf{x}_1 = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1; 3).$$

Analogicky vypočteme

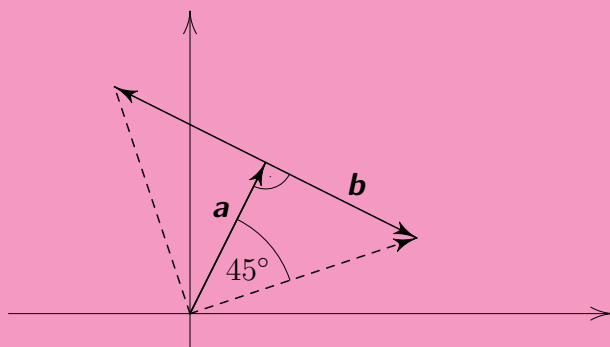
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \sqrt{5} \cdot (\cos(\varphi - 45^\circ), \sin(\varphi - 45^\circ)) = \\ &= \sqrt{5} \cdot (\cos \varphi \cos 45^\circ + \sin \varphi \sin 45^\circ, \sin \varphi \cos 45^\circ - \cos \varphi \sin 45^\circ) = \\ &= \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3; 1). \end{aligned}$$

Závěr. Hledané vektory lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1; 3), \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (3; 1).$$

Metodické poznámky

Tuto úlohu lze řešit více způsoby. Je možné využít vzorce použitého v úloze 1c. Lze také k danému vektoru $\mathbf{a}$ přičíst vektor $\mathbf{b}$ na něj kolmý, který odpovídá rozdílu mezi vhodným vektorem hledaného směru a daným vektorem, viz obrázek,



a následně upravit velikost hledaného vektoru. Pokud by byli žáci seznámeni s komplexními čísly (nejsou v RVP), šlo by úlohu řešit převedením úlohy o vektorech na úlohu o komplexních číslech. Otočit číslo $1 + 2i$ (kolem počátku) o 45° vlevo, resp. vpravo, znamená vynásobit ho komplexní jednotkou příslušného argumentu, tj. $\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$, resp. $\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: počítání s vektory, výpočet obsahu trojúhelníku, řešení kvadratické a bikvadratické rovnice, vztah mezi $\sin x$ a $\cos x$

Jsou dány vektory $\overrightarrow{AB} = (t, 1)$ a $\overrightarrow{AC} = (2, t)$, kde t je reálný parametr. Určete parametr t tak, aby trojúhelník ABC měl obsah $S = 2$.

Řešení

Vektory $\overrightarrow{AB} = (t, 1)$ a $\overrightarrow{AC} = (2, t)$ svírají úhel

$$\cos \alpha = \frac{3t}{\sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{t^2 + 4}}.$$

Obsah trojúhelníku ABC vypočteme podle vzorce

$$S = \frac{1}{2} b c \sin \alpha,$$

tj.

$$S = \frac{\sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{t^2 + 4} \cdot \sin \alpha}{2} = 2.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{t^2 + 1} \cdot \sqrt{t^2 + 4}}.$$

Vypočtené hodnoty $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ dosadíme do vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostaneme

$$\frac{9t^2 + 16}{(t^2 + 1) \cdot (t^2 + 4)} = 1.$$

Po jednoduché úpravě pak obdržíme bikvadratickou rovnici

$$t^4 - 4t^2 - 12 = 0.$$

Zavedením substituce $y = t^2$ přejde bikvadratická rovnice na kvadratickou rovnici

$$y^2 - 4y - 12 = 0,$$

jejímiž kořeny jsou $y_1 = 6$ a $y_2 = -2$.

Vrátíme se k původní neznámé t . Protože $y = t^2$, y musí být nezáporné. Je tedy $t^2 = 6$, odkud $|t| = \sqrt{6}$. Proto

$$t_1 = \sqrt{6}, \quad t_2 = -\sqrt{6}.$$

Závěr. Hledaný parametr t nabývá hodnoty $\sqrt{6}$ a $-\sqrt{6}$.

Metodické poznámky

Elegantněji lze úlohu řešit pomocí vlastnosti vektorového součinu. Přestože není v RVP explicitně zmíněn, nadaní žáci by s ním mohli být seznámeni. Víme, že velikost vektorového součinu vektorů udává obsah rovnoběžníku, jehož strany jsou těmito vektory určeny. Za tímto účelem vezmeme do úvahy vektory trojrozměrného vektorového prostoru $(2, t, 0)$ a $(t, 1, 0)$, ležící v rovině $z = 0$. Vypočteme

$$(2, t, 0) \times (t, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{j}_x & \mathbf{j}_y & \mathbf{j}_z \\ 2 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{j}_z \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = (2 - t^2) \mathbf{j}_z,$$

kde $\mathbf{j}_z$ je jednotkový vektor ve směru osy z . Tedy

$$2S = 4 = |2 - t^2|.$$

Tento vztah je splněn pro $|t| = \sqrt{6}$.

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka přímek, osová souměrnost, vektory

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: osová souměrnost, obecná rovnice přímky, odchylka přímek

Přímka p je dána rovnicí $3x + y + 5 = 0$, přímka p' je obrazem přímky p v osově souměrnosti s osou o , která je dána rovnicí $x + 2y - 10 = 0$. Vypočítejte (v obloukové míře) velikost úhlu, který svírají přímky p a p' .

Řešení

Osa o pólí úhel, který svírají přímky p a p' . Hledaná odchylka φ je tedy dvojnásobkem odchylky přímek p , o . Přímka p má normálový vektor $(3; 1)$, normálový vektor osy o je $(1; 2)$. Pro odchylku φ platí

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{|(3; 1) \cdot (1; 2)|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Závěr. Přímky p a p' jsou navzájem kolmé, svírají tedy úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Metodické poznámky

Úlohu je možno doplnit grafickým řešením (není nutné), či rozšířit o požadavek nalezení průsečíku přímek p a p' či rovnice přímky p' .

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: osová souměrnost, obecná rovnice přímky, odchylka přímek, osa úsečky, vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vypočítejte (ve stupních) odchylku přímek p a p' , které jsou osově souměrné podle přímky o . Přímka p je dána rovnicí $3x + y + 5 = 0$ a osa o je zároveň osou úsečky AB , kde $A = [1; 4]$, $B = [2; 5]$.

Řešení

Osa úsečky AB je kolmá k vektoru $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$, ten je tedy jejím normálovým vektorem. Pro odchylku φ přímky p od osy o platí

$$\cos \varphi = \frac{|(3; 1) \cdot (1; 1)|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

pak odchylka přímk p a p' je 2φ , kde

$$\cos 2\varphi = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2 = 2 \cdot (\cos \varphi)^2 - 1 = \frac{3}{5} \Rightarrow \varphi \doteq 53^\circ 7'.$$

Závěr. Přímk p a p' svírají úhel asi $\varphi \doteq 53^\circ 7'$.

Metodické poznámky

Z vypočítané hodnoty $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lze vyjádřit $\frac{\varphi}{2}$ a poté φ , objevuje se zde však riziko větších nepřesností při zaokrouhlování. Využitím vzorce pro kosinus dvojnásobného úhlu se otevírá možnost k zopakování goniometrických funkcí a ukázka využití vztahů mezi goniometrickými funkcemi.

Úlohu je možno rozšířit o požadavek vyjádření rovnic přímk o a p' .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: osová souměrnost, obecná rovnice přímk, odchylka přímk, střed úsečky

Vypočítejte odchylku přímk p , p' (ve stupních), které jsou osově souměrné podle přímk $o: x + 2y - 10 = 0$. Přímk p obsahuje bod A , přímk p' bod B , kde $A = [0; 0]$, $B [4; 5]$.

Řešení

V osové souměrnosti se bod $A = [0; 0]$ zobrazí na bod $A' = [a_1; a_2]$, který leží na přímk p' . Vektor $\overrightarrow{AA'} = A' - A = (a_1 - 0; a_2 - 0)$ je kolmý k ose o . Je tedy rovnoběžný s jejím normálovým vektorem $(1; 2)$, proto platí

$$a_1 = k, \quad a_2 = 2k. \quad (1)$$

Střed $S = [m; n]$ úsečky AA' leží na ose o , proto pro jeho souřadnice platí $m + 2n - 10 = 0$, tedy $m = 10 - 2n$. Zároveň

$$S = \left[\frac{0 + a_1}{2}; \frac{0 + a_2}{2} \right],$$

odkud užitím vztahů (1) a řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 10 - 2n &= \frac{a_1}{2}, \\ n &= \frac{a_2}{2}, \end{aligned}$$

získáme $a_1 = n = k = 4$, $a_2 = 8$.

Odchylka δ přímk p od osy o je stejná jako odchylka přímk p' od osy o . Úhel, který svírají přímk p , p' je dvojnásobkem odchylky δ přímk p' (se směrovým vektorem

$\overrightarrow{A'B}$) a osy o (se směrovým vektorem $(2; -1)$). Vektor $\overrightarrow{A'B} = B - A'$ má souřadnice $(4 - a_1; 5 - a_2) = (0; -3)$. Pro odchylku δ platí

$$\cos \delta = \frac{|(0; -3) \cdot (2; -1)|}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos 2\delta = (\cos \delta)^2 - (\sin \delta)^2 = 2 \cdot (\cos \delta)^2 - 1 = -\frac{3}{5},$$

odkud

$$\varphi \doteq 126^\circ 53'.$$

Vzhledem k tomu, že pro odchylku přímek platí $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, je hledaná odchylka

$$\varphi \doteq 180^\circ - 126^\circ 53' = 53^\circ 7'.$$

Závěr. Odchylka přímek p, p' je $\varphi \doteq 53^\circ 7'$.

Metodické poznámky

Úloha opět propojuje znalosti z planimetrie (osová souměrnost) s analytickou geometrií (lze též řešit graficky) a trigonometrie. Možno též nejprve určit φ a dopočítat $180^\circ - 2\varphi$ nebo s vědomím toho, že $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ počítat rovnou

$$\cos \varphi = \left| (\cos \delta)^2 - (\sin \delta)^2 \right| = \left| 2 \cdot (\cos \delta)^2 - 1 \right| = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi \doteq 53^\circ 7'.$$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka dvou přímek, rovnoběžnost, směrový a normálový vektor

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: incidence bodu na přímce, rovnoběžnost přímek, směrnice přímky, směrový úhel

Je dána přímka $p: 3x + by - 1 = 0$. Určete b tak, aby platilo:

- a) $B[2; 2] \in p$,
- b) $p \parallel y$,
- c) Směrový úhel přímky p je $\frac{\pi}{6}$.

Řešení

- a) Aby bod B ležel na přímce p , musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici přímky p , musí proto platit $6 + 2b - 1 = 0$, odtud $b = 2,5$.
- b) Přímka rovnoběžná s osou y má rovnici $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, proto je koeficient $b = 0$.
- c) Směrnice tvar rovnice přímky p je $y = -\frac{3}{b}x + \frac{1}{b}$, kde $-\frac{3}{b}$ je její směrnici $k_p = \operatorname{tg} \varphi$, v našem případě je $\varphi = \frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{3}{b}, \quad \text{tedy} \quad b = -3\sqrt{3}.$$

Metodické poznámky

Pokud načrtne obrázek, zjistíme, že normálový vektor přímky p v úloze c) svírá s osou x úhel $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ a odtud plyne výsledek okamžitě.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzdálenost bodu od přímky

Jsou dány body $M[-2; 3]$, $A[5; -1]$, $B[3; 7]$. Najděte všechny přímky, které procházejí bodem M a od bodů A , B mají stejnou vzdálenost.

Řešení

Nechť má hledaná přímka p rovnici $p: ax + by + c = 0$. Leží-li bod M na přímce p , jeho souřadnice vyhovují výše uvedené rovnici. Po dosazení souřadnic bodu M dostaneme $c = 2a - 3b$. Po dosazení do vztahu pro vzdálenost bodu A , resp. B od přímky p a po úpravě vyjde

$$|5a - b + 2a - 3b| = |3a + 7b + 2a - 3b|.$$

Řešením této rovnice je $a = 4b$ nebo $a = 0$.

Po vyjádření c pomocí b a po dosazení do rovnice $ax + by + c = 0$ vycházejí dvě přímky

$$4x + y + 5 = 0 \quad \text{a} \quad y - 3 = 0.$$

Metodické poznámky

Je vhodné úlohu řešit i planimetricky a diskutovat, jak souvisí poloha bodu M s počtem řešení.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: úhel vektorů, odchylka přímek

Napište rovnici přímky p , která prochází daným bodem $A[1; 3]$ a s přímkou $q: 4y - 7 = 0$ svírá úhel $\psi = \frac{\pi}{4}$.

