

# METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

## pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

**Rámcový vzdělávací program pro gymnázia**

**Vzdělávací oblast:** Matematika a její aplikace

**Tematický okruh:** Argumentace a ověřování

**Typ úloh:** Gradované úlohy



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Obsah

|                  |    |
|------------------|----|
| Metodický list 1 | 3  |
| Metodický list 2 | 7  |
| Metodický list 3 | 11 |
| Metodický list 4 | 15 |
| Metodický list 5 | 19 |
| Metodický list 6 | 22 |
| Metodický list 7 | 26 |
| Metodický list 8 | 28 |

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** složený výrok, logické spojky, tabulka pravdivostních hodnot

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: spojky výrokové logiky

Víte-li, že  $a$  označuje výrok „Přišel Adam.“ a  $b$  označuje výrok „Přišla Bětká.“, запиšte symbolicky:

- a) Přišel Adam a nepřišla Bětká.
- b) Jestliže nepřišel Adam, pak přišla Bětká.
- c) Přišel Adam nebo přišla Bětká.
- d) Když přišla Bětká, potom přišel Adam.
- e) Bětká přišla, právě když nepřišel Adam.

### Řešení

Přepis výroků vyjádřených českým jazykem do symbolického jazyka je snadný, pouze nahradíme příslušné jazykové výrazy smluvenými symboly.

*Závěr.* Dané výroky lze vyjádřit takto:

- a)  $a \wedge (\neg b)$
- b)  $(\neg a) \Rightarrow b$
- c)  $a \vee b$
- d)  $b \Rightarrow a$
- e)  $b \Leftrightarrow (\neg a)$

### Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výrokové spojky, tabulka pravdivostních hodnot

Rozhodněte, zda následující dvojice výroků vyjadřují totéž:

- a) Jestliže přišel Adam, pak přišla Bětká. – Nepřišel Adam nebo přišla Bětká.
- b) Přišel Adam nebo se stalo, že přišla Bětká i Adam. – Přišel Adam.
- c) Přišel Adam a nepřišla Bětká. – Nepřišel Adam nebo přišla Bětká.

### Řešení

Abychom mohli rozhodnout, zda jsou uvedené dvojice výroků ekvivalentní, zapíšeme je pomocí symbolů výrokové logiky. K rozhodnutí použijeme tabulkovou metodu.

Nechť výrok „Přišel Adam.“ je označen  $a$ , výrok „Přišla Bětká.“ označen  $b$ .

- Výrok „Jestliže přišel Adam, pak přišla Bětko.“ lze zapsat  $a \Rightarrow b$ . Výrok „Nepřišel Adam nebo přišla Bětko.“ lze zapsat  $(\neg a) \vee b$ . Vyplníme tabulku:

| $a$ | $b$ | $\neg a$ | $a \Rightarrow b$ | $(\neg a) \vee b$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-------------------|
| 1   | 1   | 0        | 1                 | 1                 |
| 1   | 0   | 0        | 0                 | 0                 |
| 0   | 1   | 1        | 1                 | 1                 |
| 0   | 0   | 1        | 1                 | 1                 |

Z tabulky je vidět, že oba výroky jsou ekvivalentní, a tedy vyjadřují totéž.

- Výrok „Přišel Adam nebo se stalo, že přišla Bětko i Adam.“ lze zapsat  $a \vee (b \wedge a)$ . Výrok „Přišel Adam.“ je jednoduchý výrok  $a$ . Vyplníme tabulku:

| $a$ | $b$ | $b \wedge a$ | $a \vee (b \wedge a)$ |
|-----|-----|--------------|-----------------------|
| 1   | 1   | 1            | 1                     |
| 1   | 0   | 0            | 1                     |
| 0   | 1   | 0            | 0                     |
| 0   | 0   | 0            | 0                     |

Z tabulky je vidět, že výrok  $a \vee (b \wedge a)$  je ekvivalentní výroku  $a$ .

- Výrok „Přišel Adam a nepřišla Bětko.“ lze zapsat  $a \wedge (\neg b)$ . Výrok „Nepřišel Adam nebo přišla Bětko.“ lze zapsat  $(\neg a) \vee b$ . S využitím výsledku a) vyplníme tabulku:

| $a$ | $b$ | $\neg b$ | $a \wedge (\neg b)$ | $(\neg a) \vee b$ |
|-----|-----|----------|---------------------|-------------------|
| 1   | 1   | 0        | 0                   | 1                 |
| 1   | 0   | 1        | 1                   | 0                 |
| 0   | 1   | 0        | 0                   | 1                 |
| 0   | 0   | 1        | 0                   | 1                 |

Z tabulky je vidět, že druhý výrok je negací prvního, a tedy vyjadřuje jeho opak.

*Závěr.*

- Výroky „Jestliže přišel Adam, pak přišla Bětko.“ a „Nepřišel Adam nebo přišla Bětko.“ vyjadřují totéž.
- Výroky „Přišel Adam nebo se stalo, že přišla Bětko i Adam.“ a „Přišel Adam.“ vyjadřují totéž.
- Výrok „Přišel Adam a nepřišla Bětko.“ je negací výroku „Nepřišel Adam nebo přišla Bětko.“, proto nevyjadřují totéž.

### Metodické poznámky

Úkol a) ukazuje definici implikace pomocí disjunkce a negace. Úkol b) představuje jeden ze zákonů absorpce:  $(a \vee (b \wedge a)) \Leftrightarrow a$  a  $(a \wedge (b \vee a)) \Leftrightarrow a$ . Úkol c) ukazuje, jak se tvoří negace konjunkce, resp. disjunkce, to vyjadřují de Morganovy zákony:  $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$  a  $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ .

### Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výrokové spojky, tabulka pravdivostních hodnot

Víte-li, že  $a$  označuje výrok „Přišel Adam.“ a  $b$  označuje výrok „Přišla Běťka.“, zapíšte symbolicky:

- a) Přišel právě jeden z nich.
- b) Přišel aspoň jeden z nich.
- c) Přišel nejvýše jeden z nich.
- d) Přišel nejvýše jeden z nich, ale Adam to nebyl.

### Řešení

Výrazy vyjádřené českým jazykem nahradíme smluvenými symboly. Není-li toto nahrazení zřejmé, pomůžeme si tabulkou, v níž do sloupce označeném „?“ zapíšeme pravdivostní hodnotu hledaného výroku, odpovídající hodnotám  $a$  a  $b$  na tomto řádku. Hledaný výrok (resp. jeho negaci) pak nalezneme takto: Vezmeme řádky tabulky, kde je ve sloupci označeném ? hodnota 1 (resp. 0 při hledání negace) a sestavíme disjunkci z konjunkcí pravdivých hodnot jednoduchých výroků – je-li  $a = 1$ , vezmeme do konjunkce  $a$ , je-li  $a = 0$ , vezmeme  $\neg a$ . Zde  $x = 1$  bude značit, že výrok  $x$  pravdivý,  $x = 0$ , že výrok  $x$  je nepravdivý.

- Přišel právě jeden z nich:

| $a$ | $b$ | ? |
|-----|-----|---|
| 1   | 1   | 0 |
| 1   | 0   | 1 |
| 0   | 1   | 1 |
| 0   | 0   | 0 |

Zkoumaný výrok platí pro hodnoty  $a$  a  $b$  uvedené na 2. nebo 3. řádku tabulky. Lze ho zapsat  $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ . Zřejmě ho lze také zapsat  $\neg((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$ , použijeme-li 1. a 4. řádek tabulky. Také ho lze zapsat  $\neg(a \Leftrightarrow b)$ .

- Přišel aspoň jeden z nich:

| $a$ | $b$ | ? |
|-----|-----|---|
| 1   | 1   | 1 |
| 1   | 0   | 1 |
| 0   | 1   | 1 |
| 0   | 0   | 0 |

Zkoumaný výrok neplatí pro hodnoty  $a$  a  $b$  uvedené na 4. řádku tabulky. Lze ho zapsat  $\neg(\neg a \wedge \neg b)$ . Také by ho bylo možné zapsat  $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ , protože výrok platí na 1., 2. nebo 3. řádku tabulky. Zřejmě ho lze také zapsat  $a \vee b$ , neboť tabulka odpovídá definici disjunkce.

- Přišel nejvýše jeden z nich:

| $a$ | $b$ | $?$ |
|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 0   |
| 1   | 0   | 1   |
| 0   | 1   | 1   |
| 0   | 0   | 1   |

Zkoumaný výrok neplatí pro hodnoty  $a$  a  $b$  uvedené na 1. řádku tabulky. Lze ho proto zapsat  $\neg(a \wedge b)$ .

