

Tlumené kmitání tělesa zavěšeného na pružině

Kmitavé pohyby jsou důležité pro celou fyziku a její aplikace, protože umožňují relativně jednoduše modelovat řadu fyzikálních dějů a jevů. V praxi ale na pohybující se tělesa působí odporové síly, a proto je každý kmitavý pohyb tlumený. Tyto jevy přitom zná každý z praxe (kyvadlo hodin se bez dodávání energie brzo zastaví, houpačka s malým dítětem se zastaví, nebudeme-li jí v pravidelných časových intervalech postrkávat, kmitání tlumičů u auta se velmi rychle zastaví, ...). Demonstrovat tlumený kmitavý pohyb je přitom jednoduché.

Provedení experimentu

Pro demonstraci tlumeného kmitání využijeme datalogger a čidlo polohy od firmy Vernier. Ta je jednou z několika firem nabízející podobná zařízení, která jsou do výuky fyziky velmi užitečná. Práce s nimi je velmi jednoduchá a základy ovládání dataloggeru zvládne učitel i žák během několika minut. Vzhledem k tomu, že v současné době je již většina učeben (zejména fyzikálních učeben) na školách vybavena dataprojektorem, mohou žáci sledovat současně probíhající reálný experiment i sběr dat a vykreslování zvolených fyzikálních závislostí. A to je pro správné pochopení studovaných fyzikálních dějů a jevů velmi důležité.

K vlastnímu experimentu budeme tedy potřebovat datalogger LabQuest firmy Vernier, čidlo polohy od téže firmy, pružinu, těleso vhodné hmotnosti, které na této pružině bude kmitat (závaží ze sady závaží k vahám, hrneček, mobilní telefon, ...), papír (postačí formát A5) a kousek plastelíny (viz obr. 1).



obr. 1

Těleso, které budeme chtít později zavěsit na pružinu, je nutné volit tak, aby na pružině dobře kmitalo a aby mělo jasně definovanou dolní stěnu (resp. okraj). Čidlo polohy, kterým budeme měřit okamžitou výchylku tohoto tělesa, vysílá ultrazvukový signál, který se od tělesa odráží, a čidlo tento odražený signál opět detekuje. V případě, že těleso nebude mít jasně

ohraničenou dolní stěnu, ultrazvukový signál se na tělese rozptýlí a čidlo bude detekovat jeho odraz od jiných těles, čímž vzniknou výrazné chyby v měření.

Zvolené těleso zavěsíme na pružinu, přesně pod těleso do vzdálenosti přibližně 0,5 m umístíme čidlo polohy a připojíme jej k LabQuestu (viz obr. 2). Před vlastním experimentem je vhodné si zkusit rozkmitání tohoto tělesa tak, abychom docílili jeho kmitání ve svislém směru. Kmity do stran by negativně ovlivnili měření. Na LabQuestu nastavíme režim měření *Časová základna* (pro čidlo polohy je tento režim přednastaven), vzorkovací frekvenci ponecháme na 20 Hz a dobu měření nastavíme na 30 s. Tato doba je dostatečná na to, aby se projevila odporová síla působící během pohybu na těleso.



obr. 2

Rozkmitáme ve svislém směru těleso a spustíme měření. Během měření zajistíme klid v okolí prováděného experimentu, aby nebyla měřená data ovlivněná okolními pohyby (chůze, proudění vzduchu, ...). Po skončení měření naměřená data importujeme do programu LoggerPro k dalšímu zpracování. Volně dostupná verze LoggerLite v tomto případě není vhodná, protože v ní není možné nadefinovat předpis (2) aproximační funkce, která odpovídá naměřeným datům.

Okamžitou výchylku tlumeného kmitání v závislosti na čase lze teoreticky popsat pomocí rovnice ve tvaru

$$y = y_m e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

kde y_m je počáteční amplituda kmitání, ω je úhlová frekvence kmitání, φ_0 je počáteční fáze kmitání a b je součinitel útlumu. Tento součinitel charakterizuje velikost odporové síly. (Rovnici (1) lze se žáky resp. studenty technicky zaměřených škol případně i odvodit.)