Řešení

Vzhledem k tomu, že bod $A \notin q$ (ověřte!), budou takové přímky dvě. Obecná rovnice přímky, tedy i hledané p , má tvar $ax + by + c = 0$. Bod A na ni leží, proto jeho souřadnice rovnici vyhovují a platí $a + 3b + c = 0$. Velikost normálového vektoru $\mathbf{u}$ hledané přímky můžeme zvolit libovolně, pro jednoduchost ji zvolme

$$|\mathbf{u}| = |(a; b)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

Normálový vektor $\mathbf{v}$ přímky q má souřadnice $\mathbf{v} = (0; 4)$. Odchylka přímek p, q je shodná s odchylkou jejich normálových vektorů

$$\cos \psi = \frac{|0a + 4b|}{1,4} \quad \Rightarrow \quad |b| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Po dosazení do rovnice $a^2 + b^2 = 1$ dostaneme $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pokud mají a, b stejná znaménka, pak $|c| = 2\sqrt{2}$, pokud mají opačná znaménka je $|c| = \sqrt{2}$. Získáme tak dvě dvojice ekvivalentních rovnic. Hledané rovnice mají po úpravě tvar $x + y - 4 = 0$ a $x - y + 2 = 0$.

Metodické poznámky

Všimněte si, že normálové vektory výše uvedených přímek jsou kolmé, proto i přímky jsou kolmé. Je proto možné druhou přímku najít jako kolmici k první, vedenou bodem A .

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, E., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vektor, souřadnice vektoru, sčítání bodu a vektoru, kolmé vektory, parametrická rovnice přímky, rovnice osy úhlu

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: souřadnice vektoru, navzájem kolmé vektory

Jsou dány body $A = [0; 2]$ a $B = [6; 5]$. Určete

- a) střed S úsečky AB ,
- b) body C a D tak, aby $ABCD$ byl čtverec.

Řešení

a) Víme, že souřadnice vektoru $\overrightarrow{XY}$ získáme odečtením souřadnic počátečního bodu vektoru od jeho bodu koncového, tj. $\overrightarrow{XY} = Y - X$. Odtud $Y = X + \overrightarrow{XY}$. Protože $|AS| = |SB|$, je

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot (B - A) = \frac{1}{2} \cdot (6; 3) = (3; 1,5),$$

a tedy

$$S = A + \overrightarrow{AS} = [0; 2] + (3; 1,5) = [3; 3,5].$$

b) Body C a D vypočteme tak, že k bodům B a A přičteme vektor $\mathbf{u}$, který je kolmý na vektor $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$ a má velikost $|AB|$. Takovým vektorem je vektor $\mathbf{u} = (-3; 6)$, neboť $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{u} = 0$, tj. $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{u}$, a velikost vektorů je v obou případech $\sqrt{45}$. Jednou z možností je tedy

$$C = B + \mathbf{u} = [6; 5] + (-3; 6) = [3; 11],$$

$$D = A + \mathbf{u} = [0; 2] + (-3; 6) = [-3; 8].$$

Druhou možností, s body C , D ležícími v opačné polorovině určené přímkou AB , je

$$C = B - \mathbf{u} = [6; 5] - (-3; 6) = [9; -1],$$

$$D = A - \mathbf{u} = [0; 2] - (-3; 6) = [3; -4].$$

Závěr.

- a) Střed S úsečky AB , kde $A = [0; 2]$ a $B = [6; 5]$, má souřadnice $S = [3; 3,5]$.
- b) Body C , D doplňující body A , B na čtverec mají souřadnice buď $C = [3; 11]$ a $D = [-3; 8]$, anebo $C = [9; -1]$ a $D = [3; -4]$.

Metodické poznámky

Je velmi dobré ukázat, že pro střed S úsečky AB platí

$$S = \frac{A+B}{2},$$

neboť $A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B)$.

Analogické úlohy:

1. Vypočtete body, které rozdělují úsečku AB na 3, 4 atd. stejné díly.
2. Vypočtete průsečík úhlopříček daného čtverce nebo rovnoběžníku.

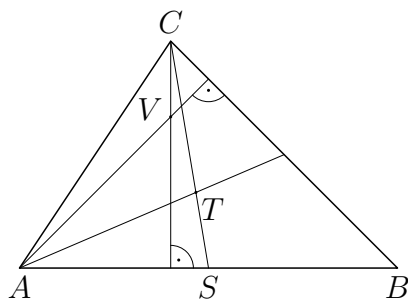
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sčítání vektorů, součet bodu a vektoru, parametrická rovnice přímky

Je dán trojúhelník ABC , kde $A = [0; 0]$, $B = [5; 0]$, $C = [2; 3]$. Určete

- a) těžiště T trojúhelníku ABC ,
- b) ortocentrum V trojúhelníku ABC .

Řešení



- a) Těžiště T leží v jedné třetině těžnice SC , Bod S je střed strany AB . Tedy

$$S = \frac{A+B}{2} = \frac{[0; 0] + [5; 0]}{2} = \left[\frac{5}{2}; 0 \right],$$
$$T = S + \frac{1}{3} \overrightarrow{SC} = \left[\frac{5}{2}; 0 \right] + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}; 3 \right) = \left[\frac{7}{3}; 1 \right].$$

b) Ortocentrum V najdeme jako průsečík přímek na nichž leží výšky v_a a v_c . Přímky popíšeme jejich parametrickými rovnicemi.

Směrový vektor v_a je vektor kolmý na přímku BC . Vektor $\overrightarrow{BC}$ má souřadnice $(-3; 3)$, vektor kolmý na přímku BC má souřadnice $(3; 3)$. V parametrické rovnici přímky v_c můžeme použít vektor s ním rovnoběžný, např. vektor $(1; 1)$. Platí:

$$X = [0; 0] + k \cdot (1; 1) = [k, k], \quad k \in \mathbb{R}$$

Směrový vektor v_b je vektor kolmý na přímkou AB . Vektor $\overrightarrow{AB}$ má souřadnice $(5, 0)$, vektor kolmý na přímkou AB má souřadnice $(0; 5)$. V rovnici přímky v_c můžeme použít vektor s ním rovnoběžný, např. vektor $(0; 1)$. Platí:

$$X = [2; 3] + l \cdot (0; 1) = [2, 3 + l], \quad l \in \mathbb{R}$$

Pro průsečík obou přímek platí $[k, k] = [2, 3 + l]$, $k, l \in \mathbb{R}$. Zřejmě $k = 2$. Orto-centrum V má souřadnice $V = [2; 2]$.

Závěr. Těžiště T trojúhelníku ABC , kde $A = [0; 0]$, $B = [5; 0]$, $C = [2; 3]$, má souřadnice $T = [\frac{7}{3}; 1]$. Ortocentrum V trojúhelníku ABC má souřadnice $V = [2; 2]$.

Metodické poznámky

Při hledání ortocentra bychom nemuseli mluvit o rovnicích přímek. Hledat bod V lze tak, že $V = A + \overrightarrow{AV}$, kde $\overrightarrow{AV}$ je vhodný násobek vektoru $\mathbf{u}$ kolmého na stranu BC , tedy $V = A + k\mathbf{u}$, kde k je reálné číslo. Stejně tak $V = B + \overrightarrow{BV}$, kde $\overrightarrow{BV}$ je vhodný násobek vektoru $\mathbf{v}$ kolmého stranu AC , tj. $V = B + l\mathbf{v}$, kde l je reálné číslo. Ze vztahu $A + k\mathbf{u} = B + l\mathbf{v}$ vypočteme příslušnou hodnotu parametru k nebo l .

Analogická úloha:

Vypočtete střed kružnice opsané danému trojúhelníku ABC .

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: sčítání bodu a vektoru, kolmé vektory, řešení kvadratické rovnice

Jsou dány body $A = [-1; \sqrt{5}]$ a $B = [\sqrt{5}; -1]$. Najděte souřadnice bodů C a D obdélníku $ABCD$, jehož kratší strana BC je ke straně AB ve zlatém poměru (poměru zlatého řezu).

Řešení

Body C a D vypočteme tak, k bodům B a A přičteme vektor $\overrightarrow{BC}$, který je kolmý na vektor $\overrightarrow{AB}$ a má požadovanou délku.

Úsečka je rozdělena na dvě části ve zlatém poměru, jestliže poměr celé úsečky k větší části je stejný jako poměr větší části k menší. Označme délku dané úsečky a a x nechť je délka její větší části. Vypočteme délku x hledaného vektoru. Zlatý poměr můžeme vyjádřit rovnicí

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}.$$

Odtud po snadné úpravě dostaneme kvadratickou rovnici s parametrem a

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Jelikož hledáme délku úsečky, zajímá nás pouze kladný kořen této rovnice, který je tvaru

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a.$$

Velikost vektoru $\overrightarrow{BC}$ je tedy $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ násobek velikosti vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Platí $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{5} + 1; -1 - \sqrt{5})$ a vektor na něj kolmý má např. souřadnice $(1 + \sqrt{5}, \sqrt{5} + 1)$. Protože velikost takto určeného kolmého vektoru je stejná jako velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$, je

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}, \sqrt{5} + 1) = \frac{(\sqrt{5}-1)(1 + \sqrt{5})}{2} \cdot (1; 1) = (2; 2).$$

Je tedy

$$C = B + \overrightarrow{BC} = [\sqrt{5}; -1] + (2; 2) = [2 + \sqrt{5}, 1],$$

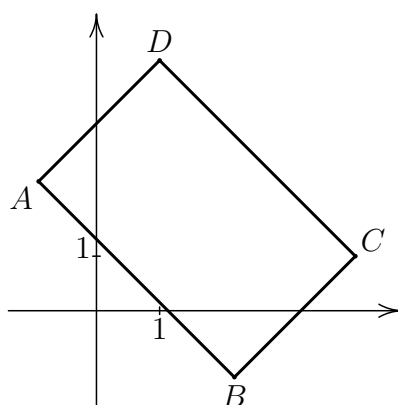
$$D = A + \overrightarrow{BC} = [-1; \sqrt{5}] + (2; 2) = [1, 2 + \sqrt{5}].$$

Pokud nás zajímá i obdélník v opačné polorovině určené přímkou AB , pak

$$C = B - \overrightarrow{BC} = [\sqrt{5}; -1] - (2; 2) = [-2 + \sqrt{5}, -3],$$

$$D = A - \overrightarrow{BC} = [-1; \sqrt{5}] - (2; 2) = [-3, -2 + \sqrt{5}].$$

Závěr. Hledaný obdélník má vrcholy o souřadnicích $A = [-1; \sqrt{5}]$, $B = [\sqrt{5}; -1]$, $C = [2 + \sqrt{5}, 1]$, $D = [1, 2 + \sqrt{5}]$ (viz obrázek), resp. $A = [-1; \sqrt{5}]$, $B = [\sqrt{5}; -1]$, $C = [-2 + \sqrt{5}, -3]$, $D = [-3, -2 + \sqrt{5}]$.



Metodické poznámky

Nejdříve je žákům nutno vysvětlit pojem „zlatý řez“. Úlohu lze zjednodušit zadáním konkrétního poměru stran obdélníka.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: počítání s vektory, parametrická rovnice přímky, počítání s odmocninami

Je dán trojúhelník ABC , kde $A = [0; 0]$, $B = [5; 0]$, $C = [2; 3]$. Určete

- rovnici osy úhlu BAC ,
- střed M kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

Řešení

a) Můžeme postupovat takto: Najdeme body $U \in AB$, $V \in AC$ tak, aby $|AU| = |AV|$, tj. trojúhelník UAV byl rovnoramenný. Potom přímka procházející bodem A a středem úsečky UV je hledaná osa úhlu BAC .

Body U , V lze nalézt tak, že k bodu $A = [0; 0]$ připočteme jednotkové vektory ve směru AB a ve směru AC . Jednotkový vektor ve směru AB získáme tak, že vektor $\overrightarrow{AB} = (5, 0)$ vydělíme jeho velikostí 5, dostaneme $(1; 0)$. Analogicky, jednotkový vektor ve směru AC je $\frac{1}{\sqrt{13}}(2; 3)$. Takže

$$U = [1; 0], \quad V = \frac{1}{\sqrt{13}}[2; 3] = \frac{\sqrt{13}}{13}[2; 3].$$

Střed W úsečky UV je (viz úlohu 1)

$$W = \frac{U + V}{2} = \left[\frac{13 + 2\sqrt{13}}{26}; \frac{3\sqrt{13}}{26} \right],$$

vektor

$$\overrightarrow{AW} = \left(\frac{13 + 2\sqrt{13}}{26}; \frac{3\sqrt{13}}{26} \right).$$

Pro snadnější vyjádření rovnice přímky AW vezmeme místo vektoru $\overrightarrow{AW}$ s ním rovnoběžný vektor $\mathbf{s} = (2 + \sqrt{13}, 3)$. (Je totiž $\frac{\sqrt{13}}{26}\mathbf{s} = \overrightarrow{AW}$.)

Parametrická rovnice osy úhlu BAC je tedy:

$$X = A + k \cdot \mathbf{s} = [0; 0] + k \cdot (2 + \sqrt{13}; 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

b) K určení středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC pomocí průsečíku os úhlů potřebujeme ještě jednu osu některého ze zbývajících úhlů. Analogicky jako v případě a) najdeme rovnici osy úhlu ABC . Body $U' \in BA$ a $V' \in BC$ pro něž platí $|BU'| = |BV'|$ jsou např.

$$U' = [5; 0] + \frac{1}{5} \cdot (-5; 0) = [4; 0],$$

$$V' = [5; 0] + \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (-3; 3) = \left[\frac{10 - \sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

Střed W' úsečky $U'V'$ je

$$W' = \frac{U' + V'}{2} = \left[\frac{18 - \sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right],$$

vektor

$$\overrightarrow{BW'} = W' - B = \left(\frac{-2 - \sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Pro snadnější vyjádření rovnice přímky BW' vezmeme místo vektoru $\overrightarrow{BW'}$ s ním rovnoběžný vektor $\mathbf{r} = (-\sqrt{2} - 1; 1)$. (Je totiž $\frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{r} = \overrightarrow{BW'}$.)