- Přišel nejvýše jeden z nich, ale Adam to nebyl:

| $a$ | $b$ | $?$ |
|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 0   |
| 1   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   |
| 0   | 0   | 1   |

Zkoumaný výrok platí pro hodnoty  $a$  a  $b$  uvedené na 3. a 4. řádku tabulky. Lze ho zapsat  $(\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ . Bylo by také možné použít 1. a 2. řádek tabulky k sestavení jeho negace. Zřejmě ho lze také zapsat  $\neg a$ , jak je vidět z tabulky.

*Závěr.* Dané výroky lze vyjádřit např. takto:

- a)  $\neg(a \Leftrightarrow b)$
- b)  $a \vee b$
- c)  $\neg(a \wedge b)$
- d)  $\neg a$

### Metodické poznámky

Je nutné zdůraznit, že složený výrok lze vyjádřit více ekvivalentními způsoby. Použití metody ukázané v této úloze umožňuje nalézt jeho symbolický zápis, obsahující pouze negaci, konjunkci a disjunkci.

**Zdroj:** dílo autora

**Obrazový materiál:**

**Autor:** RNDr. Miloslav Závodný; [mzavodny@gmail.com](mailto:mzavodny@gmail.com), [miloslav.zavodny@upol.cz](mailto:miloslav.zavodny@upol.cz)

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** základní pojmy z matematiky

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: základy výrokové logiky

Rozhodněte, která z následujících vět (nebo který matematický výraz) je výrokem. Jedná-li se o výrok, rozhodněte o jeho pravdivosti.

- a)  $5^2 = 25$ .
- b)  $25 - 10 = 5$
- c) Zítra bude pršet.
- d) Jestliže právě prší, pak je nezakryté hřiště mokré.
- e) Jestliže je nezakryté hřiště mokré, pak právě prší.
- f) Jestliže není nezakryté hřiště mokré, pak právě neprší.
- g) Kolik je hodin?
- h) Trojúhelník je pravoúhlý.
- i) Existuje pravoúhlý trojúhelník.
- j) Každý trojúhelník je pravoúhlý.
- k) Pojď sem!

### Řešení

Výrokem je jakýkoliv jazykový výraz, o němž má smysl uvažovat, zda je či není pravdivý. Proto:

- a) Jde o výrok, a to pravdivý.
- b) Jde o výrok, a to nepravdivý.
- c) Jde o výrok, a to o hypotézu, která bude potvrzena, nebo vyvrácena, následujícího dne.
- d) Jde o výrok, a to pravdivý.
- e) Jde o výrok, a to nepravdivý. Hřiště mohl kropit jeho správce, mohla ho zaplavit voda aj. Tento výrok je tzv. obrácený k výroku pod bodem d).
- f) Jde o výrok, a to pravdivý. Tento výrok je navíc rovnocenný (ekvivalentní) výroku pod bodem d). Je to tzv. obměněný výrok k výroku pod bodem d).
- g) Nejde o výrok. O pravdivosti této věty nemá smysl uvažovat.
- h) Nejde o výrok. Není zřejmé, o jakém trojúhelníku je řeč, nemá smysl uvažovat o pravdivosti této věty. Výraz „trojúhelník“ má význam proměnné, v tomto případě tzv. volné.
- i) Jde o výrok, a to pravdivý. Na rozdíl od výrazu pod bodem h) vystupuje výraz „trojúhelník“ společně se slovem „existuje“, které vyjadřuje údaj o počtu pravoúhlých trojúhelníků (tzv. existenční kvantifikátor) a o tom má smysl uvažovat.

- j) Jde o výrok, a to nepravdivý. Podobně jako v případě i) vystupuje výraz „trojúhelník“ společně se slovem „každý“, které opět vyjadřuje údaj o počtu pravoúhlých trojúhelníků (tzv. obecný kvantifikátor).
- k) Nejde o výrok. O pravdivosti této věty nemá smysl uvažovat.

### Metodické poznámky

Otázky a rozkazy nejsou výroky. Výrazy s proměnnými nejsou výroky. Pomoci rozhodnout, zda je jazykový výraz výrokem, může negace. Výrok musí být možné negovat.

### Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výroky, kvantifikátory, negace

Zformulujte negace následujících výroků. Definičním oborem je množina všech diváků na jistém představení.

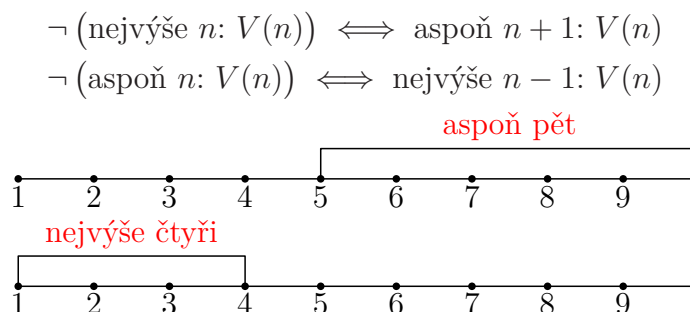
- Všichni diváci mají slavnostní oblečení.
- Odešlo už alespoň 10 diváků.
- Přítomno bylo nevíce 35 diváků.
- Nikdo neusnul.
- Kdokoliv může odejít.
- Někdo zakašlal.
- Ani jeden divák nešustí sáčkem s bonbóny.

### Řešení

Pro negování výroků  $V(x)$  s kvantifikátory platí:

- I  $\neg(\forall x V(x)) \iff \exists x \neg V(x)$   
 II  $\neg(\exists x V(x)) \iff \forall x \neg V(x)$

III V případě použití číselných kvantifikátorů (aspoň, nejvýše) nelze negovat „mechanicky“. Pomáháme si graficky, např. číselnou poloosou přirozených čísel. Negace musí zahrnovat všechny zbývající možnosti:



Proto jsou negace daných výroků tyto:

- Existuje (aspoň jeden) divák nemající slavnostní oblečení.

- b) Odešlo nejvýše 9 diváků.
- c) Přítomno bylo aspoň 36 diváků.
- d) Existuje divák, který neusnul.
- e) Existuje divák, který nemůže odejít.
- f) Žádný nezakašlal.
- g) Aspoň jeden divák šustí sáčkem s bonbóny.

### Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výroky, kvantifikátory, negace, vztahy mezi výrokovými spojkami

Nechť  $K(x)$  znamená, že  $x$  je kočka,  $M(x)$  znamená, že  $x$  je myš a  $L(x, y)$  znamená, že  $x$  loví  $y$ . Základní množinou je množina zvířat. Víte-li, že platí

$$(\forall x \in A) V(x) \iff (\forall x) (x \in A \Rightarrow V(x)) \quad (\text{I. Russelova ekvivalence}),$$

$$(\exists x \in A) V(x) \iff (\exists x) (x \in A \wedge V(x)) \quad (\text{II. Russelova ekvivalence}),$$

upravte jejich pomocí následující formule tak, aby se v nich vyskytovaly pouze kvantifikátory s omezenou působností (tj.  $\forall x \in A$  nebo  $\exists x \in A$ ) a vyjádřete formule co nejvýstižněji česky:

- a)  $(\forall x) (K(x) \Rightarrow \neg M(x))$
- b)  $(\exists x \exists y) (K(x) \wedge L(x, y) \wedge \neg M(y))$
- c)  $(\forall x \forall y) ((K(x) \wedge K(y)) \Rightarrow \neg L(x, y))$
- d)  $(\forall x \forall y) (K(x) \Rightarrow (L(x, y) \vee \neg M(y)))$

### Řešení

Nechť  $K$  je množina koček,  $M$  množina myši.

- a)  $(\forall x) (K(x) \Rightarrow \neg M(x))$

Tuto formuli můžeme s využitím I. Russelovy ekvivalence převést na tvar  $(\forall x \in K) \neg M(x)$ , tedy „Žádná kočka není myš.“ Nebo pomocí věty obměněné dostaneme  $(\forall x)(M(x) \Rightarrow \neg K(x))$ , tj. „Žádná myš není kočka.“ Zkratka „Kočky nejsou myši.“

- b)  $(\exists x \exists y) (K(x) \wedge L(x, y) \wedge \neg M(y))$

Tuto formuli budeme pomocí II. Russelovy ekvivalence a komutativního zákona  $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$  postupně upravovat:

$$(\exists x \in K \exists y) (L(x, y) \wedge \neg M(y))$$

$$(\exists x \in K \exists y) (\neg M(y) \wedge L(x, y))$$

$$(\exists x \in K \exists y \in M') L(x, y),$$

kde  $M'$  je doplněk  $M$  do množiny zvířat, tj.  $M'$  obsahuje zvířata, co nejsou myši.