K analýze naměřených dat v programu LoggerPro zobrazíme graf závislosti okamžité výchylky na čase a z menu zvolíme funkci *Analýza - Proložit křivku*. V zobrazeném dialogovém okně je možnost výběru z řady předdefinovaných předpisů funkcí, kterými můžeme aproximovat naměřená data. Předpis odpovídající rovnici (1) mezi nimi ale není. Proto stiskem tlačítka *Define Function* zobrazíme další okno, do nějž zapíšeme předpis funkce ve tvaru

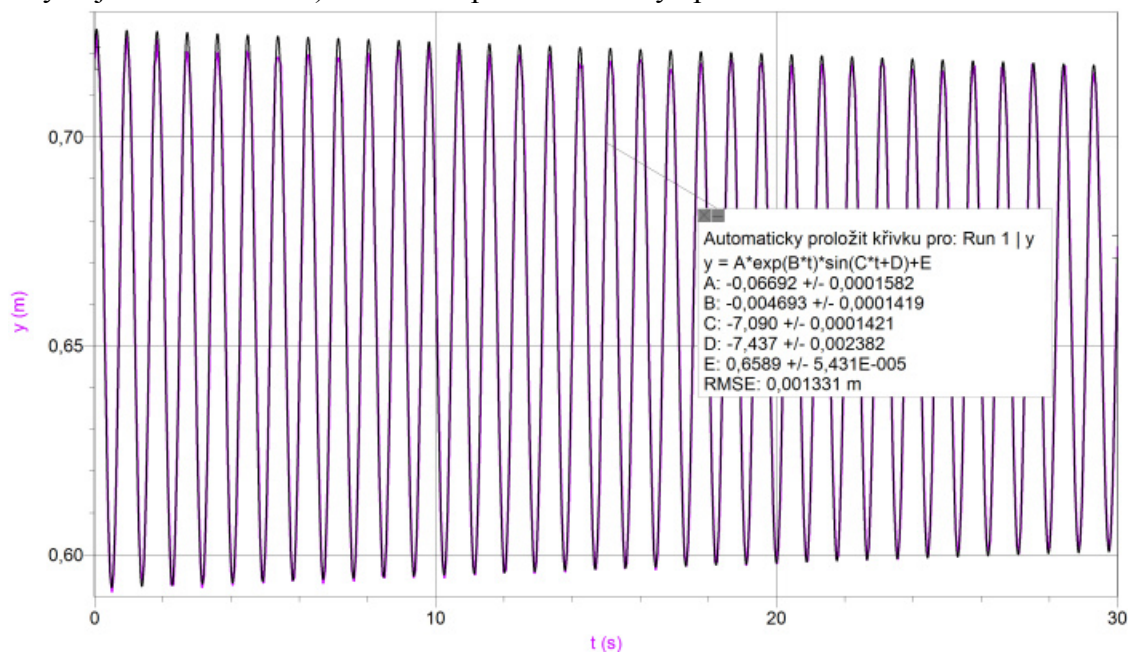
$$y = A * \exp(B * t) * \sin(C * t + D) + E, \quad (2)$$

který odpovídá rovnici (1). V předpisu (2) je oproti rovnici (1) navíc člen E , který v tomto případě představuje vzdálenost čidla polohy od rovnovážné polohy tělesa na ní zavěšeného.

Při definici předpisu funkce je výhodnější volit argument exponenciální funkce kladný (v rovnici (1) je záporný); na výsledný tvar aproximační funkce tato volba nemá vliv - program LoggerPro vypočítá koeficient B jako záporný.

Potvrdíme nově zadanou funkci (můžeme jí přiřadit též vlastní název) a tlačítkem *OK* spustíme výpočet koeficientů A , B , C , D a E předpisu (2).