Parametrická rovnice osy úhlu ABC je tedy:

$$X = B + l \cdot \mathbf{r} = [5; 0] + l \cdot (-\sqrt{2} - 1; 1), \quad l \in \mathbb{R}$$

Nyní již můžeme vypočítat průsečík obou přímek. Pro střed vepsané kružnice musí platit

$$[0; 0] + k \cdot (2 + \sqrt{13}; 3) = [5; 0] + l \cdot (-\sqrt{2} - 1; 1),$$

což rozepsáno po složkách dává soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{13})k &= 5 + (-\sqrt{2} - 1)l, \\ 3k &= l, \end{aligned}$$

z níž vypočteme

$$k = \frac{5}{5 + 3\sqrt{2} + \sqrt{13}}.$$

Je tedy

$$M = \frac{5}{5 + 3\sqrt{2} + \sqrt{13}} \cdot [2 + \sqrt{13}; 3].$$

Výrazy s odmocninami můžeme pomocí kalkulačky (např. softwarové na PC) vyčíslit. Dostaneme $M \doteq [2,1815; 1,1675]$.

Závěr. Parametrická rovnice osy úhlu BAC je $X = [0; 0] + k \cdot (2 + \sqrt{13}; 3)$, kde k je reálný parametr, střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC má s přesností na setiny souřadnice $[2,18; 1,17]$.

Metodické poznámky

Správnost výsledku lze ověřit výpočtem vzdálenosti bodu M od stran trojúhelníku ABC daných rovnicemi $AB: y = 0$, $BC: x + y - 5 = 0$ a $AC: 3x - 2y = 0$. Dostaneme vždy $r = 1,1675$, jak bylo očekáváno vzhledem k tomu, že AB leží na ose x a y_M je tudíž poloměrem vepsané kružnice.

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vektor, souřadnice vektoru, součet a součin vektorů

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: velikost vektoru, lineární závislost vektorů

Dokažte, že střední příčka trojúhelníku (úsečka spojující středy dvou sousedních stran) je rovnoběžná se stranou, kterou neprochází a má velikost poloviny této strany.

Řešení

V trojúhelníku ABC označme středy stran AC a BC po řadě $X[x_1, x_2]$, $Y[y_1, y_2]$. Zřejmě platí

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + c_1), \quad x_2 = \frac{1}{2}(a_2 + c_2), \quad y_1 = \frac{1}{2}(b_1 + c_1), \quad y_2 = \frac{1}{2}(b_2 + c_2).$$

Souřadnice vektoru $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ lze psát ve tvaru

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{2}(b_1 + c_1 - a_1 - c_1) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1), \quad y_2 - x_2 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2),$$

to znamená, že $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{XY}$ je tedy skalárním násobkem vektoru $\overrightarrow{AB}$, z čehož plyne, že jsou úsečky rovnoběžné.

Metodické poznámky

Je vhodné upozornit žáky na souvislost s již dříve probranou stejnolehlostí trojúhelníků.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: těžiště útvaru, součin čísla a vektoru, součet vektorů

Souřadnice těžiště trojúhelníka a čtyřstěnu jsou aritmetickým průměrem souřadnic jeho vrcholů. Dokažte.

Řešení

- Těžiště T_1 úsečky AB je zároveň jejím středem a platí

$$\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AT_1}.$$

Pro těžiště T_2 trojúhelníku ABC platí

$$\overrightarrow{T_1C} = 3 \overrightarrow{T_1T_2} \Leftrightarrow C - T_1 = 3(T_2 - T_1) \Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{3}(C + 2T_1) \Leftrightarrow T_2 = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

- Těžiště T_3 čtyřstěnu leží na úsečce T_2D tak, že

$$\overrightarrow{T_2D} = 4\overrightarrow{T_2T_3} \Leftrightarrow D - T_2 = 4(T_3 - T_2).$$

Po dosazení za $T_2 = \frac{1}{3}(A + B + C)$ dostaneme $T_3 = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$.

Metodické poznámky

Těžiště je frekventovaný fyzikální pojem, popis pohybu těles se vztahuje na jeho těžiště. Žáci mají experimentálně ověřené určení těžiště jako průsečíků těžnic. U trojúhelníka je možné tento experiment ověřit matematicky.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: jehlan a jeho vlastnosti, smíšený součin vektorů, odchylka vektorů

Je dán pravidelný trojboký jehlan $ABCV$, jehož výška má stejnou velikost jako hrana podstavy. Určete odchylku boční stěny od roviny podstavy a objem jehlanu víte-li, že velikost výšky je a .

Řešení

Zvolme souřadný systém tak, aby jeho počátek splýval s těžištěm podstavy, na ose x ležela střední příčka podstavy, rovnoběžná s hranou AB , osa y procházela středem S hrany AB a bodem C , osa z pak bude procházet vrcholem V . Platí

$$S[0; 0; 0], \quad V[0; 0; a], \quad A\left[-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right], \quad B\left[\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right], \quad C\left[0; -\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0\right].$$

Vektory

$$\overrightarrow{ST} = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right) \quad \text{a} \quad \overrightarrow{SV} = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{6}; a\right).$$

Odchylka stěny a podstavy jehlanu je rovna velikosti úhlu $\alpha = \sphericalangle TSV$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SV}}{|\overrightarrow{ST}| \cdot |\overrightarrow{SV}|} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \alpha \doteq 73^\circ 54',$$

kde $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SV}$ je skalární součin vektorů $\overrightarrow{ST}$ a $\overrightarrow{SV}$.

Pro objem jehlanu platí vztah $W = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AV}|$, kde $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ značí vektorový součin vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Po dosazení dostaneme

$$W = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit pomocí znalostí stereometrie, kde pojmy objem tělesa a odchylka rovin jsou žákům známy. Řešení pomocí vektorů je elegantnější a kratší.

Úlohy k procvičení.

- Jsou dány body $A[6; 4]$, $B[4; 0]$, $C[6; -1]$. Zjistěte, zda je trojúhelník ABC pravoúhlý. [ano, $\beta = 90^\circ$]
- Jsou dány body $M[3; 7]$, $N[-4; 1]$, $O[0; 9]$. Určete bod $X[x, y]$, který je doplňuje na rovnoběžník. Kolik takových bodů X existuje?
- Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jeho podstava má hranu $a = 6$ cm, výšku $v = 3\sqrt{2}$ cm. Určete odchylku mimoběžek AV a BC . [60°]
- Dokažte, že pro skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2.$$

Na základě tohoto pak dokažte větu: *Má-li rovnoběžník všechny čtyři strany shodné, jsou jeho úhlopříčky na sebe kolmé.*

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kuželosečky – elipsa, hyperbola

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie kvadratických útvarů (elipsa, hyperbola)

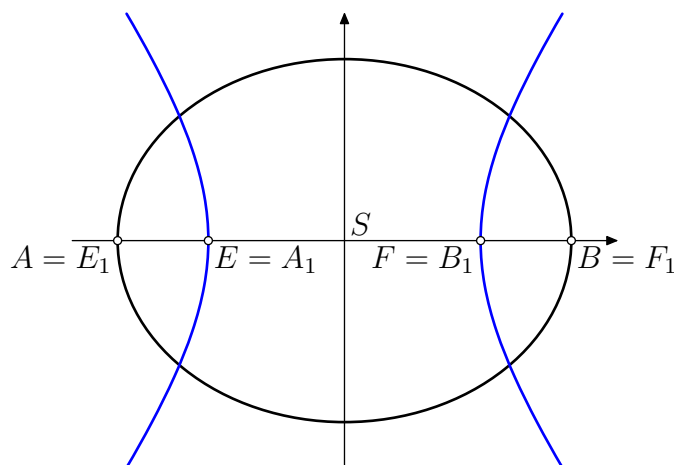
Elipsa je dána rovnicí $16x^2 + 25y^2 = 400$. Napište rovnici hyperboly, jejíž vrcholy jsou současně ohnisky dané elipsy a ohniska jsou vrcholy dané elipsy.

Řešení

Středová rovnice dané elipsy je

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Střed elipsy tak má souřadnice $S [0; 0]$, hlavní poloosa je $a = 5$, vedlejší poloosa je $b = 4$. Pro výstřednost elipsy dostaneme $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Hlavní vrcholy elipsy tak jsou body $A [-5; 0]$, $B [5; 0]$, ohnisky elipsy jsou body $E [-3; 0]$, $F [3; 0]$ (viz obr. 1).



Obr. 1

Pro hledanou hyperbolu platí, že její střed má souřadnice $S [0; 0]$, vrcholy mají souřadnice $A_1 [-3; 0]$, $B_1 [3; 0]$, tedy hlavní poloosa je $a = 3$. Ohniska hyperboly mají souřadnice $E_1 [-5; 0]$, $F_1 [5; 0]$, výstřednost je $e = 5$. Pro vedlejší poloosu tedy platí $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Závěr. Hledaná hyperbola má středovou rovnici $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, tedy

$$16x^2 - 9y^2 = 144.$$

Metodické poznámky

V úloze využíváme vlastností elipsy a hyperboly.

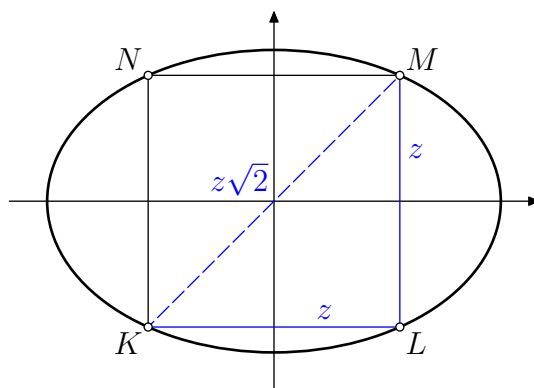
Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie kvadratických útvarů (elipsa, hyperbola), přímka, soustava rovnic (s parametrem)

Elipse s poloosami délek $a > 0$ a $b > 0$ je vepsán čtverec. Určete délku jeho strany.

Řešení

Zvolíme elipsu se středem v bodě $S[0; 0]$, její středová rovnice je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Elipse je vepsán čtverec $KLMN$, délku jeho strany z určíme např. z pravoúhlého trojúhelníku KLM . Vypočítáme vzdálenost bodů K , M , tedy délku přepony v pravoúhlém trojúhelníku KLM , $|KM| = z\sqrt{2}$, odtud určíme z .



Obr. 2

Úhlopříčky čtverce svírají se stranou čtverce úhel 45° , proto budou vrcholy K a M ležet na přímce s rovnicí $y = x$ (viz obr. 2). Souřadnice bodů K a M určíme jako společné body elipsy a přímky $p: y = x$, řešíme tedy soustavu rovnic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a $y = x$. Postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} &= 1, \\ x^2 b^2 + x^2 a^2 &= a^2 b^2, \\ x^2 (b^2 + a^2) &= a^2 b^2, \\ x^2 &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Odmocněním dostaneme dvě řešení

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad x_2 = \frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Body K a M tedy mají souřadnice

$$K \left[\frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right], \quad M \left[\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right].$$

Určíme vzdálenost bodů K a M .

$$|KM| = \sqrt{(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2}.$$

Dosazením souřadnic bodů K , M a úpravami postupně dostaneme

$$|KM| = \sqrt{\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{8a^2b^2}{a^2 + b^2}}.$$

Protože $|KM| = z\sqrt{2}$, můžeme vypočítat z .

$$z = \frac{|KM|}{\sqrt{2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Metodické poznámky

V úloze využíváme znalostí z analytické geometrie kvadratických a lineárních útvarů (elipsa, přímka), řešení rovnic s parametrem.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie kvadratických útvarů (elipsa, hyperbola), přímka, soustava rovnic (s parametrem), kvadratické rovnice s parametrem

Elipse s poloosami délek $a > 0$ a $b > 0$ je opsán čtverec. Určete

- délku jeho strany,
- souřadnice bodů dotyku čtverce a elipsy (pro elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic).