Vidíme, že „Existuje kočka a jisté zvíře, jež není myš, které tato kočka loví.“ („Některá kočka loví i jiné zvíře než myš.“, nevylučuje to, že  $x = y$ , tj. že kočka loví sama sebe.)

c)  $(\forall x \forall y) ((K(x) \wedge K(y)) \Rightarrow \neg L(x, y))$

Formuli můžeme za použití deMorganova zákona  $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$  a tautologie  $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$  postupně upravovat:

$$(\forall x \forall y) (\neg(K(x) \wedge K(y)) \vee \neg L(x, y))$$

$$(\forall x \forall y) (\neg K(x) \vee \neg K(y) \vee \neg L(x, y))$$

$$(\forall x \forall y) (K(x) \Rightarrow (\neg K(y) \vee \neg L(x, y)))$$

$$(\forall x \forall y) (K(x) \Rightarrow (K(y) \Rightarrow \neg L(x, y)))$$

$$(\forall x \in K \forall y) (K(y) \Rightarrow \neg L(x, y))$$

$$(\forall x \in K \forall y \in K) \neg L(x, y)$$

Je zřejmé, že „Kočka kočku neloví.“

d)  $(\forall x \forall y) (K(x) \Rightarrow (L(x, y) \vee \neg M(y)))$

Formuli můžeme s využitím tautologie  $(l \vee \neg m) \Leftrightarrow (m \Rightarrow l)$  analogicky jako v případě c) převést na tvar  $(\forall x \in K \forall y \in M) L(x, y)$ , tj. „Kočky loví myši.“

### Metodické poznámky

Zřejmě můžeme formule bez úpravy číst přímo (pak jde o úroveň obtížnosti 2):

- a) Pro každé zvíře platí, že jestliže je kočkou, pak není myš.
- b) Existuje aspoň jedno zvíře a aspoň jedno zvíře tak, že první je kočka a druhé není myš a první loví to druhé.
- c) Pro všechna zvířata platí, že když jsou kočkami, pak se neloví.
- d) Pro všechna zvířata platí, že když jsou kočkami, pak loví ostatní zvířata nebo tato nejsou myšmi.

Otázkou je, jak výstižné tyto formulace jsou. Pro slovní vyjádření jsou lepší levé strany Russelových ekvivalencí, pro výpočty strany pravé.

### Zdroj:

dílo autora

### Obrazový materiál:

**Autor:** RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** úsudek, logické spojky, tabulka pravdivostních hodnot, výroková logika

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: spojky výrokové logiky, tabulka pravdivostních hodnot

Rozhodněte, zda jsou následující úsudky správné:

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & \frac{a \Rightarrow b}{a} & \text{b)} & \frac{a \Rightarrow b}{\neg b} \\ & \frac{a}{b} & & \frac{\neg b}{\neg a} \\ & & \text{c)} & \frac{a \Rightarrow b}{b} \\ & & & \frac{b}{a} \end{array}$$

### Řešení

Úsudek je logicky správným úsudkem tehdy, když vždy, jsou-li pravdivé všechny předpoklady, je pravdivý i závěr.

Vyplníme tabulku pravdivostních hodnot pro dané předpoklady i závěr, a podíváme se na řádky, v nichž jsou pravdivé všechny předpoklady. Pokud v nich vždy bude pravdivý i závěr, je úsudek správný, jinak je nesprávný.

a)

| $a$ | $b$ | $a$      | $a \Rightarrow b$ | $b$      |
|-----|-----|----------|-------------------|----------|
| 1   | 1   | <b>1</b> | <b>1</b>          | <b>1</b> |
| 1   | 0   | 1        | 0                 | 0        |
| 0   | 1   | 0        | 1                 | 1        |
| 0   | 0   | 0        | 1                 | 0        |

Vidíme, že  $a \Rightarrow b$  i  $a$  jsou pravdivé pouze v prvním řádku tabulky a v tomto řádku je rovněž  $b$  pravdivé. Úsudek je správný.

b)

| $a$ | $b$ | $\neg b$ | $a \Rightarrow b$ | $\neg a$ |
|-----|-----|----------|-------------------|----------|
| 1   | 1   | 0        | 1                 | 0        |
| 1   | 0   | 1        | 0                 | 0        |
| 0   | 1   | 0        | 1                 | 1        |
| 0   | 0   | <b>1</b> | <b>1</b>          | <b>1</b> |

Vidíme, že  $a \Rightarrow b$  i  $\neg b$  jsou pravdivé pouze ve čtvrtém řádku tabulky a v tomto řádku je  $\neg a$  pravdivá. Úsudek je správný.

c)

| $a$ | $b$ | $b$      | $a \Rightarrow b$ | $a$      |
|-----|-----|----------|-------------------|----------|
| 1   | 1   | <b>1</b> | <b>1</b>          | <b>1</b> |
| 1   | 0   | 0        | 0                 | 1        |
| 0   | 1   | <b>1</b> | <b>1</b>          | <b>0</b> |
| 0   | 0   | 0        | 1                 | 0        |

Oba předpoklady jsou pravdivé v prvním a třetím řádku tabulky. V třetím řádku je ale  $a$  nepravdivé. Úsudek je tedy nesprávný.

*Závěr.* Úsudky v úloze pod bodem a) a b) jsou správné, úsudek pod bodem c) je nesprávný.

### Metodické poznámky

Úsudek a) se historicky nazývá „modus ponens“ a představuje schema přímého důkazu, úsudek b) se historicky nazývá „modus tollens“ a představuje schema nepřímého důkazu. V případě správného úsudku říkáme, že závěr vyplývá (plyne) z předpokladů.

## Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: spojky výrokové logiky

Rozhodněte, zda jsou následující úsudky správné:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \begin{array}{l} a \vee \neg b \\ b \\ \hline c \Rightarrow a \\ \hline a \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} a \vee \neg b \\ b \\ \hline c \Rightarrow a \\ \hline c \end{array} \quad \text{c)} \quad \begin{array}{l} \neg(a \Rightarrow a) \\ a \Rightarrow b \\ \hline c \end{array}
 \end{array}$$

### Řešení

Úsudek je logicky správným úsudkem tehdy, když vždy, jsou-li pravdivé všechny předpoklady, je pravdivý i závěr.

Vyplníme tabulku pravdivostních hodnot pro dané předpoklady i závěr, a podíváme se na řádky, v nichž jsou pravdivé všechny předpoklady. Pokud v nich vždy bude pravdivý i závěr, je úsudek správný, jinak je nesprávný.

a)

| $a$ | $b$ | $c$ | $a \vee \neg b$ | $b$ | $c \Rightarrow a$ | $a$ |
|-----|-----|-----|-----------------|-----|-------------------|-----|
| 1   | 1   | 1   | 1               | 1   | 1                 | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1               | 1   | 1                 | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 1               | 0   | 1                 | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 1               | 0   | 1                 | 1   |
| 0   | 1   | 1   | 0               | 1   | 0                 | 0   |
| 0   | 1   | 0   | 0               | 1   | 1                 | 0   |
| 0   | 0   | 1   | 1               | 0   | 0                 | 0   |
| 0   | 0   | 0   | 1               | 0   | 1                 | 0   |

Vidíme, že všechny předpoklady jsou pravdivé pouze v prvním a druhém řádku tabulky. V těchto řádcích je rovněž  $a$  pravdivé. Úsudek je logicky správný.

b)

| $a$ | $b$ | $c$ | $a \vee \neg b$ | $b$ | $c \Rightarrow a$ | $c$ |
|-----|-----|-----|-----------------|-----|-------------------|-----|
| 1   | 1   | 1   | 1               | 1   | 1                 | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1               | 1   | 1                 | 0   |
| 1   | 0   | 1   | 1               | 0   | 1                 | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 1               | 0   | 1                 | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 0               | 1   | 0                 | 1   |
| 0   | 1   | 0   | 0               | 1   | 1                 | 0   |
| 0   | 0   | 1   | 1               | 0   | 0                 | 1   |
| 0   | 0   | 0   | 1               | 0   | 1                 | 0   |

Vidíme, že všechny předpoklady jsou pravdivé pouze v prvním a druhém řádku tabulky. V druhém řádku tabulky je ovšem  $c$  nepravdivé. Úsudek je tedy nesprávný,  $c$  z předpokladů nevyplývá.

c) První předpoklad  $\neg(a \Rightarrow a)$  není nikdy pravdivý, jedná se o vždy nepravdivý výrok, tzv. kontradikci. Proto všechny předpoklady nemohou být nikdy pravdivé a úsudek je logicky správný (z nepravdivých předpokladů plyne cokoliv).