Graf závislosti okamžité výchylky na čase popsaného kmitavého pohybu je zobrazen spolu s grafem aproximační funkce a jejími koeficienty na obr. 3. Na první pohled je zřejmé, že amplituda výchylky postupně klesá. Je zřejmé, že i přes drobné nepřesnosti měření jsou naměřená data plně v souladu s předpisem funkce (2) a jejími nalezenými koeficienty. O tom svědčí i velmi malá hodnota RMSE (*root mean square error* - chyba aproximace při použití metody nejmenších čtverců) zobrazená pod koeficienty aproximační funkce.



obr. 3

Před dalším měřením vystříhneme z papíru dva kruhy (viz obr. 1). Jeden o poloměru rovném $\sqrt{2} \approx 1,4$ násobku poloměru podstavu použitého tělesa, druhý o poloměru rovném dvojnásobku poloměru podstavu tohoto tělesa. Připevníme-li tyto kruhy pomocí plastelíny postupně na spodní podstavu tělesa, získáme těleso s dvojnásobným resp. čtyřnásobným příčným průřezem ve srovnání s původním tělesem. Tento přídatný brzdící profil se projeví ve velikosti odporové síly působící na pohybující se těleso.

V případě, že použijeme jiné těleso než závaží, bude výroba popsanych brzdících profilů komplikovanější, ale zvládnutelná.

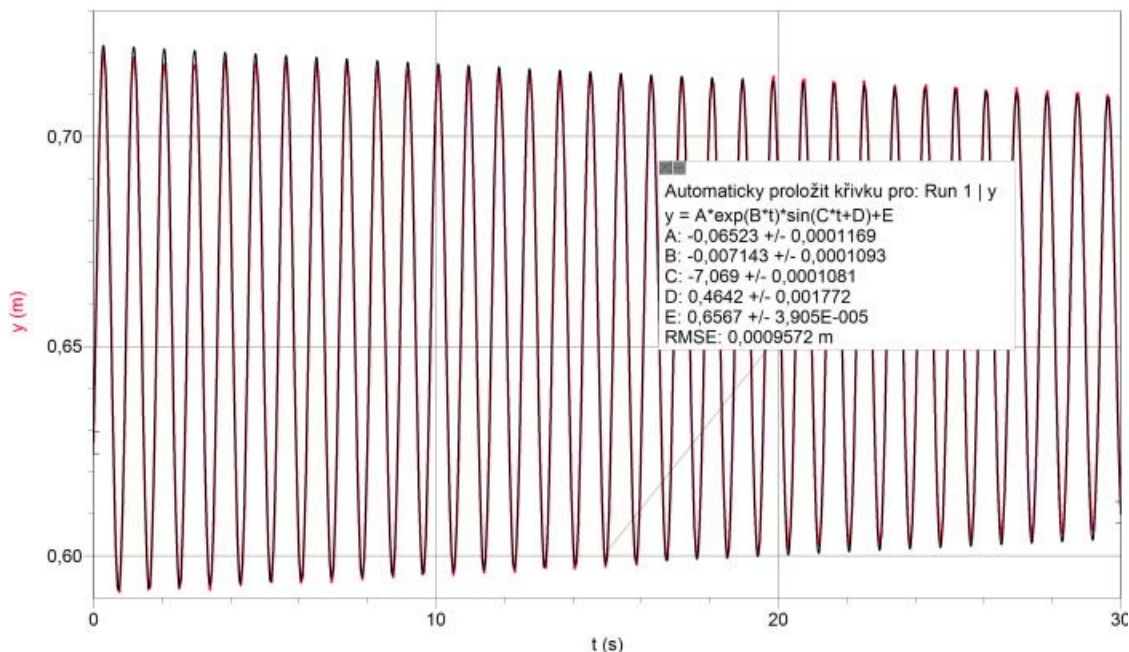
Stejným způsobem jako u prvního měření nastavíme parametry měření na LabQuestu, rozkmitáme těleso s menším brzdícím profilem a spustíme měření. Naměřená data importujeme do programu LoggerPro a proložíme jimi graf aproximační funkce dané předpisem (2). Graf závislosti okamžité výchylky na čase je spolu s grafem aproximační funkce a jejími koeficienty zobrazen na obr. 4.