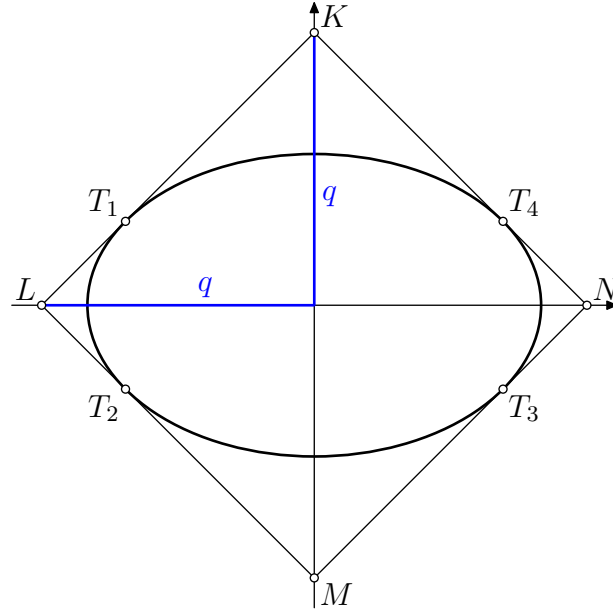
Řešení

- a) Zvolíme elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, její středová rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vrcholy čtverce opsaného elipse označíme K , L , M , N . Vzhledem k tomu, že úhlopříčky čtverce jsou k sobě kolmé, navzájem se půlí a mají stejnou délku, pokud označíme q vzdálenost bodu K od počátku soustavy souřadnic, pak budou souřadnice vrcholů K $[0; q]$ a L $[-q; 0]$ (viz obr. 3). Délku strany z čtverce $KLMN$ určíme jako vzdálenost bodů K a L , tedy $z = |KL|$. Strana KL čtverce opsaného elipse leží na přímce p , která má rovnici $y = x + q$. Vzdálenost q určíme pomocí bodu dotyku elipsy a čtverce. Jeden z bodů dotyku je společný bod elipsy a přímky p , musí splňovat rovnici elipsy i přímky. Řešíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ y &= x + q.\end{aligned}$$



Obr. 3

Dosazením a úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned}
 b^2 x^2 + a^2 (x + q)^2 &= a^2 b^2, \\
 b^2 x^2 + a^2 x^2 + 2xqa^2 + a^2 q^2 &= a^2 b^2, \\
 x^2 (a^2 + b^2) + 2xqa^2 + a^2 (q^2 - b^2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Bod dotyku je jediný společný bod elipsy a přímky, kvadratická rovnice má právě jedno řešení, pokud její diskriminant je roven 0. Řešíme tedy rovnici, kdy diskriminant D rovnice (1) je roven 0

$$\begin{aligned}
 D &= 4a^4 q^2 - 4(a^2 + b^2)a^2(q^2 - b^2) = 0, \\
 4a^4 q^2 - 4a^4 q^2 + 4a^4 b^2 - 4a^2 b^2 q^2 + 4a^2 b^4 &= 0, \\
 a^4 b^2 - a^2 b^2 q^2 + a^2 b^4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnici (2) vydělíme součinem $a^2 b^2$ a dostáváme

$$a^2 - q^2 + b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = a^2 + b^2.$$

Odtud máme dvě řešení

$$q_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad q_2 = -\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bod K má tedy souřadnice $K [0; \sqrt{a^2 + b^2}]$, bod $L [-\sqrt{a^2 + b^2}; 0]$. Určíme vzdálenost bodů K, L

$$\begin{aligned}
 |KL| &= \sqrt{\left(-\sqrt{a^2 + b^2} - 0\right)^2 + \left(0 - \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2} = \\
 &= \sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} = z
 \end{aligned}$$

Délka strany čtverce opsaného elipse je

$$z = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Poznámka. Přímka KL má absolutní člen roven q_1 , a tedy rovnici $y = x + \sqrt{a^2 + b^2}$. Absolutní člen q_1 má také přímka KN , její rovnice je $y = -x + \sqrt{a^2 + b^2}$. Absolutní člen q_2 mají přímky LM a MN , rovnice přímky LM je $y = -x - \sqrt{a^2 + b^2}$, rovnice přímky MN je $y = x - \sqrt{a^2 + b^2}$.

- b) Určíme souřadnice bodu dotyku elipsy s přímkou KL . Po dosazení $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ do rovnice (1) dostáváme kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} x^2(a^2 + b^2) + 2xa^2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2(a^2 + b^2 - b^2) &= 0, \\ x^2(a^2 + b^2) + 2xa^2\sqrt{a^2 + b^2} + a^4 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Protože bod dotyku je jediný společný bod elipsy a přímky KL , diskriminant kvadratické rovnice (3) je roven 0 a řešení této rovnice (první souřadnice bodu dotyku) je

$$x = \frac{-2a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2(a^2 + b^2)} = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Druhá souřadnice bodu dotyku je

$$y = x + q = x + \sqrt{a^2 + b^2},$$

po dosazení $x = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ dostaneme

$$y = \frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{-a^2 + a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bod dotyku T_1 má souřadnice $T_1 \left[\frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$.

Vzhledem k symetrii elipsy podle hlavní a vedlejší osy budou další body dotyku mít souřadnice

$$T_2 \left[\frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right], \quad T_3 \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right], \quad T_4 \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right].$$

Metodické poznámky

V úloze využíváme znalostí z analytické geometrie kvadratických a lineárních útvarů (elipsa, přímka), řešení kvadratické rovnice s parametrem.

Zdroj:

Archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Machačíková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obecná a parametrická rovnice roviny v prostoru, normálový vektor, skalární součin, vzdálenost rovnoběžek, odchylka přímek, osa mimoběžek

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obecná a parametrická rovnice roviny v prostoru

Jsou dány body $A[0; 0; 0]$, $B[1; 0; 3]$ a $C[2; -1; -2]$. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici roviny ABC .

Řešení

Určíme vektorový součin $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3; -4; -1)$, což je normálový vektor roviny ABC . Po vynásobení -1 , můžeme napsat obecnou rovnici roviny ABC ve tvaru $3x + 4y + z = d$. Body A , B , C v rovině leží, proto jejich souřadnice rovnici vyhovují – po dosazení je $d = 0$. Čímž jsme získali obecný tvar rovnice roviny ABC . Parametrické vyjádření získáme tak, že dvě proměnné si zvolíme sami, např. $x = t$, $y = s$ a po dosazení do obecného tvaru vyjde $z = -3t - 4s$. Parametrické vyjádření roviny ABC je

$$\begin{aligned} ABC: x &= t, \\ y &= s, \\ z &= -3t - 4s, \quad \text{kde } t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Protože všechny normálové vektory dané roviny jsou navzájem rovnoběžné, všechny tvary obecné rovnice roviny jsou navzájem ekvivalentní rovnice – každá z nich je nenulovým násobkem rovnice stejné roviny. Naopak hledáme-li parametrické vyjádření roviny, můžeme si vybrat libovolnou trojici nekolineárních bodů roviny. Proto různých parametrických vyjádření téže roviny je tolik, kolik existuje různých trojic bodů, a to je nekonečně mnoho.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice roviny, rovnoběžnost, normálový vektor roviny

Je dána přímka

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + t, \\ y &= 2 + at, \\ z &= 4, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro žádné reálné a nebude přímka p rovnoběžná s rovinou

$$\rho: x + ay + 5z - 1 = 0.$$

Řešení

Aby byla přímka rovnoběžná s rovinou, musela by mít soustava rovnic přímky a roviny nekonečně mnoho řešení (přímka leží v rovině) nebo žádné řešení.

Dosadíme-li z parametrických rovnic přímky do obecné rovnice roviny, dostaneme rovnici s neznámou t , která by nesměla mít právě jedno řešení. To by nastalo, právě když je koeficient u parametru t roven nule. Tento koeficient má ale hodnotu $(1 + a^2)$ a tento výraz je pro každé $a \in \mathbb{R}$ kladný. Tím je důkaz proveden.

Metodické poznámky

Ke stejnému výsledku se dostaneme též pomocí skalárního součinu normálního vektoru roviny a směrového vektoru přímky. Protože jde o kolmé vektory, je jejich skalární součin roven nule.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: poloha přímek v prostoru, vzdálenost přímek, osa mimoběžek, odchylka přímek, skalární součin vektorů

Určete vzájemnou polohu přímek, jejich odchylku a popř. vzdálenost, je-li:

$$\begin{aligned} p: x &= 7 + t, & q: x &= 3 - 7s, \\ y &= 3 + 2t, & y &= 1 + 2s, \\ z &= 9 - t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. & z &= 1 + 3s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešení

Směrové vektory přímek p , q mají po řadě souřadnice $\mathbf{u} = (1; 2; -1)$ a $\mathbf{v} = (-7; 2; 3)$. Je zřejmé, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nejsou svými násobky, z čehož plyne, že přímky nejsou rovnoběžné. Můžeme se tedy pokusit najít jejich průsečík. Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 7 + t &= 3 - 7s, \\ 3 + 2t &= 1 + 2s, \\ 9 - t &= 1 + 3s, \end{aligned}$$

kteřá nemá řešení, proto jsou přímky mimoběžné.

Vzdálenost mimoběžek je velikost jejich osy, t. j. úsečky AB , kde $A \in p$, $B \in q$ a úsečka AB je kolmá na obě přímky. Proto je vektor $\overrightarrow{AB}$ rovnoběžný s vektorovým součinem $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (směrových vektorů přímek p , q). Vzhledem k tomu, že $A \in p$, $B \in q$ platí

$$\begin{aligned} A[7 + t; 3 + 2t; 9 - t], \quad B[3 - 7s; 1 + 2s; 1 + 3s], \\ \overrightarrow{AB} = (-4 - 7s - t; -2 + 2s - 2t; -8 + 3s + t). \end{aligned}$$

Vektorový součin směrových vektorů

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1; 2; -1) \times (-7; 2; 3) = 4 \cdot (2; 1; 4),$$

tzn., že $\overrightarrow{AB} = k \cdot (2; 1; 4)$. Po dosazení a rozepsání do souřadnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}-4 - 7s - t &= 2k, \\ -2 + 2s - 2t &= k, \\ -8 + 3s + t &= 4k,\end{aligned}$$

jejímž řešením je trojice $s = 0$, $t = 0$, $k = -2$. Dosazení těchto hodnot do souřadnic bodů A , B dostaneme $A[7; 3; 9]$, $B[3; 1; 1]$. Jejich vzdálenost $|B - A| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ je zároveň vzdáleností mimoběžek. Zbývá určit odchylku mimoběžek. Ta je rovna úhlu jejich směrových vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Využijeme-li skalární součin směrových vektorů přímk p , q , dostaneme $\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{6 \cdot 62}}$. Odchylka tak přibližně činí $71^\circ 52' 31''$.

Metodické poznámky

Před řešení této úlohy je vhodné zopakovat učivo příslušné partie stereometrie, která je často probírána ve volitelném předmětu Seminář z matematiky.

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M.: *Prehľad matematiky*, Bratislava, SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kulová plocha, rovnice kulové plochy

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: rovnice plochy kulové, stanovení středu a poloměru, rovnice kružnice

Je dána plocha kulová

$$x^2 + y^2 + z^2 - 28x + 10y - 26z + 221 = 0.$$

Stanovte její střed a poloměr a také střed a poloměr jejích průniků se souřadnicovými rovinami.

Řešení

Do rovnice doplníme členy tak, abychom dostali úplné čtverce:

$$\begin{aligned}x^2 - 28x + 196 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 26z + 169 &= -221 + 196 + 25 + 169, \\(x - 14)^2 + (y + 5)^2 + (z - 13)^2 &= 169.\end{aligned}$$

Plocha kulová má střed $S[14; -5; 13]$ a poloměr $r = 13$. Průnik s rovinou $z = 0$ má rovnici

$$\begin{aligned}x^2 - 28x + y^2 + 10y + 221 &= 0, \\x^2 - 28x + 196 + y^2 + 10y + 25 &= -221 + 196 + 25, \\(x - 14)^2 + (y + 5)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Průnikem je jediný bod $[14; -5; 0]$ (plocha kulová se roviny $z = 0$ dotýká). Průnik s rovinou $y = 0$ má rovnici

$$\begin{aligned}x^2 - 28x + z^2 - 26z + 221 &= 0, \\x^2 - 28x + 196 + z^2 - 26z + 169 &= -221 + 196 + 169, \\(x - 14)^2 + (z - 13)^2 &= 144.\end{aligned}$$

Průnikem je kružnice se středem $[14; 0; 13]$ a o poloměru 12. Průnik s rovinou $x = 0$

$$\begin{aligned}y^2 + 10y + z^2 - 26z + 221 &= 0, \\y^2 + 10y + 25 + z^2 - 26z + 169 &= -221 + 25 + 169, \\(y + 5)^2 + (z - 13)^2 &= -27.\end{aligned}$$

Kružnice nemá s rovinou $x = 0$ žádný společný bod.

Metodické poznámky

Žáci by měli vysvětlit, proč souřadnice středu průniku resp. bodu dotyku odpovídají souřadnicím středu plochy kulové.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnice plochy kulové, stanovení středu a poloměru, vzájemná poloha bodu a plochy kulové, vzdálenost dvou bodů

Jsou dány 4 body: $A[9; -6; 3]$, $B[-5; 4; -1]$, $C[-4; 10; 4]$, $D[8; -1; 1]$. Plocha kulová se středem na ose x prochází body A , B . Rozhodněte o vzájemné poloze plochy kulové a zbývajících dvou bodů a určete, který z těchto bodů je blíže k ploše kulové.