*Závěr.* Úsudky v úloze pod bodem a) a c) jsou správné, úsudek pod bodem b) je nesprávný.

### Metodické poznámky

Je dobré žáky upozornit na variantu c), plyne z ní nesmírná důležitost znalosti předpokladů, na jejichž základě přijímáme nějaké hodnocení.

### Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vyhodnocování složených výroků

Dívky tipují, jak bude vypadat na školu právě nastupující učitel tělocviku.

- Věra: Snad bude vysoký a štíhlý nebo to bude blondák s brýlemi.
- Hanka: Bude černooký a štíhlý nebo bude vysoký černooký.
- Eva: Nebude nosit brýle. Navíc si myslím, že nebude černooký a zároveň blondák.

Učitel odpovídal tipu Věry a Evy, Hanka neuhodla. Jaký byl jeho vzhled?

### Řešení

Nejprve zvolíme označení pro jednoduché výroky vyskytující se v textu:

- $v$ : Učitel tělocviku bude vysoký.
- $s$ : Učitel tělocviku bude štíhlý.
- $c$ : Učitel tělocviku bude černooký.
- $b$ : Učitel tělocviku bude nosit brýle.
- $l$ : Učitel tělocviku bude blondák.

Nyní symbolicky zapíšeme tipy dívek:

Věra:  $(v \wedge s) \vee (b \wedge l)$

Hanka:  $(c \wedge s) \vee (v \wedge c)$

Eva:  $(\neg b) \wedge (\neg(c \wedge l))$

Učitel odpovídal tipu Věry a Evy, Hanka neuhodla. Máme tedy množinu složených výroků

$$T = \{(v \wedge s) \vee (b \wedge l), (\neg b) \wedge (\neg(c \wedge l)), \neg((c \wedge s) \vee (v \wedge c))\}$$

a musíme rozhodnout, zda existují takové hodnoty jednoduchých výroku, aby všechny složené výroky v  $T$  platily („Hančin výrok“ jsme nahradili jeho negací).

Označme  $x = 1$ , je-li  $x$  pravdivý,  $x = 0$ , je-li  $x$  nepravdivý. Je zřejmé, že  $b = 0$ , jinak by „Evin výrok“ neplatil. Dosadíme  $b = 0$  do výroků v  $T$  a máme

$$T = \{v \wedge s, \neg(c \wedge l), \neg((c \wedge s) \vee (v \wedge c))\}.$$

Z prvního výroku plyne, že  $v = 1$  a  $s = 1$ . Po opětovném dosazení tohoto zjištění do  $T$  dostaneme

$$\{1, \neg(c \wedge l), \neg c\}.$$

Tedy  $c = 0$ . Nyní  $T = \{1, 1, 1\}$  ať  $l$  nabývá jakékoli hodnoty. Všechny výroky v  $T$  jsou pravdivé pro

- a)  $v = 1, s = 1, c = 0, b = 0, l = 1$ ,
- b)  $v = 1, s = 1, c = 0, b = 0, l = 0$ .

*Závěr.* Učitel tělocviku bude vysoký a štíhlý, nebude černoooký, nebude nosit brýle, o barvě vlasů však nelze rozhodnout.

### Metodické poznámky

K vyřešení úlohy můžeme použít tabulkovou metodu, ta by ale měla v tomto případě  $2^5 = 32$  řádků.

**Zdroj:** úlohy 1 a 2 dílo autora, zadání úlohy 3 převzato z knihy

J. Šedivý, J. Lukátšová, O. Odvárko, M. Zöldy *Úlohy o výrociích a množinách*. SPN, Praha, 1972 (s. 34, př. 18).

**Obrazový materiál:**

**Autor:** RNDr. Miloslav Závodný; [mzavodny@gmail.com](mailto:mzavodny@gmail.com), [miloslav.zavodny@upol.cz](mailto:miloslav.zavodny@upol.cz)

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** úsudky, výroky, tabulky pravdivosti

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: výrok a jeho negace, skládání výroků, konjunkce a implikace, úsudky, tabulky pravdivosti

Je-li vůz zabrzděn, pak nejede. Vidím, že vůz jede. Z toho usuzuji, že není zabrzděn. Ověřte správnost tohoto úsudku.

### Řešení

Ověření správnosti úsudku provedeme jednak úvahou, jednak užitím tabulek pravdivosti. Označme výroky  $Z$  vůz je zabrzděn,  $J$  vůz jede.

- a) (úvahou) Podmínky úlohy lze zapsat ve tvaru  $(Z \Rightarrow \neg J) \wedge J$ . Uvažovanou implikaci lze vyjádřit v kontraponovaném tvaru  $(J \Rightarrow \neg Z)$ , a ježto podle zadání úlohy je předpoklad  $J$  pravdivý, je pravdivé i tvrzení  $\neg Z$ . Ověřovaný úsudek je tedy správný.
- b) (užitím tabulky pravdivosti) Zadaný úsudek říká

$$((Z \Rightarrow \neg J) \wedge J) \Rightarrow \neg Z.$$

Úsudek přepíšeme do tabulky. V prvních dvou sloupcích vypíšeme všechny možné kombinace hodnot pravdivosti výroků  $Z$  a  $J$ , na jejich základě doplníme sloupec 3., 5., 7. a 9., pomocí hodnot ve sloupci 3. a 5. doplníme sloupec 4., pomocí 4. a 7. sloupec 6. a nakonec pomocí 6. a 9. výsledný sloupec 8.

| $Z$        | $J$ | $((Z \Rightarrow \neg J) \wedge J) \Rightarrow \neg Z$ |   |   |          |   |          |   |
|------------|-----|--------------------------------------------------------|---|---|----------|---|----------|---|
| 1          | 1   | 1                                                      | 0 | 0 | <b>0</b> | 1 | <b>1</b> | 0 |
| 1          | 0   | 1                                                      | 1 | 1 | <b>0</b> | 0 | <b>1</b> | 0 |
| 0          | 1   | 0                                                      | 1 | 0 | <b>1</b> | 1 | <b>1</b> | 1 |
| 0          | 0   | 0                                                      | 1 | 1 | <b>0</b> | 0 | <b>1</b> | 1 |
| $\Uparrow$ |     |                                                        |   |   |          |   |          |   |

Vidíme, že ve výsledném 8. sloupci jsou samé jedničky a z toho plyne, že ověřovaný úsudek je správný.

### Metodické poznámky

Při doplňování tabulky se doporučuje graficky vždy sjednotit ty sloupce, z nichž se provádí další závěr. Zde byla použita kurziva a tučné písmo, výsledný sloupec lze orámovat nebo jinak vyznačit – zde je použita šipka.

## Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: výrok a jeho negace, skládání výroků, konjunkce a implikace, úsudky, tabulky pravdivosti

Neteče-li voda, pak lze provést opravu. Vidím, že voda teče. Z toho usuzuji, že nelze provést opravu. Ověřte správnost tohoto úsudku.

## Řešení

Ověření správnosti úsudku provedeme úvahou a užitím tabulek pravdivosti. Označme výroky  $T$  voda teče,  $O$  lze provést opravu.

- a) (úvahou) Podmínky úlohy lze zapsat ve tvaru  $(\neg T \Rightarrow O) \wedge T$ . Obecně: Je-li splněn předpoklad, pak je splněno i tvrzení, ale není-li předpoklad splněn, nevypovídá implikace o tvrzení nic, zde tedy, když voda teče, pak o možnosti opravy není v zadání řečeno nic, takže nevíme, zda lze nebo nelze opravu provést a nelze proto usuzovat, že opravu nelze provést.

*Závěr.* Úsudek je nesprávný.