Vzájemným porovnáním koeficientů B na obr. 3 a obr. 4 zjistíme, že koeficient B na obr. 4 je větší (a téměř dvojnásobný) ve srovnání s koeficientem na obr. 3. Tento koeficient představuje součinitel útlumu, který je závislý (kromě jiných parametrů) na příčném průřezu pohybujícího se tělesa.

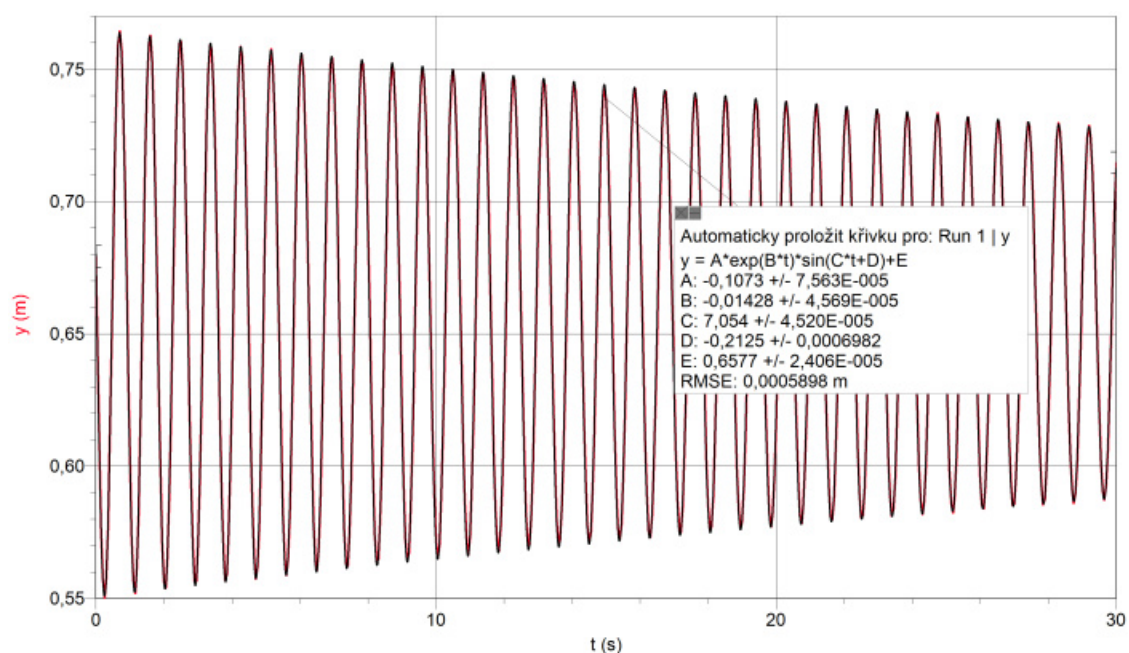
Analogickým způsobem provedeme měření s tělesem s větším brzdícím profilem. Graf závislosti okamžité výchylky na čase spolu s grafem aproximační funkce a jejími koeficienty je zobrazen na obr. 5. Koeficient B zobrazený na obr. 5 je dvojnásobný ve srovnání

s koeficientem B na obr. 4; obsah příčného řezu tělesa se totiž oproti předcházejícímu experimentu zdvojnásobil.

Srovnáme-li pouhým pohledem grafy zobrazené na obr. 3, obr. 4 a obr. 5, zjistíme, že útlum narůstá, tj. amplituda kmitání se zvětšuje více. A to je plně v souladu s předpokladem, že velikost odporové síly působící na pohybující těleso závisí přímo úměrně na příčném průřezu tohoto tělesa.