Řešení

Rovnice plochy kulové, jejíž střed leží na ose x je

$$(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Dosadíme souřadnice bodů A , B

$$\begin{aligned}(9 - x_0)^2 + 36 + 9 &= r^2, \\ (-5 - x_0)^2 + 16 + 1 &= r^2.\end{aligned}$$

a řešíme soustavu rovnic o dvou neznámých x_0 a r . Protože obě rovnice mají shodné pravé strany, rovnají se i strany levé:

$$\begin{aligned}(9 - x_0)^2 + 36 + 9 &= (-5 - x_0)^2 + 16 + 1, \\ 81 - 18x_0 + x_0^2 + 45 &= 25 + 10x_0 + x_0^2 + 17;\end{aligned}$$

členy x_0^2 se ruší a zůstane

$$28x_0 = 84 \Rightarrow x_0 = 3.$$

Střed S plochy kulové je $S[3; 0; 0]$. Odsud

$$r^2 = (9 - 3)^2 + 36 + 9 = 81,$$

takže $r = 9$. Anulovaná rovnice plochy kulové je

$$(x - 3)^2 + y^2 + z^2 - 81 = 0.$$

Levá strana rovnice

$$L(C) = (-4 - 3)^2 + 10^2 + 4^2 - 81 > 0;$$

bod C leží vně plochy kulové a jeho vzdálenost od středu S plochy kulové je

$$|OC| = \sqrt{7^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{165} \doteq 12,85.$$

Vzdálenost bodu C od plochy kulové je $\sqrt{165} - 9 \doteq 3,85$. Levá strana rovnice

$$L(D) = (8 - 3)^2 + 1 + 1 - 81 < 0;$$

bod D leží uvnitř plochy kulové a jeho vzdálenost od středu S plochy kulové je

$$|OD| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \doteq 5,20.$$

Vzdálenost bodu D od plochy kulové je $9 - 3\sqrt{3} \doteq 3,80$.

Bod D je k ploše kulové blíže než bod C .

Metodické poznámky

Porovnat hodnoty výrazů $\sqrt{165} - 9$ a $9 - 3\sqrt{3}$ lze rovněž postupnou úpravou vztahu $\sqrt{165} - 9 \varrho 9 - 3\sqrt{3}$, kde ϱ je neznámé znaménko nerovnosti.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rovnice plochy kulové, střed a poloměr, přímka daná dvěma body, vzájemná poloha přímky a plochy kulové, vzdálenost dvou bodů

Vypočtete vzdálenost průsečíků P , Q přímky $p = AB$ s plochou kulovou, která má střed $S[3; -2; 4]$ a prochází bodem M ; $A[5; -2; -12]$, $B[-11; 10; -14]$, $M[4; 16; 10]$.

Řešení

Nejprve vypočteme poloměr

$$r = |SM| = \sqrt{(4-3)^2 + (16+2)^2 + (10-4)^2} = 19.$$

Rovnice plochy kulové je tedy

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 361.$$

Směrový vektor přímky AB je $\mathbf{u} = B - A = (-16; 12; -2)$; pro parametrické vyjádření přímky p vezmeme směrový vektor $(8; -6; 1)$:

$$\begin{aligned}x &= 5 + 8t, \\y &= -2 - 6t, \\z &= -12 + t.\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice plochy kulové

$$\begin{aligned}(5 + 8t - 3)^2 + (-2 - 6t + 2)^2 + (-12 + t - 4)^2 &= 361, \\(2 + 8t)^2 + (-6t)^2 + (-16 + t)^2 &= 361.\end{aligned}$$

Umocníme a členy uspořádáme

$$\begin{aligned}4 + 32t + 64t^2 + 36t^2 + 256 - 32t + t^2 &= 361, \\101t^2 &= 101, \text{ odkud } t_{1,2} = \pm 1.\end{aligned}$$

Tyto hodnoty dosadíme do parametrického vyjádření přímky a dostáváme: Pro $t = 1$ je $x = 13$, $y = -8$, $z = -11$, $P[13; -8; -11]$; pro $t = -1$ je $x = -3$, $y = 4$, $z = -13$, $Q[-3; 4; -13]$.

$$|PQ| = \sqrt{(-3-13)^2 + (4+8)^2 + (-13+11)^2} = \sqrt{404} = 2\sqrt{101}.$$

Metodické poznámky

Při výpočtu průsečíků dostáváme pro parametr t kvadratickou rovnici, která se zde redukovala na rovnici $t^2 = 1$.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice plochy kulové, střed a poloměr, řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých, rovnice roviny

Najděte střed, poloměr a rovnici plochy kulové, která prochází body

$$A[3; 5; -3], \quad B[-5; 1; 5], \quad C[1; 5; 5]$$

a jejíž střed S leží v rovině $\varrho: x - 2y - 3z = 5$.

Řešení

Z podmínky úlohy plyne, že platí

$$|SA| = |SB| = |SC| \quad \text{a} \quad S \in \varrho.$$

Označíme-li souřadnice $S[x; y; z]$, můžeme porovnávat přímo druhé mocniny.

$$\begin{aligned} |SA|^2 &= |SB|^2, \\ (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 &= (x+5)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2. \end{aligned}$$

Umocníme a upravíme

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 6z + 9 &= x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 10z + 25; \\ \text{všechny druhé mocniny se ruší, takže máme } -16x - 8y + 16z &= 8, \text{ tedy} \end{aligned}$$

$$2x + y - 2z = -1.$$

Z podmínky $|SB|^2 = |SC|^2$ plyne

$$\begin{aligned} (x+5)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 &= (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2, \\ x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 10z + 25 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 10z + 25; \end{aligned}$$

všechny druhé mocniny se opět ruší, takže máme $12x + 8y = 0$, tedy

$$3x + 2y = 0.$$

Třetí podmínkou pro souřadnice středu S je $S \in \varrho$:

$$x - 2y - 3z = 5.$$

Dostali jsme tak soustavu tří rovnic o neznámých x, y, z .

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= -1, \\ 3x + 2y &= 0, \\ x - 2y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

Po sečtení druhé a třetí rovnice máme

$$4x - 3z = 5,$$

po odečtení druhé rovnice od dvojnásobku první dostáváme

$$x = 4z - 2,$$

což dosadíme do předchozí rovnice a dostáváme

$$4(4z - 2) - 3z = 5,$$

$$16z - 8 - 3z = 5,$$

$$13z = 13, \quad \text{takže} \quad z = 1.$$

Pak $x = 2$ a $y = -2x + 2z - 1 = -3$. Střed S plochy kulové má souřadnice $S[2; -3; 1]$.

Ještě vypočteme poloměr plochy kulové, je to $r = |SA|$.

$$|SA|^2 = (2 - 3)^2 + (-3 - 5)^2 + (1 + 3)^2 = 81 \Rightarrow r = 9.$$

Rovnice hledané plochy kulové je

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 81.$$

Metodické poznámky

Úloha je řešitelná více způsoby, je možno doporučit, aby ji studenti vyřešili i jinak. Např. lze postupovat takto: Najdeme středy S_1 a S_2 úseček AB a BC a vektory $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = C - B$. Pomocí těchto vektorů odvodíme rovnici roviny σ , $\sigma \perp AB$, $S_1 \in \sigma$ a roviny τ , $\tau \perp BC$, $S_2 \in \tau$. Střed plochy kulové je společným bodem všech tří rovin ϱ , σ , τ .

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

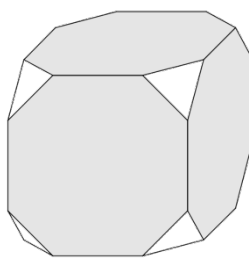
Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: mnohostěny, platónská tělesa, rovina souměrnosti

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: tělesa (krychle), počet hran tělesa

Krychli byly odříznuty vrcholy, jak ukazuje obrázek 1. Kolik hran má výsledné těleso?



Obr. 1

Řešení

Krychle má 12 hran, tyto hrany zůstávají i po odříznutí jejích vrcholů. Odříznutím vrcholu dostaneme novou stěnu, která má tvar trojúhelníku, místo každého vrcholu máme tedy navíc 3 hrany. Krychle má 8 vrcholů, celkem dostaneme navíc 24 hrany, tedy celkový počet hran je $12 + 24 = 36$.

Metodické poznámky

Úloha na prostorovou představivost. Zdroj Matematický klokan 2008, kategorie Junior

Úloha 2 (úroveň 2–3)

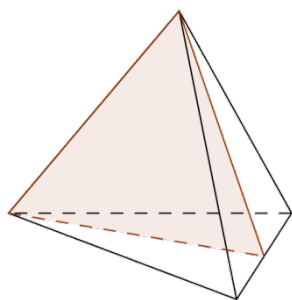
Předpokládané znalosti: platónská tělesa, rovina souměrnosti

Určete, kolik rovin souměrnosti má:

- a) pravidelný čtyřstěn,
- b) krychle a pravidelný osmistěn,
- c) pravidelný dvanáctistěn a dvacetistěn.

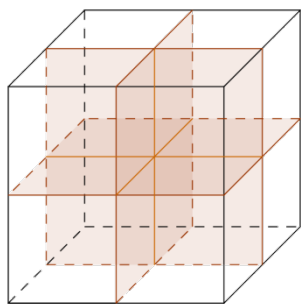
Řešení

- a) Každá rovina souměrnosti pravidelného čtyřstěnu prochází jednou jeho hranou a středem protější hrany (viz obr. 2). Protože čtyřstěn má šest hran, má také šest rovin souměrnosti.

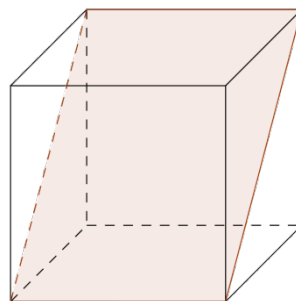


Obr. 2

- b) Krychle má dva druhy rovin souměrnosti. Tři roviny procházejí středy čtyř protějších hran (viz obr. 3), další roviny procházejí vždy dvěma protějšími hranami (viz obr. 4). Krychle má dvanáct hran, rovin souměrnosti druhého druhu je tedy šest. Celkem má krychle 9 rovin souměrnosti.

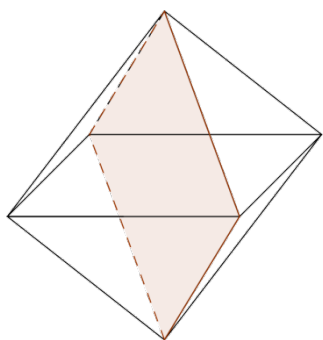


Obr. 3

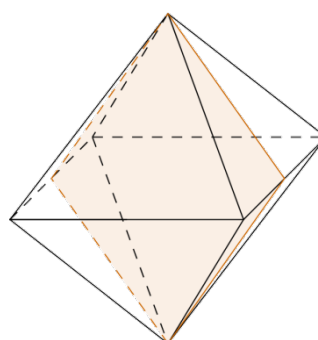


Obr. 4

Oktaedr je duální těleso ke krychli, má tedy také 9 rovin souměrnosti. Tři roviny procházejí vždy čtyřmi hranami osmistěnu (viz obr. 5), další procházejí vždy dvěma protějšími vrcholy a středy dvou protějších hran (viz obr. 6). Osmistěn má stejně jako krychle 12 hran, proto má šest rovin souměrnosti druhého druhu, tedy celkem 9 rovin souměrnosti.



Obr. 5



Obr. 6

- c) Každá rovina symetrie pravidelného dvanáctistěnu prochází dvěma protějšími hranami. Protože dvanáctistěn má 30 hran, má 15 rovin souměrnosti. Pravidelný dvacetistěn je duální těleso k dvanáctistěnu, má tedy také 15 rovin souměrnosti. Všechny roviny symetrie dvacetistěnu také procházejí vždy dvěma protějšími hranami, dvacetistěn má 30 hran, a tedy 15 rovin souměrnosti.

Metodické poznámky

Roviny souměrnosti je nejlépe ukazovat na modelech platónských těles. Lze využít na posilování mezipředmětových vztahů mezi matematikou a chemií – řada molekul chemických prvků a sloučenin má tvar platónských těles, využívají se při jejich studiu i roviny symetrie.

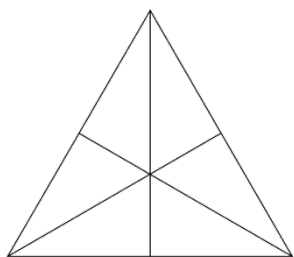
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: platónská tělesa, roviny souměrnosti platónských těles

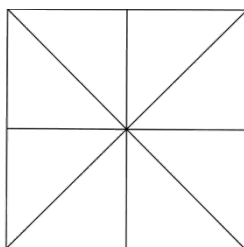
Na kolik částí se rozpadnou jednotlivá platónská tělesa, jestliže provedeme řezy všemi rovinami souměrnosti současně?