- b) (užitím tabulky pravdivosti) Zadaný úsudek říká

$$((\neg T \Rightarrow O) \wedge T) \Rightarrow \neg O.$$

Úsudek přepíšeme do tabulky. V prvních dvou sloupcích vypíšeme všechny možné kombinace hodnot pravdivosti výroků  $T$  a  $O$ , na jejich základě doplníme sloupec 3., 5., 7. a 9., pomocí hodnot ve sloupci 3. a 5. doplníme sloupec 4., pomocí 4. a 7. sloupec 6. a nakonec pomocí 6. a 9. výsledný sloupec 8.

| $T$ | $O$ | $((\neg T \Rightarrow O) \wedge T) \Rightarrow \neg O$ |   |   |          |   |          |   |
|-----|-----|--------------------------------------------------------|---|---|----------|---|----------|---|
| 1   | 1   | 0                                                      | 1 | 1 | <b>1</b> | 1 | <b>0</b> | 0 |
| 1   | 0   | 0                                                      | 1 | 0 | <b>1</b> | 1 | <b>1</b> | 1 |
| 0   | 1   | 1                                                      | 1 | 1 | <b>0</b> | 0 | <b>1</b> | 0 |
| 0   | 0   | 1                                                      | 0 | 0 | <b>0</b> | 0 | <b>1</b> | 1 |
| ↑↑  |     |                                                        |   |   |          |   |          |   |

V případě, že úsudek je správný, jsou ve výsledném sloupci jen jedničky. Vidíme, že zde úsudek selhává právě v případě, kdy  $ph(T) = ph(O) = 1$ , tedy ověřovaný úsudek je nesprávný.

## Metodické poznámky

Při doplňování tabulky pravdivosti se doporučuje tentýž postup jako v úloze 1.

## Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: výrok a jeho negace, skládání výroků, konjunkce a implikace, úsudky, tabulky pravdivosti pro 3 výroky, pravidla de Morganova

Jak strávím dovolenou? Předně chci chodit na ryby, ale nemohu si dovolit jet do lázní i k moři; ovšem když nepojedu k moři, budu určitě chodit na ryby. Jsem tedy jednoznačně rozhodnut o průběhu své dovolené?

## Řešení

Provedeme je úvahou a užitím tabulek pravdivosti. Označme výroky  $R$  budu chodit na ryby,  $L$  pojedu do lázní,  $M$  pojedu k moři.

- a) (úvahou) Plán dovolené je konjunkcí tří výroků a lze jej zapsat takto

$$R \wedge \neg(L \wedge M) \wedge (\neg M \Rightarrow R).$$

Předně je zřejmé, že na ryby chodit budu. Podmínku  $\neg(L \wedge M)$  lze podle pravidel de Morganových zapsat jako  $(\neg L \vee \neg M)$ , tj. buď nepojedu do lázní nebo nepojedu k moři nebo ani tam ani tam. Třetí podmínka  $(\neg M \Rightarrow R)$  vlastně neříká nic nového, protože podle ní mohu chodit na ryby, ať pojedu k moři nebo ne.

*Závěr.* O průběhu své dovolené ještě nejsem jednoznačně rozhodnut, buď ji strávím jenom rybařením, nebo ještě k tomu zajedu do lázní (ale k moři pak už ne) nebo k rybaření přiberu cestu k moři (ale do lázní už nepojedu).

- b) (užitím tabulky pravdivosti) Vzhledem k tomu, že základní výroky jsou tři,  $R$ ,  $L$  a  $M$ , budeme mít celkem osm kombinací pravdivostních hodnot, tedy tabulka bude mít 8 řádků; do horního záhlaví přidáme symbol  $V$ , pod nějž zapíšeme výsledné hodnocení konjunkce všech dílčích podmínek. Pro přehlednost zápis rozvolníme

| $R$ | $L$ | $M$ | $R$      | $\wedge$ | $\neg$   | $(L \wedge M)$ | $\wedge$ | $(\neg M \Rightarrow R)$ | $V$      |
|-----|-----|-----|----------|----------|----------|----------------|----------|--------------------------|----------|
| 1   | 1   | 1   | <b>1</b> |          | <b>0</b> | 1              | 1        | 1                        | <b>0</b> |
| 1   | 1   | 0   | <b>1</b> |          | <b>1</b> | 1              | 0        | 1                        | <b>1</b> |
| 1   | 0   | 1   | <b>1</b> |          | <b>1</b> | 0              | 0        | 1                        | <b>1</b> |
| 1   | 0   | 0   | <b>1</b> |          | <b>1</b> | 0              | 0        | 1                        | <b>1</b> |
| 0   | 1   | 1   | <b>0</b> |          | <b>0</b> | 1              | 1        | 1                        | <b>0</b> |
| 0   | 1   | 0   | <b>0</b> |          | <b>1</b> | 1              | 0        | 0                        | <b>0</b> |
| 0   | 0   | 1   | <b>0</b> |          | <b>1</b> | 0              | 0        | 1                        | <b>0</b> |
| 0   | 0   | 0   | <b>0</b> |          | <b>1</b> | 0              | 0        | 0                        | <b>0</b> |

Řádek 2., 3. a 4. potvrzují výsledek z řešení úvahou.

## Metodické poznámky

Při vyplňování tabulky pravdivosti je třeba pozorně dbát na to, která výroky a za jakých podmínek k sobě skládáme. Doporučují se grafická odlišení jednotlivých kroků, případně i využití barev. Zde bylo pro složení závěrečné konjunkce využito tučné písmo.

## Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: výrok a jeho negace, skládání výroků, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence; úsudky, tabulky pravdivosti pro 3 výroky

Analyzujte následující úvahy o drobném dárku pro malého chlapce: Nechci mu dát současně autíčko a vláček, ani vláček právě když míč. Myslím, že mu dám autíčko nebo mu nedám míč. Ověřte, zda je těmito úvahami dárek už jednoznačně určen.

## Řešení

Provedeme je úvahou a užitím tabulek pravdivosti. Označme výroky  $A$  dám autíčko,  $M$  dám míč,  $V$  dám vláček.

a) (úvahou) Úvaha je konjunkcí tří podmínek:  $\neg(A \wedge V)$ ,  $\neg(V \Leftrightarrow M)$ ,  $(A \vee \neg M)$ . Budeme analyzovat splnění 1. podmínky:

- Nedám ani autíčko ani vláček. Z 2. podmínky plyne, že když nedám vláček, nemohu nedat míč, protože v tom případě by platilo  $V \Leftrightarrow M$  a to nemůže; dostane tedy míč. Ze třetí podmínky plyne, že když dostane míč, musí dostat také autíčko, což je spor s předpokladem, že mu nedám ani autíčko ani vláček.
- Předpokládejme, že dárkem bude autíčko a nikoli vláček. Z 2. podmínky plyne, že když vláček není dárkem, pak musí být dárkem míč, protože v opačném případě by platilo  $V \Leftrightarrow M$ , a to nemůže. Ve 3. podmínce je  $A$  pravdivé, takže i tato podmínka je splněna.

*Závěr.* Dárkem je *autíčko a míč*.

- Předpokládejme, že dárkem bude vláček a nikoli autíčko. Z 2. podmínky plyne, že když je dárkem vláček, nemůže být současně dárkem míč, protože by jinak platilo  $V \Leftrightarrow M$ , a to nemůže. Ve 3. podmínce je  $\neg M$  pravdivé, takže i tato podmínka je splněna.

*Závěr.* Dárkem je *vláček*.

*Závěr.* Úvahami předloženými v zadání *nebyl* dárek jednoznačně určen.

b) (užitím tabulky pravdivosti) Máme osm kombinací pravdivostních hodnot základních výroků  $A$ ,  $M$  a  $V$ , takže tabulka bude mít 9 řádků; do horního záhlaví zapíšeme konjunkci zadaných podmínek a přidáme symbol  $Z$ , pod nějž zapíšeme závěr – výsledné pravdivostní hodnoty.

| $A$ | $M$ | $V$ | $\neg (A \wedge V)$ | $\neg (V \Leftrightarrow M)$ | $(A \vee \neg M)$ | $Z$      |
|-----|-----|-----|---------------------|------------------------------|-------------------|----------|
| 1   | 1   | 1   | <b>0</b>            | <b>0</b>                     | <b>1</b>          | <b>0</b> |
| 1   | 1   | 0   | <b>1</b>            | <b>1</b>                     | <b>1</b>          | <b>1</b> |
| 1   | 0   | 1   | <b>0</b>            | <b>1</b>                     | <b>1</b>          | <b>0</b> |
| 1   | 0   | 0   | <b>1</b>            | <b>0</b>                     | <b>1</b>          | <b>0</b> |
| 0   | 1   | 1   | <b>1</b>            | <b>0</b>                     | <b>0</b>          | <b>0</b> |
| 0   | 1   | 0   | <b>1</b>            | <b>1</b>                     | <b>0</b>          | <b>0</b> |
| 0   | 0   | 1   | <b>1</b>            | <b>1</b>                     | <b>1</b>          | <b>1</b> |
| 0   | 0   | 0   | <b>1</b>            | <b>0</b>                     | <b>1</b>          | <b>0</b> |

Řádky 2 a 7 potvrzují závěry 1. řešení – jsou dvě možnosti: Buď je dárkem *autíčko a míč*, nebo je dárkem *vláček*.