obr. 4

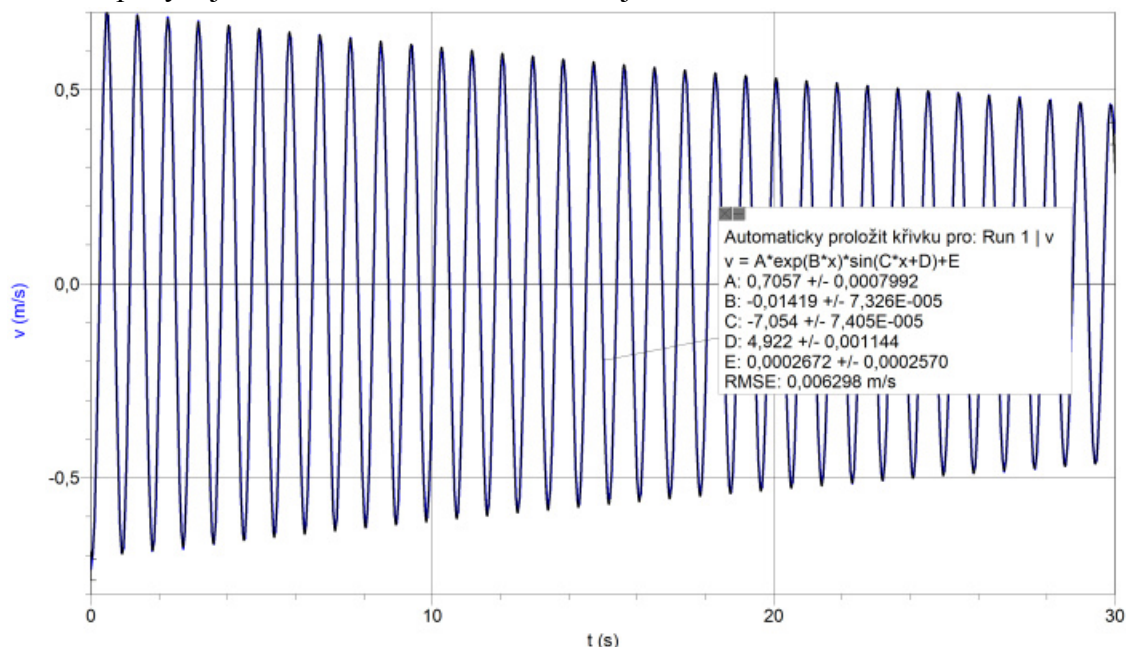


obr. 5

Čidlo polohy určuje na základě numerických metod pomocí naměřených hodnot okamžité výchylky i velikost okamžité rychlosti a velikost okamžitého zrychlení. Vypočtené hodnoty těchto dvou fyzikálních veličin jsou sice zatíženy chybou, která vyplývá z použité numerické metody, přesto jsou pro další fyzikální rozbor použitelné.

Na obr. 6 je zobrazen graf závislosti velikosti okamžité rychlosti kmitajícího tělesa na čase spolu s grafem aproximační funkce a jejími koeficienty. Graf odpovídá pohybu, jehož

závislost okamžité výchylky na čase je zobrazena na obr. 5. Aproximační funkce je i v tomto případě popsána předpisem (2), pouze koeficienty A a E mají jiný fyzikální význam; v tomto případě mají význam velikosti rychlosti. Rovnice popisující závislost okamžité výchylky na čase a rovnice popisující závislost velikosti okamžité rychlosti na čase, jejichž koeficienty jsou zobrazené na obr. 5 a obr. 6, spolu dobře korespondují - to je patrné z hodnot koeficientů B a C , které jsou téměř stejné. Koeficient B přitom odpovídá tlumení danému odporovou silou působící na pohybující se těleso a koeficient C určuje úhlovou frekvenci kmitání.



obr. 6

Závěr

Právě popsáný experiment je svým provedením jednoduchý a přitom lze na základě jeho fyzikálního rozboru pochopit pojem tlumené kmitání a spojit si tento pojem s reálným dějem. Další modifikace experimentu by mohla spočívat v rozkmitávání tělesa zavěšeného na pružině různě velkou rychlostí, aby se projevila závislost odporové síly (a tedy i rychlosti útlumu pohybu) na velikosti rychlosti pohybu. Technicky náročnější by bylo proměřit výše uvedené závislosti tlumeného kmitání při ponoření pružiny se zavěšeným tělesem např. do vody, abychom ukázali závislost velikosti odporové síly na hustotě okolního prostředí.