Řešení

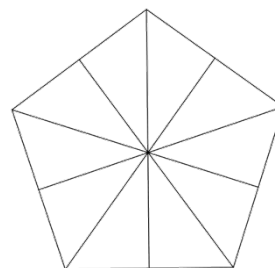
Všechny roviny souměrnosti procházejí středem mnohostěnu (resp. středem kulové plochy mnohostěnu opsané i vepsané). Proto pokud provedeme řezy všemi rovinami současně, mnohostěn se rozpadne na jehlany s vrcholem v tomto středu. Vzhledem k symetrii pravidelného mnohostěnu se při určování počtu částí, na které se těleso rozpadne, můžeme omezit na jeden jehlan, jehož podstavou je stěna mnohostěnu a který má vrchol ve středu mnohostěnu (resp. ve středu kulové plochy). Určíme, na kolik jehlanů se rovinami souměrnosti rozpadne tento jeden jehlan, a vynásobíme počtem jehlanů, tedy počtem stěn pravidelného mnohostěnu.



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

- Stěnou pravidelného čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník, ten se rovinami souměrnosti (3 roviny) rozdělí na šest částí (viz obr. 7). Počet jehlanů, na které se rozpadne čtyřstěn, je tedy $6 \cdot 4 = 24$.
- Stěnou krychle je čtverec, ten se rovinami souměrnosti (4 roviny) rozdělí na osm částí (viz obr. 8). Počet jehlanů, na které se rozpadne krychle, je tedy $8 \cdot 6 = 48$.
Oktaedr je duální těleso ke krychli, rovinami souměrnosti se rozpadne také na 48 jehlanů. (Stěnou oktaedru je rovnostranný trojúhelník. Počet jehlanů, na které se rozpadne, je tedy $6 \cdot 8 = 48$.)
- Stěnou pravidelného dvanáctistěnu je pravidelný pětiúhelník, ten se rovinami souměrnosti (5 rovin) rozdělí na deset částí (viz obr. 9). Počet jehlanů, na které se rozpadne dvanáctistěn, je tedy $10 \cdot 12 = 120$.

Pravidelný dvacetistěn je duální těleso k dvanáctistěnu, rovinami souměrnosti se tedy rozpadne také na 120 jehlanů. (Stěnou pravidelného dvacetistěnu je rovnostranný trojúhelník, počet jehlanů, na které se dvacetistěn rozpadne, je tedy $6 \cdot 20 = 120$.)

Metodické poznámky

Řezy rovinami souměrnosti je nejlépe ukazovat na modelech platónských těles.

Zdroj:

Machačíková, I., Molnár. J.: *Grupy symetrie molekul*. In: Matematika w przyrodzie i sztuce, PWSZ, Nowy Sacz.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Machačíková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: stereometrie, polohové a metrické vlastnosti, tělesa, povrchy a objemy

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: krychle a koule

Jakou délku hrany má krychle,

- a) jejíž objem je stejný jako objem koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$?
- b) jejíž povrch je stejný jako povrch koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$?

Řešení

- a) Objem koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$ vypočteme podle vzorce

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 \text{ cm}^3 = 36\pi \text{ cm}^3 \doteq 113 \text{ cm}^3.$$

Označíme-li délku hrany krychle a , potom je její objem a^3 . Musí platit

$$a^3 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Odsud dostaneme

$$a = \sqrt[3]{36\pi} \text{ cm} \doteq 4,84 \text{ cm}.$$

- b) Povrch koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$ vypočteme podle vzorce

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 9 \text{ cm}^2 = 36\pi \text{ cm}^2 \doteq 113 \text{ cm}^2.$$

Označíme-li délku hrany krychle a , potom je její povrch $6a^2$. Musí platit

$$6a^2 = 36\pi \text{ cm}^2.$$

Odsud dostaneme

$$a = \sqrt{6\pi} \text{ cm} \doteq 4,34 \text{ cm}.$$

Závěr.

- a) Krychle, jejíž objem je stejný jako objem koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$, má hranu délky přibližně $4,84 \text{ cm}$.
- b) Krychle, jejíž povrch je stejný jako povrch koule o poloměru $r = 3 \text{ cm}$, má hranu délky přibližně $4,34 \text{ cm}$.

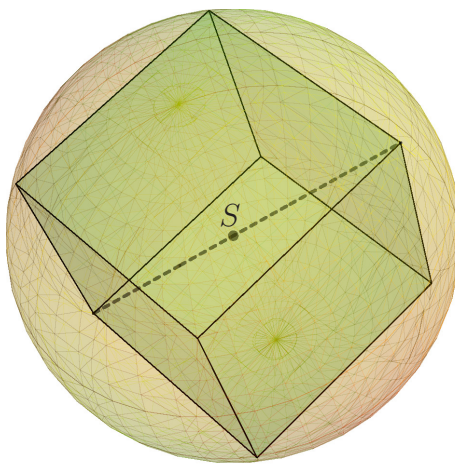
Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: krychle a koule

- a) Určete objem a povrch krychle, která je vepsaná do koule o poloměru r .
- b) Určete objem a povrch koule, která je vepsaná do krychle o hraně délky a .

Řešení

- a) Střed koule splývá se středem vepsané krychle, tj. se středem její tělesové úhlopříčky (obr. 1a). Vrcholy krychle leží na kulové ploše, tělesová úhlopříčka je průměrem koule. Délka tělesové úhlopříčky u krychle je tedy $u = 2r$.



Obr. 1a

Mezi délkou hrany krychle a a délkou tělesové úhlopříčky u platí vztah

$$u = a\sqrt{3}.$$

Je tedy

$$2r = a\sqrt{3},$$

a proto

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} r.$$

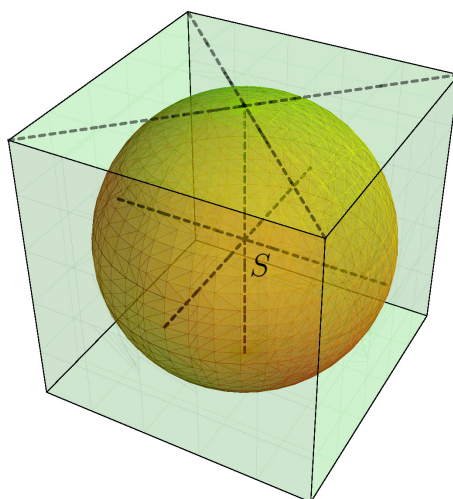
- b) Střed krychle splývá se středem vepsané koule (obr. 1b). Vepsaná koule se dotýká středů stěn krychle, proto pro její poloměr r platí $2r = a$, tj.

$$r = \frac{a}{2}.$$

Závěr.

- a) Objem krychle, která je vepsaná do koule o poloměru r , je

$$V = a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} r^3,$$



Obr. 1b

povrch této krychle je

$$S = 6a^2 = 8r^2.$$

b) Objem koule, která je vepsaná do krychle o hraně délky a , je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi a^3,$$

povrch této koule je

$$S = 4\pi r^2 = \pi a^2.$$

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: krychle a koule

Dokažte, že povrch koule, která se dotýká všech hran krychle, se rovná rozdílu povrchů koule krychli opsané a vepsané.

Řešení

Označíme délku hrany krychle a . Potom pro poloměr r opsané koule s využitím výsledku v úloze 2 dostaneme

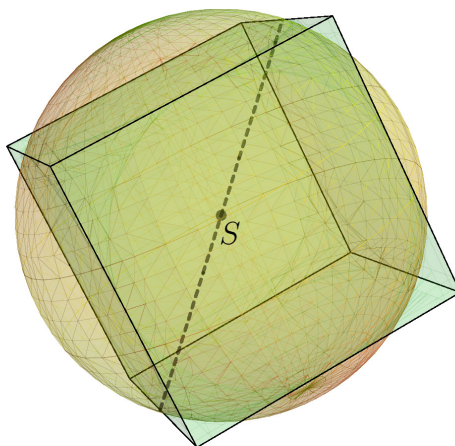
$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Povrch této koule je $S_r = 4\pi r^2 = 3\pi a^2$.

Pro poloměr ϱ vepsané koule, opět s využitím výsledku z úlohy 2, dostaneme

$$\varrho = \frac{1}{2}a.$$

Povrch této koule je $S_\varrho = 4\pi \varrho^2 = \pi a^2$.



Obr. 2

Střed koule, která se dotýká všech hran krychle, splývá se středem krychle. Tato koule se dotýká hran krychle v jejich středech (obr. 2).

Poloměr koule ρ je tedy polovinou délky $a\sqrt{2}$ stěnové úhlopříčky, tj.

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

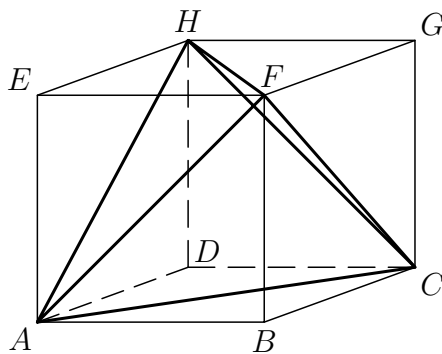
její povrch je $S_\rho = 4\pi\rho^2 = 2\pi a^2$.

Závěr. Platí $S_r - S_\rho = 3\pi a^2 - \pi a^2 = 2\pi a^2 = S_\rho$, což bylo dokázat.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, čtyřstěn

Je dána krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a$ (viz obr. 3a). Určete povrch a objem tělesa $ACHF$.

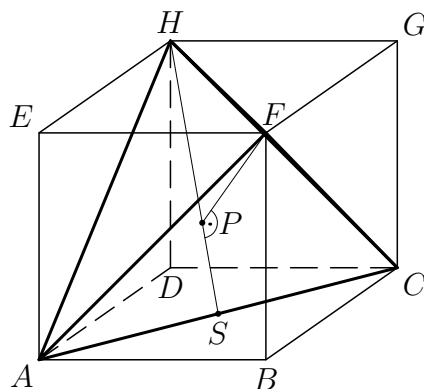


Obr. 3a

Řešení

Tělesem $ACHF$ je čtyřstěn; všechny strany jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky (viz obr. 3b).

Označme s délku hrany čtyřstěnu. Platí $s^2 = a^2 + a^2$, tedy $s = a\sqrt{2}$.



Obr. 3b

Výška čtyřstěnu je $|PF|$. Trojúhelník HPF je pravoúhlý, P je těžiště $\triangle AHC$, a proto $|HP| = \frac{2}{3}|HS|$. Z Pythagorovy věty plyne

$$|HS| = \sqrt{|AH|^2 - |AS|^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a,$$

a tedy

$$|HP| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}a = \sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Nyní opět z Pythagorovy věty

$$v = |PF| = \sqrt{|HF|^2 - |HP|^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

Obsah P podstavy čtyřstěnu je

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |HS| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Objem čtyřstěnu s obsahem podstavy P je

$$V = \frac{1}{3}Pv = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{3}a^3.$$

Povrch čtyřstěnu je $S = 4P = 2\sqrt{3}a^2$.

Závěr. Čtyřstěn $ACHF$ má objem $\frac{1}{3}a^3$ a povrch $2\sqrt{3}a^2$.

Zdroj:

Archív autora

Obrazový materiál: Dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: stereometrie, tělesa a jejich části, povrch a objem těles

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: řešení pravoúhlého trojúhelníku, objem kulové úseče

Nádoba tvaru polokoule je naplněna vodou po okraj. Nakloníme-li ji o 30° , vyteče z ní 11 litrů vody. Kolik litrů vody v ní zůstane?

Řešení

Označme poloměr koule r (viz obr. 1). Na obrázku 1 je načrtnut průmět kulové úseče. V trojúhelníku ASO je $\frac{|SO|}{r} = \sin 30^\circ$, odtud $|SO| = \frac{r}{2}$ a tedy $|OV| = \frac{r}{2}$. Objem kulové úseče je dán vztahem

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v).$$

Podle obr. 1 platí

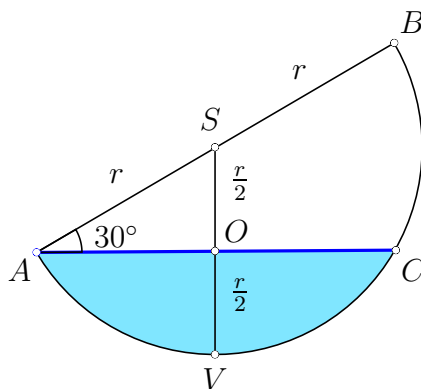
$$v = |OV| = \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{5}{24}\pi r^3.$$

Objem polokoule je $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ a dle zadání platí

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 11 + \frac{5}{24}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{24}{\pi}.$$

Hledaný objem je

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3 - 11 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{24}{\pi} - 11 = 5.$$



Obr. 1

Závěr. V nádobě zůstane 5 litrů vody.

Metodické poznámky

Před řešením úlohy je vhodné projít osové řezy koule a jejich částí.

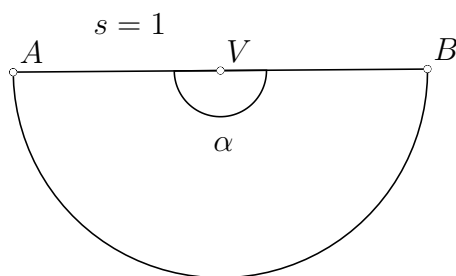
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rotační kužel, kruhová výseč

Rozvineme-li do roviny plášť rotačního kužele, dostaneme polokruh s poloměrem $s = 1$. Vypočítejte objem V tohoto kužele.