## Metodické poznámky

Vidíme, že v této úloze je řešení tabulkou pravdivosti jednodušší než úsudkem.

**Zdroj:** archiv autora

**Obrazový materiál:**

**Autor:** doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; [stanislav.travnicek@volny.cz](mailto:stanislav.travnicek@volny.cz)

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí, pravdivostní hodnoty a negace výroku

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: racionální a iracionální číslo a jejich vlastnosti

Dokažte, že číslo  $\sqrt{5}$  je iracionální.

#### Řešení

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že číslo  $\sqrt{5}$  je racionální. Pak je lze vyjádřit ve tvaru zlomku  $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ , který je v základním tvaru, to znamená, že čísla  $p, q \in \mathbb{Z}$  jsou nesoudělná. Po umocnění je

$$5q^2 = p^2. \quad (1)$$

Odtud  $p^2$  je dělitelné 5 a protože 5 je prvočíslo je taky  $p$  dělitelné 5, či-li dá se zapsat ve tvaru  $p = 5k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Dosadíme-li za  $p$  do vztahu (1), dostaneme  $25k^2 = 5q^2$ . To znamená, že taky  $q$  je dělitelné 5. To je ale spor s předpokladem, že čísla  $p, q$  jsou nesoudělná. Tedy  $\sqrt{5}$  je číslem iracionálním.

### Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: prvočísla a čísla složená, negace výroku

Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

#### Řešení

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že prvočísel je konečný počet. Označme je  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . Označme

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

Číslo  $a$  nepatří do množiny všech prvočísel  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , protože je větší než kterékoliv z nich. Číslo  $a$  není ale ani složené, protože není dělitelné žádným z prvočísel  $p_1, p_2, \dots, p_k$  (po dělení čísla  $a$  kterýmkoliv z prvočísel dostaneme zbytek 1). Odtud plyne, že  $a = 1$ , to je ale spor s volbou čísla  $a$ . Tím je důkaz proveden.

#### Metodické poznámky

Je vhodné před samotným důkazem krátce zopakovat vědomosti o rozkladu čísla na součin prvočísel. Číslo 1 není prvočíslo ani složené číslo.

### Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: dělitelnost v oboru přirozených čísel, obor pravdivosti, kvantifikátory

Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  je číslo  $11^{n+1} + 12^{2n-1}$  dělitelné 133, tj. platí výrok  $V(n)$

$$133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1}).$$

### Řešení

Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce:

1. dokážeme, že vztah platí pro nejmenší číslo z množiny přirozených čísel  $n = 1$ , tedy  $11^2 + 12^1 = 133$  a  $133 \mid 133$ ;
2. dokažme implikaci

$$133 \mid (11^{k+1} + 12^{2k-1}) \Rightarrow 133 \mid (11^{(k+1)+1} + 12^{2(k+1)-1}),$$

kde  $k \in \mathbb{N}$  ( $V(k) \Rightarrow V(k+1)$  – indukční krok).

$$\begin{aligned} V(k+1): 11 \cdot 11^{k+1} + 12^2 \cdot 12^{2k-1} &= 11 \cdot 11^{k+1} + 144 \cdot 12^{2k-1} = \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 11 \cdot 12^{2k-1} + 133 \cdot 12^{2k-1} = \\ &= 11(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133 \cdot 12^{2k-1}. \end{aligned}$$

První sčítanec je dle „předpokladu“<sup>1)</sup> dělitelný 133 a druhý je násobkem 133.

3. Za současné platnosti bodu 1. a 2. můžeme tvrdit, že pro všechna přirozená čísla  $n$  platí  $133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1})$ . Tím je důkaz proveden.

### Metodické poznámky

Důkaz užitím principu matematické indukce je pro žáky poměrně složitý. Je tedy vhodné jej dobře vysvětlit, aby se ze samotného důkazu nestala jen „kuchařka“. Důkaz matematickou indukcí je založen na platnosti implikace (indukčního kroku)  $V_k \Rightarrow V_{k+1}$  a ověření pravdivosti výrazu pro libovolné  $k$  (Na střední škole se preferuje nejmenší hodnota  $k$ , ale je to jen z důvodu typů příkladů, které se zde objevují.). Pravdivostní hodnoty implikace jsou známy ze základů logiky:

| $V_k$ | $V_k$ | $V_k \Rightarrow V_{k+1}$ |
|-------|-------|---------------------------|
| 0     | 0     | 1                         |
| 0     | 1     | 1                         |
| 1     | 0     | 0                         |
| 1     | 1     | 1                         |

<sup>1)</sup> viz. metodické poznámky

### Metodické poznámky

Nejprve tedy dokážeme platnost výroku pro některé  $k$  (zpravidla nejmenší), pro přehlednost jej na obrázku označíme jako  $V_{k_1}$ . Jeho pravdivost značí plné kolečko. Nyní dokážeme implikaci. Z tabulky je vidět, že implikace je platná za všech podmínek kromě situace v třetím řádku. Ověříme, zda v našem případě právě tato situace nenastává, tedy  $ph(V_k) = 1$ , kde  $ph(A)$  značí pravdivostní hodnotu výroku  $A$ . Žáci většinou chybně uvádějí, že platí  $V(k)$ , ovšem z tabulky vyplývá, že implikace je pravdivá i když  $ph(V_k) = 0$ . Jinými slovy v tomto kroku je nám úplně jedno, zda je  $V_k$  pravdivé, či nikoli. Důležitá ovšem je pravdivost či nepravdivost  $V_{k+1}$  (až zde se můžeme opřít o indukční předpoklad pravdivosti  $V_k$ ). Pokud je  $V_{k+1}$  pravdivý, nenastane situace třetího řádku, tedy implikace bude za všech okolností pravdivá.



A nyní využijeme již dokázané pravdivosti  $V_{k_1}$ . Při důkazu pravdivosti implikace jsme brali  $k$  libovolné, proč by tedy nemohlo být rovno  $k_1$ . Vraťme se zpátky k tabulce pravdivostních hodnot implikace. Pokud tedy  $k = k_1$  a to je pravdivé, nemohou nastat situace v první a druhém řádku. Jediná možnost je tedy řádek čtvrtý – současně jsou pravdivé  $V_{k_1}$  a  $V_{k_2}$ . Pokud je ale pravdivý  $V_{k_2}$ , musí se současnou platností implikace být pravdivý i  $V_{k_3}$  atd.

Důkaz matematickou indukcí nám tedy zaručí pravdivost výroků  $V_{k_1}$  a všech následujících, proto se zdá být vhodné volit  $k = 1$ , ovšem v některých úlohách není možné provést ověření platnosti vztahu pro  $k = 1$  (např. u důkazu vztahu pro počet úhlopříček v konvexním  $n$ -úhelníku). Ověřujeme proto pro nejmenší „smysluplné“  $k$ . Také můžeme dokazovat tvrzení pro největší  $k$  a implikaci obrátit. Pokud máme dokázat pravdivost výroku například pro všechny  $k \in \mathbb{Z}$ , můžeme množinu celých čísel rozdělit na kladná a záporná a využít princip matematické indukce dvakrát.

### Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

### Obrazový materiál:

**Autor:** Mgr. Václav Vaněk; [vvanek1@seznam.cz](mailto:vvanek1@seznam.cz)

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** dělitelnost

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: dělitelnost celých čísel

Součin  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný číslem  $m$ . Ověřte tento výrok pro  $m = 3$ .

### Řešení

Sestavíme výraz tří po sobě jdoucích přirozených čísel  $V = m(m+1)(m+2)$ . Číslo  $m$  může při dělení třemi dávat zbytek 0, 1 nebo 2. V prvním případě je  $m = 3k$ , takže  $V = 3k(m+1)(m+2) = 3K$ ,  $V$  je dělitelné třemi,  $3 \mid V$ .

Pro  $m = 3k + 1$  je  $m + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ , takže  $V = 3m(m+1)(k+1) = 3L$ , takže  $3 \mid V$ .

Pro  $m = 3k + 2$  je  $m + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ , takže  $V = 3m(k+1)(m+2) = 3M$ , takže  $3 \mid V$ .

### Metodické poznámky

Žáci by si měli dokazovaný výrok věcně pamatovat a při řešení úloh na dělitelnost si jej uvědomovat.

### Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: dělitelnost, výrok o dělitelnosti součinu  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel

Je dán výraz  $V(n) = n^3 + 3n^2 + 2n$ . Užitím  $n = 1$  a  $n = 2$  vyslovte hypotézu, čím by mohl být výraz  $V(n)$  dělitelný pro všechna  $n$ , a svou hypotézu dokažte.

### Řešení

$$V(1) = 1 + 3 + 2 = 6,$$

$$V(2) = 8 + 12 + 4 = 24.$$

*Hypotéza.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný šesti pro všechna  $n$ .

*Důkaz.* Ve výrazu  $V(n)$  vytkneme  $n$ ,  $V(n) = n(n^2 + 3n + 2)$  a ověříme, zda lze uvedený kvadratický trojčlen rozložit.  $D = 9 - 8 = 1 > 0$ ,  $\sqrt{D} = 1$ , určíme kořeny,  $n_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$ . Náš kvadratický trojčlen lze zapsat jako  $(n+1)(n+2)$ , takže  $V(n) = n(n+1)(n+2)$ . Výraz je tedy dělitelný třemi a protože ve vyjádření  $V(n)$  je činitel  $n(n+1)$ , je výraz také dělitelný dvěma, je tedy dělitelný šesti, jak jsme měli dokázat.

*Závěr.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný šesti pro všechna  $n$ .

### Metodické poznámky

Uvedený typ úloh: *pokus – hypotéza – důkaz* lze považovat pro žáky za velmi potřebný a více úloh na dělitelnost lze na tento typ převést.

### Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: dělitelnost, výrok o dělitelnosti součinu  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel, rozklad polynomů

Je dán výraz  $V(n) = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ . Užitím konkrétních hodnot  $n$  vyslovte hypotézu, čím by mohl být výraz  $V(n)$  dělitelný pro všechna  $n$ , a svou hypotézu dokažte.

### Řešení

Zvolme  $n = 1$  a  $n = 2$ .  $V(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$ , zde nedostáváme údaj vhodný pro vyslovení hypotézy.  $V(2) = 16 + 16 - 4 - 4 = 24$ ; přiberme ještě  $n = 3$ .  $V(3) = 81 + 54 - 9 - 6 = 120$ .

*Hypotéza.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný číslem 24 pro všechna  $n$ .

*Důkaz.* Ve výrazu  $V(n)$  vytkneme  $n$ ,  $V(n) = n(n^3 + 2n^2 - n - 2)$  a chceme rozložit daný kubický mnohočlen. Víme, že případné celočíselné kořeny jsou dělitelem absolutního členu; tyto dělitele jsou 1; -1; 2; -2. Viděli jsme, že  $V(1) = 0$ , takže náš mnohočlen je dělitelný činitelem  $n - 1$ . Vydělením dostaneme

$$(n^3 + 2n^2 - n - 2) : (n - 1) = n^2 + 3n + 2.$$

Dále chceme rozložit trojčlen  $n^2 + 3n + 2$ ;  $D = 9 - 8 = 1$ ,  $\sqrt{D} = 1$ ,  $n_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$ . Daný výraz lze tedy zapsat ve tvaru  $V(n) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ , je to součin čtyř po sobě jdoucích celých (pro  $n > 1$  přirozených) čísel.

Mezi čtyřmi po sobě jdoucími přirozenými čísly jsou vždy dvě sudá, přičemž jedno z nich je dělitelné čtyřmi, takže  $V(n)$  je dělitelné osmi,  $8 \mid V(n)$ . Vyjádření  $V(n)$  obsahuje činitele  $n(n + 1)(n + 2)$ , takže  $3 \mid V(n)$ .

*Závěr.* Platí  $24 \mid V(n)$  pro všechna  $n$ , jak jsme chtěli dokázat.

### Metodické poznámky

Při hodnocení postupu by žáci měli přijít na to, že pro vyslovení hypotézy stačí najít nejmenší hodnotu  $V(n)$ . Ale bude to jen hypotéza.

### Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: dělitelnost, výrok o dělitelnosti součinu  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel, zbytkové třídy

Je dán výraz  $V(n) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ . Užitím konkrétních hodnot  $n$  vyslovte hypotézu, čím by mohl být výraz  $V(n)$  dělitelný pro všechna  $n$ , a svou hypotézu dokažte.

### Řešení

Vidíme, že  $V(1) = 0$ . Volme další  $n$ .  $V(2) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ ;  $V(3) = 3 \cdot 8 \cdot 10 = 240$ .

*Hypotéza.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný číslem 30 pro všechna  $n$ .

*Důkaz.*  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ; budeme dokazovat dělitelnost dvěma, třemi a pěti.  $V(n)$  můžeme upravit na tvar  $V(n) = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ ; vidíme, že v rozkladu výrazu  $V(n)$  je součin tří po sobě jdoucích čísel, takže dělitelnost třemi i dvěma je tím dokázána, a také  $6 \mid V(n)$ .

Nyní vyšetřujeme dělitelnost pěti. Výraz  $n^2+1$  můžeme upravit, aniž by se změnila jeho zbytková třída; provedeme úpravu  $n^2+1 \rightarrow n^2+5n+6$ , přidali jsme  $5n+5$ . Tím se výraz  $V(n)$  změní na  $V'(n)$ , přičemž  $5 \mid V(n) \Leftrightarrow 5 \mid V'(n)$ .

$$5 \mid (n-1)n(n+1)(n^2+1) \Leftrightarrow 5 \mid (n-1)n(n+1)(n^2+5n+6),$$

Výraz  $n^2+5n+6$  už rozložit lze.  $D = 25 - 24 = 1$ ,  $n_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$ , takže  $n^2+5n+6 = (n+2)(n+3)$ . Platí tak  $5 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$ , neboť součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný pěti, což znamená

$$5 \mid V'(n) \Rightarrow 5 \mid V(n).$$

Dokázali jsme, že  $6 \mid V(n)$  a také  $5 \mid V(n)$ .

*Závěr.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný číslem 30 pro všechna  $n$ .

### Metodické poznámky

Klíčem je výraz  $n^2+1$  a jeho taková úprava s ohledem na dělitelnost pěti, aby upravený výraz byl rozložitelný (přičítání nebo odčítání vhodných násobků pěti. Použitá úprava je v jistém smyslu optimální, ale nikoli jediné možná. Stejně výhodné jsou např. úpravy  $n^2+1 \rightarrow n^2-4$  (prosté odečtení čísla 5) nebo  $n^2+1 \rightarrow n^2-5n+6$ .

### Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: dělitelnost, výrok o dělitelnosti součinu  $m$  po sobě jdoucích přirozených čísel, rozklad polynomů, vlastnosti posloupnosti přirozených čísel, největší společný dělitel.

Je dán výraz  $V(n) = n(n+2)(n+3)(n+5)(n+7)$ . Užitím konkrétních hodnot  $n$  vyslovte hypotézu, čím by mohl být výraz  $V(n)$  dělitelný pro všechna  $n$ , a svou hypotézu dokažte.

### Řešení

Zvolme  $n = 1$  a  $n = 2$ .

$$V(1) = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 576 = 2^6 \cdot 3^2;$$

$$V(2) = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

*Hypotéza.* Výraz  $V(n)$  je dělitelný číslem  $2^3 \cdot 3^2 = 72$  pro všechna  $n$ .

*Důkaz.*

- a) Dělitelnost osmi. Je-li  $n$  číslo sudé, pak  $n, n+2$  jsou po sobě jdoucí sudá čísla, z nichž jedno je dělitelné čtyřmi, takže  $8 \mid V(n)$ . Je-li  $n$  číslo liché, pak čísla  $n+3, n+5$  jsou po sobě jdoucí sudá čísla, z nichž jedno je dělitelné čtyřmi, takže i v tomto případě  $8 \mid V(n)$ .
- b) Dělitelnost devíti. Je-li  $n$  dělitelné třemi, je také  $n+3$  dělitelné třemi, takže  $9 \mid V(n)$ ; jestliže  $n$  dává při dělení třemi zbytek 1,  $n = 3k+1$ , pak  $n+2 = 3k+1+2 = 3(k+1)$  je dělitelné třemi a  $n+5 = 3k+1+5 = 3(k+2)$  je také dělitelné třemi, takže  $9 \mid V(n)$ ; jestliže  $n$  dává při dělení třemi zbytek 2,  $n = 3k+2$ , pak  $n+7 = 3k+2+7 = 3(k+3)$  je dělitelné třemi, ale  $n, n+2, n+3$  i  $n+5$  dávají při dělení třemi zbytek 1 nebo 2.