Řešení

Víme, že délka oblouku AB je $\pi s = \pi$, kde $s = 1$ je strana kužele (viz obr. 2). Tato délka je rovna obvodu podstavy, tedy $2\pi r$, kde r je poloměr podstavy kužele. Proto $2\pi r = \pi s = \pi$, odtud $r = \frac{1}{2}$.



Obr. 2

Pro výšku v platí

$$v^2 = s^2 - r^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Objem kužele je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Závěr. Objem kužele je $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{24}$.

Metodické poznámky

Problém je vhodné zevšeobecnit – je-li s strana a α středový úhel rozvinutého pláště rotačního kužele, pro objem kužele platí:

$$V = \frac{a^2 \cdot s^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - a^2}}{24\pi^2},$$

kde pro poloměr podstavy kužele platí $r = \frac{as}{2\pi}$.

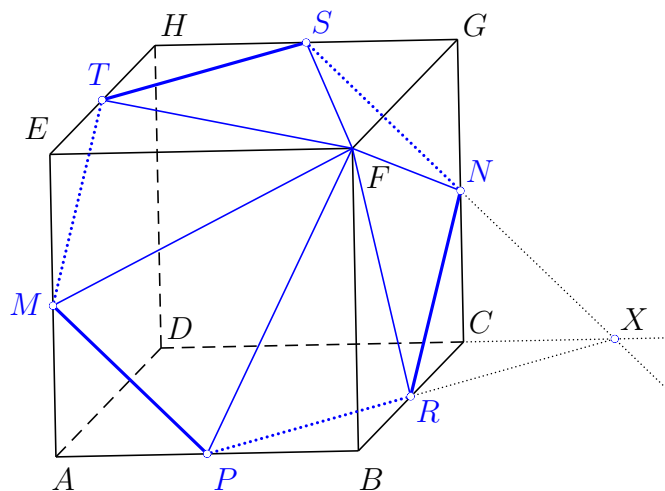
Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řez roviny a krychle, objem a povrch jehlanu

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a . Nechť M je střed hrany AE , N střed hrany CG a P střed hrany AB . Vypočítejte objem a povrch jehlanu, jehož podstavou je řez krychle rovinou MNP a hlavní vrchol je F .

Řešení

Řezem je pravidelný šestiúhelník $MPRNST$ (viz obr. 3). Rovina MNP je rovinou souměrnosti bodů F a D . Výška v jehlanu je polovinou tělesové úhlopříčky krychle $ABCDEFGH$, tedy $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, přičemž hrana podstavy jehlanu má délku $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Obr. 3

Závěr. Objem jehlanu je $V = \frac{3a^3}{8}$, povrch $S = \frac{3}{4}(\sqrt{3} + 3)a^2$.

Metodické poznámky

Před řešením úlohy je vhodné zopakovat vzájemné polohy 3 rovin v prostoru a řezy těles. Samostatným problémem pro zvědavé žáky může být důkaz souměrnosti bodů F, D podle roviny MNP .

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: komolý jehlan, podstavy, boční stěny, podstavná hrana, boční hrana

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, objem komolého jehlanu

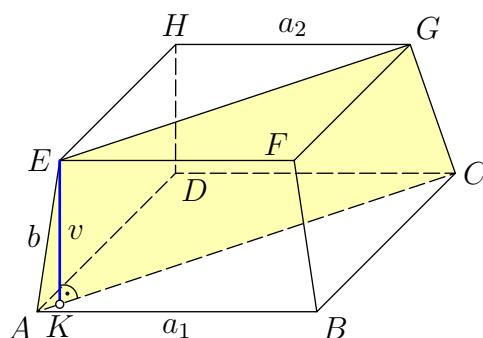
Vypočítejte objem pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu, je-li hrana dolní podstavy $a_1 = 48$ cm, hrana horní podstavy $a_2 = 44$ cm a boční hrana $b = 24$ cm.

Řešení

Objem tělesa vypočteme užitím vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

kde v je výška tělesa a S_1 a S_2 jsou obsahy podstav. Protože se jedná o pravidelný komolý jehlan, jsou podstavy čtverce, tedy $S_1 = 48^2$ cm², $S_2 = 44^2$ cm². Výšku tělesa vypočteme jako výšku lichoběžníku $ACGE$ (viz obr. 1).



Obr. 1

Strana AC lichoběžníku $ACGE$ je úhlopříčka čtverce $ABCD$, tedy $|AC| = 48\sqrt{2}$ cm, strana GE je úhlopříčka čtverce $EFGH$, tedy $|EG| = 44\sqrt{2}$ cm. Výšku $v = |KE|$ lichoběžníku $ACGE$ vypočteme užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku AKE . V tomto trojúhelníku $|AK| = 2\sqrt{2}$ cm, a tedy

$$v = \sqrt{|AE|^2 - |AK|^2} = 2\sqrt{142} \text{ cm.}$$

Tím máme pro použití výchozího vzorce všechny potřebné údaje.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{142} \cdot \left(48^2 + \sqrt{48^2 \cdot 44^2} + 44^2 \right) \doteq 50\,462 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem komolého jehlanu je přibližně 50 462 cm³.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, vzorec pro objem komolého jehlanu

Vypočtete objem trojbokého komolého jehlanu, jsou-li hrany dolní podstavy $a_1 = 50$ cm, $b_1 = 104$ cm, $c_1 = 126$ cm, tělesová výška $v = 20$ cm a poměr hran horní a dolní podstavy je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{2}.$$

Řešení

Ze zadaného poměru vypočteme hrany horní podstavy a_2 , b_2 , c_2

$$a_2 = 25 \text{ cm}, \quad b_2 = 52 \text{ cm}, \quad c_2 = 63 \text{ cm}.$$

Objem tělesa budeme počítat podle vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

kde v je výška tělesa a S_1 a S_2 jsou obsahy podstav.

Je třeba vypočítat obsahy podstav, tj. obsahy trojúhelníků zadaných třemi stranami. Obsah trojúhelníků vypočteme z Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pro první podstavu platí $s_1 = \frac{1}{2}(50 + 104 + 126) = 140$ cm, tedy její obsah je

$$S_1 = \sqrt{140(140-50)(140-104)(140-126)} = 2520 \text{ cm}^2,$$

podobně pro druhou podstavu máme $s_2 = \frac{1}{2}(25 + 52 + 63) = 70$ cm, její obsah tak je

$$S_2 = \sqrt{70(70-25)(70-52)(70-63)} = 630 \text{ cm}^2.$$

Objem jehlanu tak vypočteme

$$V = \frac{1}{3} \cdot 20 \left(2520 + \sqrt{2520 \cdot 630} + 630 \right) = 29\,400 \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem trojbokého komolého jehlanu je $29\,400 \text{ cm}^3$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, obsah lichoběžníku, vzorec pro objem komolého jehlanu

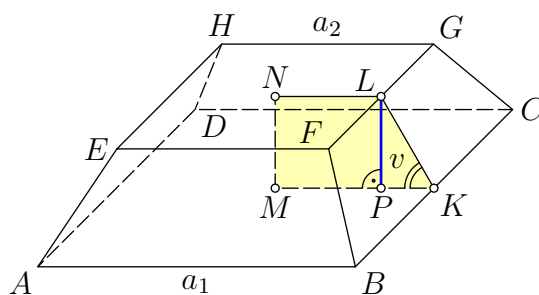
Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční stěna svírá s rovinou podstavy úhel 60° . Vypočtete objem a povrch komolého jehlanu.

Řešení

Objem tělesa budeme počítat podle vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

kde v je výška tělesa a S_1 a S_2 jsou obsahy podstav. Protože se jedná o pravidelný jehlan, jsou podstavy čtverce, tedy $S_1 = 36 \text{ cm}^2$, $S_2 = 16 \text{ cm}^2$. Výšku tělesa vypočteme jako výšku rovnoramenného lichoběžníku $MKLN$ z trojúhelníka PKL , přitom K a L jsou po řadě středy hran BC a FG a M a N jsou po řadě středy dolní a horní podstavy, viz obr. 2.



Obr. 2

V trojúhelníku PKL platí

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|LP|}{|PK|},$$

tedy

$$|LP| = |PK| \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ cm},$$

Nyní je možné dosadit do vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(36 + \sqrt{36 \cdot 16} + 16 \right) = \frac{76\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

Povrch tohoto komolého jehlanu sestává ze dvou čtverců (podstavy) a čtyř shodných lichoběžníků (plášť tělesa). Obsahy podstav jsou S_1 a S_2 z předchozího výpočtu. Zbývá určit obsah lichoběžníku podle vzorce $S_l = \frac{1}{2}(a+c)v$, kde a a c jsou základny lichoběžníku a v jeho výška. V našem lichoběžníku $a = a_1$, $c = a_2$, $v = |KL|$ v lichoběžníku $MKLN$. V trojúhelníku PKL platí

$$\cos 60^\circ = \frac{|PK|}{|KL|}, \quad \text{tedy} \quad |KL| = 2 \text{ cm}.$$

Obsah S_l boční stěny tak je $S_l = \frac{1}{2}(6+4)2 = 10 \text{ cm}^2$. Proto povrch S komolého jehlanu je

$$S = S_1 + S_2 + 4S_l = 36 + 16 + 4 \cdot 10 = 92 \text{ cm}^2.$$

Závěr. Objem pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu je $\frac{1}{3} \cdot 76\sqrt{3} \text{ cm}^3$, jeho povrch je 92 cm^2 .

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, obsah trojúhelníku a lichoběžníku, výška v rovnostranném trojúhelníku, goniometrické funkce, vzorec pro objem komolého jehlanu

Určete povrch a objem pravidelného šestibokého komolého jehlanu, znáte-li

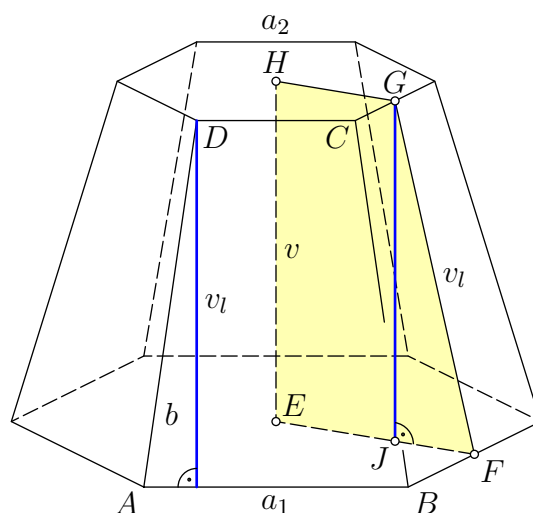
- a) délky a_1, a_2 ($a_1 > a_2$) podstavných hran a délku b boční hrany,
- b) délky a_1, a_2 ($a_1 > a_2$) podstavných hran a odchylku φ boční hrany a roviny podstavy.

Řešení

Povrch tohoto tělesa sestává ze dvou podstav – pravidelných šestiúhelníků a šesti shodných lichoběžníků. Objem budeme počítat podle vzorce pro objem komolého jehlanu

$$V = \frac{1}{3}v(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

- a) Abychom mohli určit obsah lichoběžníku — boční stěny, musíme vypočítat jeho výšku v_l , označení viz obr. 3.