*Důsledek.* Vyslovená hypotéza není pravdivá, lze dokázat jen dělitelnost třemi, nikoli devíti.

Ověřme tento důsledek na příkladu  $n = 5$ . Pak  $V(5) = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$  a skutečně je sice dělitelné třemi, ale není dělitelné devíti.

*Závěr.* Platí  $24 \mid V(n)$  pro všechna  $n$ .

### **Metodické poznámky**

Tato úloha je vhodnou ukázkou toho, že naše hypotéza není automaticky pravdivá, že je ji třeba dokázat.

**Zdroj:** archiv autora

**Obrazový materiál:**

**Autor:** doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; `stanislav.travnicek@volny.cz`

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Číslo a proměnná

**Klíčové pojmy:** dělitel, dělitelnost v oboru přirozených čísel

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vlastnosti přirozených čísel, kriteria dělitelnosti, rozklad mnohočlenů

Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  platí, že  $(n^2 - 1)(n^2 + 2n)$  je dělitelné 24.

### Řešení

Rozložme výraz

$$(n^2 - 1)(n^2 + 2n) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

Jde o čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla, pro která současně platí:

1. aspoň jedno je dělitelné 3,
2. dvě jsou sudá a dvě lichá,
3. ze dvou po sobě jdoucích sudých čísel je jedno dělitelné čtyřmi a druhé dvěma.

Číslo  $(n^2 - 1)(n^2 + 2n)$  je tedy dělitelné 3 a 8 a protože  $D(3; 8) = 1$  je důkaz proveden.

### Metodické poznámky

Kromě vlastního řešení si žáci zopakují, jak se z obecného zápisu čísla odvodí konkrétní vlastnosti.

### Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: dělitelnost, úpravy lomených algebraických výrazů

Najděte všechna přirozená čísla  $n$ , pro něž je číslo  $n^3 + 3$  dělitelné číslem  $n + 3$ .

### Řešení

Upravme zlomek

$$\begin{aligned}\frac{n^3 + 3}{n + 3} &= \frac{(n + 3)^3 - 9n^2 - 27n - 24}{n + 3} = \frac{(n + 3)^3 - 9n(n + 3) - 24}{n + 3} = \\ &= (n + 3)^2 - 9n - \frac{24}{n + 3}.\end{aligned}$$

Z rozkladu je zřejmé, že  $(n + 3) \mid 24$  a proto  $n \in \{1, 3, 5, 9, 21\}$ .

### Metodické poznámky

Úlohu lze řešit též dělením polynomů a diskutovat hodnotu zbytku.

### Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení nerovnice a soustavy rovnic v oboru přirozených čísel, dělitelnost

Najděte nejmenší čtyřmístné přirozené číslo, které je součtem některých pěti a zároveň jiných šesti po sobě jdoucích přirozených čísel.

### Řešení

Označme hledané číslo  $x$ . Součet prvních pěti přirozených čísel je 15, takže součet libovolných pěti po sobě jdoucích přirozených čísel lze psát ve tvaru

$$S_5 = 15 + 5r, r \in \mathbb{N}.$$

Analogicky pro šest po sobě jdoucích přirozených čísel je

$$S_6 = 21 + 6s, s \in \mathbb{N}.$$

Má platit  $15 + 5r = 21 + 6s$ . Položme  $r = 6t$ , potom  $s = 5t - 1, t \in \mathbb{N}$ . Pro hledané číslo  $x$  platí

$$x = 21 + 6s = 15 + 30t,$$

číslo  $s$  je čtyřmístné, proto  $15 + 30t > 1000$ . Nejmenší  $t$ , pro které je nerovnice splněna je  $t = 33$ , odtud

$$x = 15 + 30 \cdot 33 = 1005.$$

### Metodické poznámky

Řešení diofantických rovnic není v RPG G. Uvedené řešení však nevyžaduje znalost algoritmu řešení lineárních diofantických rovnic, pouze snadnou úpravu a úvahu o hodnotě parametru  $t$ .

*Další úlohy.*

- Pro která  $n \in \mathbb{N}$ , není zlomek  $\frac{2n^2 - 1}{2n + 1}$  v základním tvaru?  
[Pro žádné přirozené číslo  $n$ ]
- Najděte všechna přirozená čísla dělitelná 4, jejichž ciferný součet je 7 a ciferný součin 6.  
[16, 1132, 1312, 3112]
- Eva koupila za 300 Kč čokolády po 17 Kč/ks a 18 Kč/ks. Kolik kterých koupila?  
[6 čokolád po 17 Kč a 11 čokolád po 18 Kč]
- Číslo  $20193^9 + 3027^9$  je dělitelné číslem 540. Dokažte.  
[Návod: pro lichá  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - \dots + b^{n-1})$ ]

### Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

### Obrazový materiál:

**Autor:** Mgr. Václav Vaněk; [vvanek1@seznam.cz](mailto:vvanek1@seznam.cz)

## Gradované úlohy

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** přímý a nepřímý důkaz, implikace, obměna, pravdivostní hodnoty složených výroků

### Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: monotonie funkce, řešení nerovnic

Dokažte, že funkce  $f: y = -2x^2$  je na intervalu  $(-\infty; 0)$  rostoucí.

### Řešení

Máme dokázat

$$\forall x \in (-\infty; 0): x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1^2 < -2x_2^2.$$

Implikaci dokážeme přímo. Nechť platí:  $x_1 < x_2 < 0$ , potom  $|x_1| > |x_2| > 0$  a zároveň  $|x_1^2| > |x_2^2|$ . Protože pro všechna reálná  $x$  platí  $x^2 \geq 0$ , je  $x_1^2 > x_2^2$  a proto  $-2x_1^2 < -2x_2^2$ . Tím je důkaz proveden.

### Metodické poznámky

Je vhodné podrobně diskutovat provedené obraty s absolutní hodnotou.

### Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: logaritmus, vlastnosti logaritmů

Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla  $a > 1$ ,  $b > 1$  platí  $\log_a b + \log_b a \geq 2$ .

### Řešení

Pro výše uvedená  $a, b$  jsou jejich logaritmy kladná čísla. Z vlastností logaritmů víme, že

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1 \quad (1)$$

Vyjádříme jeden z činitelů z (1) a dosadíme do dokazovaného vztahu

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \geq 2.$$

Po vynásobení nerovnice kladným číslem  $\log_a b$  a elementárních úpravách obdržíme vztah  $(\log_a b - 1)^2 \geq 0$ , který je identitou. Tím je důkaz proveden.

### Metodické poznámky

Je vhodné před samotným důkazem krátce zopakovat vědomosti o logaritmické funkci, zejména definiční obor, podmínky pro základ logaritmu a její monotonii.

### Úloha 3 (úroveň 2-3)

Předpokládané znalosti: pravdivostní hodnoty implikace a její obměny

Dokažte následující tvrzení: „Nelze-li sestrojit pravítkem a kružítkem úhel  $1^\circ$ , nelze sestrojit ani úhel o velikosti  $19^\circ$ .“

### Řešení

Tvrzení dokážeme nepřímou, místo implikace  $A \Rightarrow B$  dokážeme její obměnu  $B' \Rightarrow A'$ , která má stejné pravdivostní hodnoty:

„Je-li možné sestrojit úhel  $19^\circ$ , pak lze sestrojit i úhel  $1^\circ$ .“

Vyjdeme z předpokladu, že lze sestrojit úhel  $19^\circ$ , pak lze sestrojit i úhel  $19 \cdot 19^\circ = 361^\circ$ , a tedy i úhel o velikosti  $1^\circ$ . Tím je důkaz proveden.

### Metodické poznámky

V některých důkazových úlohách, zejména v těch, ve kterých se objeví kvantifikátor, je třeba správně provést negaci výroků.

### Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

**Obrazový materiál:** dílo autora upravil Pavel Calábek

**Autor:** Mgr. Václav Vaněk; [vvanek1@seznam.cz](mailto:vvanek1@seznam.cz)