Obr. 3

$$v_l = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}{4}}.$$

Obsah S_l stěny tak je

$$S_l = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \sqrt{\frac{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}{4}}.$$

Dolní podstava — pravidelný šestiúhelník — sestává ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků se stranou délky a_1 a výškou $a_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obsah S_1 dolní podstavy komolého jehlanu tak je

$$S_1 = 6 \cdot a_1 \cdot \frac{a_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} a_1^2.$$

Analogicky pro obsah S_2 horní podstavy komolého jehlanu platí

$$S_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} a_2^2.$$

Povrch celého tělesa je

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + 6S_l = \frac{3\sqrt{3}}{2} a_1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} a_2^2 + 6 \frac{a_1 + a_2}{2} \sqrt{\frac{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}{4}} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3(a_1 + a_2)}{2} \sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}. \end{aligned}$$

Pro výpočet objemu komolého jehlanu podle vzorce

$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

potřebujeme znát výšku tělesa. Tu vypočítáme jako výšku lichoběžníku $EFGH$ z trojúhelníku JFG podle Pythagorovy věty (obr. 3).

$$\begin{aligned} |JF| &= \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1 - a_2), \\ v = |JG| &= \sqrt{|GF|^2 - |JF|^2} = \sqrt{\frac{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}{4} - \frac{3}{4} (a_1 - a_2)^2} = \sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}. \end{aligned}$$

Objem V tak je

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} a_1^2 + \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2} a_1^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} a_2^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} a_2^2 \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}. \end{aligned}$$

Závěr. Povrch pravidelného komolého šestibokého jehlanu je

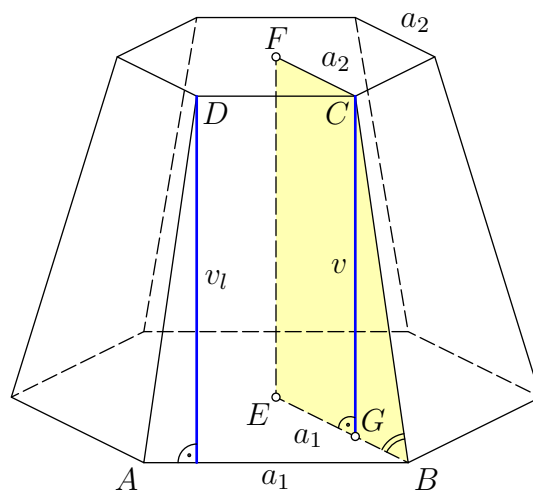
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3(a_1 + a_2)}{2} \sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2},$$

jeho objem je

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \sqrt{4b^2 - (a_1 - a_2)^2}.$$

- b) Obsahy podstav tohoto pravidelného komolého šestibokého jehlanu se určí stejně jako v části a) příkladu. Pro výpočet povrchu tělesa musíme určit obsah boční stěny, lichoběžníku $ABCD$. Proto potřebujeme znát jeho výšku. Z lichoběžníku $EBCF$, viz obr. 4, určíme velikost ramene BC .

$$|GB| = a_1 - a_2, \quad |BC| = \frac{|GB|}{\cos \varphi} = \frac{a_1 - a_2}{\cos \varphi}.$$



Obr. 4

Výšku rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, určíme opět pomocí Pythagorovy věty

$$v_l = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{\cos \varphi}\right)^2 - \frac{(a_1 - a_2)^2}{4}} = \frac{a_1 - a_2}{2 \cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi}.$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ tak je

$$S_l = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 - a_2}{2 \cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{4 \cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi}.$$

Povrch celého tělesa je

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a_1^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} a_2^2 + 6 \frac{a_1^2 - a_2^2}{4 \cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{\cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi}.$$

Pro výpočet objemu potřebujeme znát výšku tělesa. Ta je rovna velikosti výšky lichoběžníku $EBCF$ a vypočteme ji z trojúhelníku GBC

$$v = |CG| = |GB| \operatorname{tg} \varphi = (a_1 - a_2) \operatorname{tg} \varphi$$

Objem tělesa vypočteme ze známého vzorce

$$V = \frac{(a_1 - a_2) \operatorname{tg} \varphi}{3} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3}{2} a_1 a_2 \sqrt{3} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1^3 - a_2^3) \operatorname{tg} \varphi.$$

Závěr. Povrch pravidelného komolého šestibokého jehlanu je

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{\cos \varphi} \sqrt{4 - \cos^2 \varphi},$$

jeho objem je

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} (a_1^3 - a_2^3) \operatorname{tg} \varphi.$$

Metodické poznámky

Výpočty objemů a povrchů těles jsou důležitou částí geometrie v prostoru – stereometrie. Začínáme na jednoduchých úlohách, postupně přecházíme ke složitějším, kde je zapotřebí některou veličinu do vzorce dopočítat. K tomu je třeba prohlubovat prostorovou představivost, neboť žák musí najít rovinný útvar, ze kterého požadovanou veličinu dopočítá, a potom ji s využitím trigonometrie dopočítat. Tuto představu je vhodné podpořit náčrtem. U výpočtu povrchu a objemu komolého jehlanu je třeba ještě umět vypočítat obsah mnohoúhelníku a lichoběžníku.

Zdroj:

- [1] Kriegelstein, E. *Sbírka úloh z matematiky: pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*, Praha, Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1982, 448 s. Pomocné knihy pro žáky.
- [2] Petáková, J. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha, Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus).
- [3] Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 1. vyd. Praha, Prometheus, 1995, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: komolý kužel, obsah jeho podstavy, plášť a jeho obsah

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vzorec pro objem rotačního komolého kužele

Vědro má tvar rotačního komolého kužele o průměrech podstav $d_1 = 180$ mm a $d_2 = 360$ mm. Výška vědra je $v = 340$ mm. Kolik litrů vody přibližně pojme?

Řešení

Vypočteme poloměry podstav a vyjádříme je v dm, protože $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$

$$r_1 = 90 \text{ mm} = 0,9 \text{ dm}, \quad r_2 = 180 \text{ mm} = 1,8 \text{ dm}.$$

Vzorec pro výpočet objemu komolého kužele je

$$V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Po dosazení

$$V = \frac{\pi \cdot 3,4}{3} (0,9^2 + 0,9 \cdot 1,8 + 1,8^2) \doteq 20,2 \text{ dm}^3.$$

Závěr. Vědro pojme přibližně 20,2 litru vody.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, vzorec pro objem rotačního komolého kužele, vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního komolého kužele

Rotační komolý kužel má podstavy o poloměrech $r_1 = 6$ cm a $r_2 = 3$ cm. Vypočítejte jeho objem, rovná-li se obsah jeho pláště součtu obsahů obou podstav.

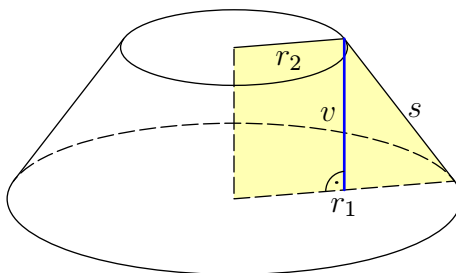
Řešení

Pro obsahy podstav kužele platí $S_1 = \pi r_1^2$, $S_2 = \pi r_2^2$. Pro obsah jeho pláště platí $S_{pl} = \pi (r_1 + r_2) s$, kde s je strana kužele. Podle zadání je

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 + r_2) s,$$

odtud

$$s = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2} = \frac{36 + 9}{6 + 3} = 5 \text{ cm}.$$



Obr. 1

Výšku v tělesa vypočteme pomocí Pythagorovy věty

$$v = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{25 - (6 - 3)^2} = 4 \text{ cm}.$$

Dosazením do vzorce pro výpočet objemu rotačního komolého kužele dostaneme

$$V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{4\pi}{3} (36 + 18 + 9) = 84\pi \text{ cm}^3.$$

Závěr. Objem komolého kužele je $84\pi \text{ cm}^3$.

Řešení (jiné)

Úlohu je možné řešit i použitím určitého integrálu. Nejprve je třeba vypočítat výšku kužele postupem uvedeným v předchozím řešení. Kužel vznikne rotací úsečky AB kolem osy x v kartézské soustavě souřadnic.

Je třeba vypočítat rovnici přímky AB , jejíž částí úsečka AB je. Souřadnice bodu A jsou $[0; 3]$, bodu $B[4; 6]$. Dosazením souřadnic bodu A do rovnice přímky $y = kx + q$ dostáváme $q = 3$. Po dosazení souřadnic bodu B dostaneme $6 = 4k + 3$, $k = \frac{3}{4}$. Hledaná rovnice přímky je $y = \frac{3}{4}x + 3$. Objem rotačního tělesa lze vypočítat jako

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Pro náš konkrétní příklad je dolní mez $a = 0$, horní mez $b = 4$. Takže

$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x + 3\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{4}{9} \left(\frac{3}{4}x + 3\right)^3 \right]_0^4 = 84\pi.$$

Závěr. Objem komolého kužele je $84\pi \text{ cm}^3$.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

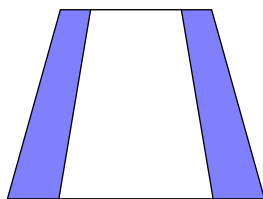
Předpokládané znalosti: výpočet hmotnosti z objemu a hustoty, vzorec pro objem rotačního komolého kužele

Komín tvaru dutého rotačního komolého kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva $\rho = 1600 \text{ kg m}^{-3}$?

Řešení

Hmotnost komínu budeme počítat podle známého vzorce $m = V\rho$. Proto je třeba nejprve vypočítat objem zdiva komínu. Tento objem budeme počítat podle vzorce pro výpočet rotačního komolého kužele

$$V = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$



Obr. 2

Objem zdiva určíme jako rozdíl objemu celého „plného“ komínu a „díry“ v něm, viz vyznačená část obr. 2.

Vyjádříme poloměry jednotlivých částí

$$r_1 = 1,6 \text{ m}, \quad r'_1 = 1 \text{ m}, \quad r_2 = 0,85 \text{ m}, \quad r'_2 = 0,6 \text{ m}.$$

Tedy podle vzorce pro objem komolého kužele

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi v [(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - (r_1'^2 + r_1' r_2' + r_2'^2)] = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 32 \cdot [(1,6^2 + 1,6 \cdot 0,85 + 0,85^2) - (1^2 + 1 \cdot 0,6 + 0,6^2)] \doteq 89,89 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Proto jeho hmotnost je

$$m = V \rho = 89,89 \cdot 1600 \doteq 143\,826,3 \text{ kg} \doteq 144 \text{ t}.$$

Závěr. Hmotnost komínu je přibližně 144 t.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, podobnost trojúhelníků, obsah kruhové výseče, vzorec pro výpočet obsahu pláště rotačního komolého kužele

Vypočítejte obsah lampového stínítka tvaru rotačního komolého kužele s průměry podstav 32 cm a 12 cm a výškou 24 cm. Jaký je úhel výseče mezikruží, z něhož stínítko vzniklo?

Řešení

Opět vyjádříme poloměry podstav

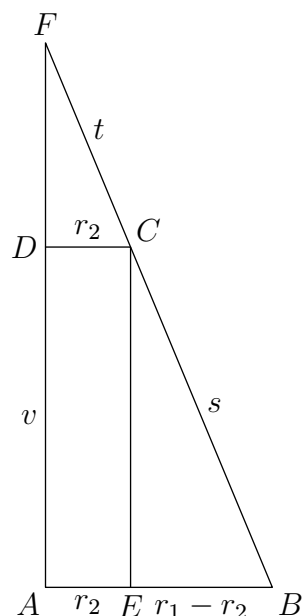
$$r_1 = 16 \text{ cm}, \quad r_2 = 6 \text{ cm}.$$

Stínítko tvoří plášť komolého rotačního kužele, jehož obsah se vypočte podle vzorce

$$S_{pl} = \pi (r_1 + r_2) s,$$

kde s je strana kužele. Stranu kužele vypočteme z Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku EBC , viz obr. 3.

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{24^2 + (16 - 6)^2} = 26 \text{ cm}, \\ S &= \pi \cdot 26 \cdot (16 + 6) \doteq 1797 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



Obr. 3

Obsah výseče mezikruží vypočteme jako rozdíl obsahů dvou kruhových výsečí se stejným úhlem. Obsah kruhové výseče určíme podle vzorce $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \alpha$, kde α je velikost úhlu kruhové výseče (ve stupňové míře).

Je patrné, že poloměr větší kruhové výseče je $r + s$, poloměr menší výseče je r . Obsah výseče mezikruží, která tvoří stínítka lampy, je

$$S = \frac{\pi (r + s)^2}{360^\circ} \alpha - \frac{\pi r^2}{360^\circ} \alpha = \frac{\pi \alpha (2rs + s^2)}{360^\circ} \quad (1)$$

Dostali jsme tak jednu rovnici se dvěma neznámými r a α . Proto neznámou r vyjádříme z podobnosti trojúhelníků ABF a EBC (tyto trojúhelníky jsou podobné podle věty uu o podobnosti trojúhelníků)

$$\frac{r + s}{r_1} = \frac{s}{r_1 - r_2}.$$

Odtud dosadíme do (1)

$$r = \frac{sr_1}{r_1 - r_2} - s$$

a dostaneme

$$S = \frac{\pi \alpha \left[2 \left(\frac{sr_1}{r_1 - r_2} - s \right) s + s^2 \right]}{360^\circ} = \frac{\pi \alpha \left(2 \frac{s^2 r_1}{r_1 - r_2} - s^2 \right)}{360^\circ}$$

Z této rovnice vyjádříme α

$$\alpha = \frac{S \cdot 360^\circ}{\pi \left(2 \frac{s^2 r_1}{r_1 - r_2} - s^2 \right)} = \frac{S \cdot 360^\circ}{\pi s^2 \left(\frac{2r_1}{r_1 - r_2} - 1 \right)} = \frac{1797 \cdot 360^\circ}{\pi \cdot 26^2 \left(\frac{2 \cdot 16}{16 - 6} - 1 \right)} \doteq 138,5^\circ$$

Závěr. Obsah lampového stínítka je přibližně 1797 cm^2 , úhel výseče mezikruží, z něhož stínítka vzniklo, je přibližně $138^\circ 30'$.

Metodické poznámky

Výpočty objemů a povrchů těles jsou důležitou částí geometrie v prostoru – stereometrie. S výpočtem objemu, event. povrchu, se často setkáváme v praktických úlohách – úloha 1 a 3, kde je výpočet objemu využit k výpočtu hmotnosti. Opět je třeba prohlubovat prostorovou představivost, neboť žák zpravidla musí do vzorce některou veličinu dopočítat. K tomu je třeba najít rovinný útvar, ze kterého je to možné.

Zdroj:

[1] Vejsada, F., Talafovus, F. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*, 2. vyd., Praha, SPN, 1973, 137 s.

[2] Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 1. vyd. Praha, Prometheus, 1995, 223 s., Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz