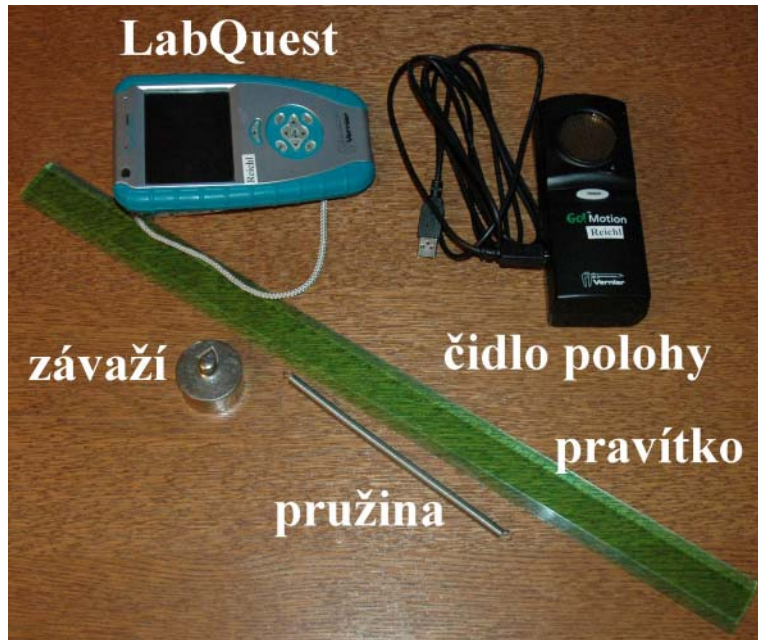


Netlumené kmitání tělesa zavěšeného na pružině

Kmitavý pohyb patří k relativně jednoduchým pohybům, které lze analyzovat s použitím jednoduchých fyzikálních zákonů a matematických vztahů. Zároveň je tento typ pohybu pro řadu nejen fyzikálních aplikací důležitý, neboť pomocí něj lze modelovat řadu fyzikálních dějů a jevů a přiblížit tak tyto jevy pomocí analogií s mechanickým kmitáním (skládání kmitavých pohybů, šíření mechanického vlnění, šíření zvuku v různých látkách, obvody střídavého proudu, elektromagnetické kmitání, ...). A řada z těchto fyzikálních jevů má velmi důležité aplikace (např. osciloskopy používané v řadě odborných předmětů i v technických aplikacích, vysílače a přijímače, ...). Proto je nutné, aby žáci pochopili základní charakteristiky kmitavého pohybu a vzájemné souvislosti veličin, které tento typ pohybu popisují.

Provedení experimentu

Kmitavý pohyb, ač je popsán relativně jednoduchými fyzikálními zákony a matematickými vztahy, nebývá u žáků příliš oblíben. Je to patrně proto, že při popisu kmitavého pohybu se žáci poprvé setkávají s periodickým pohybem, jehož fyzikální charakteristiky jsou popsány pomocí periodických goniometrických funkcí. Při jeho analýze tak žáci musejí místo jednoduchých lineárních nebo kvadratických rovnic řešit pro ně na první pohled komplikovanější goniometrické rovnice. Přesto je ale nutné žáky motivovat ke studiu tohoto typu pohybu, neboť je velmi důležitý pro další části fyziky, ale i pro řadu odborných předmětů (elektrotechnika, zvuková technika, ...).



obr. 1

Základní fyzikální charakteristiky tohoto pohybu a jejich vzájemné souvislosti lze přitom proměřit jednoduchým experimentem, ke kterému budeme potřebovat datalogger LabQuest od firmy Vernier, čidlo polohy od téže firmy, pružinu, závaží (nebo jiné těleso vhodné hmotnosti, které bude na pružině kmitat) a pravítko (viz obr. 1). Místo samostatné pružiny a tělesa, které na ní budeme zavěšovat, lze též použít v maloobchodní síti prodávané

dětské hračky: hračka samotná má takovou hmotnost, že velmi pěkně kmitá na příslušné pružině.

Použití právě těchto pomůcek může zvýšit motivaci žáků při práci s nimi a následně i při dalším studiu zkoumaných fyzikálních jevů. Čidla firmy Vernier by mohla žáky zaujmout proto, že oni sami rádi používají digitální zařízení (mobilní telefony, přehrávače hudby, ...), a tedy práce s tímto systémem pro ně bude jednoduchá. Místo výše popsání závaží (které ve školních kabinetech fyziky jistě je) můžeme použít běžné předměty podobné hmotnosti (hrneček, míček, mobilní telefon, ...). Je pouze důležité, aby bylo možné tento předmět zavěsit na pružinu a aby měl jasně ohraničené stěny. Při použití čidla polohy je totiž nutné, aby se ultrazvukový signál šířící se z čidla mohl odrazit od jasně definované plochy a nerozptyloval se. Tyto běžné předměty mohou žákům fyziku více přiblížit a udělat jí více „praktickou“.

Pružinu zavěsíme na stojan, na pružinu zavěsíme závaží (nebo jiný předmět) a přesně pod něj na vodorovnou podložku ve vzdálenosti přibližně 0,5 m umístíme čidlo polohy (viz obr. 2). Pro správné a přesné měření je nutné, aby závaží bylo nad středem vysílače čidla polohy. Čidlo polohy připojíme k LabQuestu, nastavíme vzorkovací frekvenci na 20 Hz a čas měření na 5 s.



obr. 2

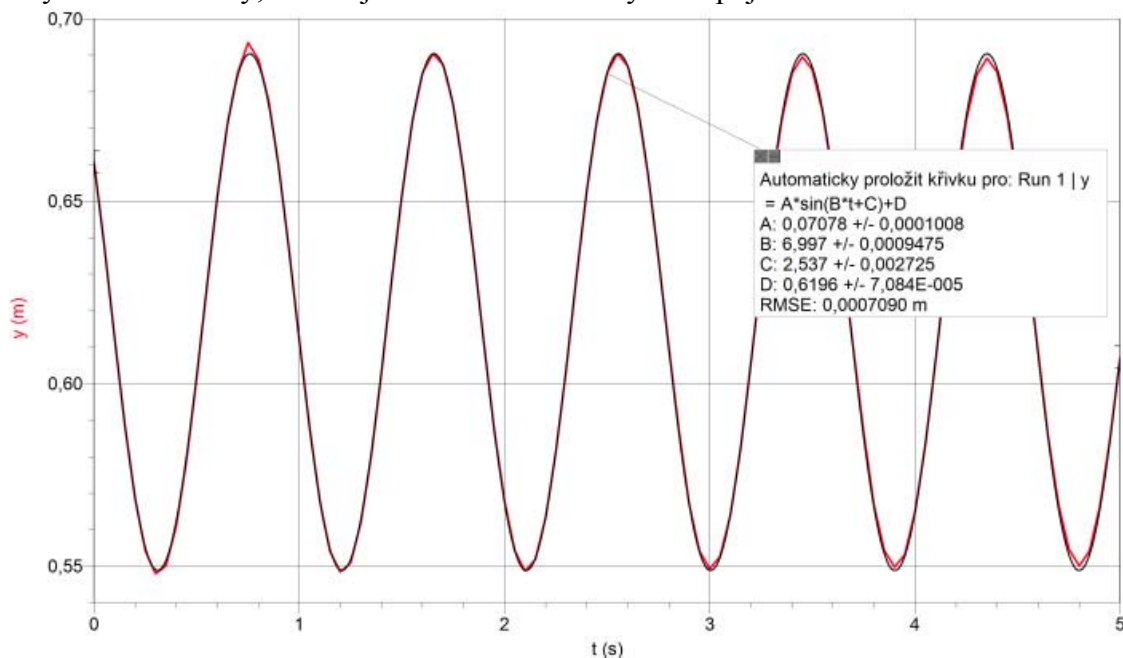
Je vhodné před samotným provedením experimentu natrénovat rozkmitání tělesa zavěšeného na pružině ve svislém směru. Aby čidlo polohy detekovalo požadované vzdálenosti, je nutné, aby těleso kmitalo ve svislém směru. Jakmile bude těleso kmitat ve svislém směru, spustíme na LabQuestu měření.

Zpracování dat a řešení úloh

Po skončení měření naměřená data importujeme do programu LoggerPro (nebo volně šiřitelné verze LoggerLite), abychom je mohli dále analyzovat. Detailně rozebereme nejdříve graf závislosti okamžité výchylky kmitajícího tělesa na čase. Ten je spolu s aproximační funkcí a její rovnicí zobrazen na obr. 1. V menu programu jsme zvolili *Analýza - Proložit křivku* a v zobrazené nabídce funkcí vybrali funkci definovanou předpisem

$$y = A \sin(Bx + C) + D. \quad (1)$$

Všechny předpisy funkcí, kterými můžeme proložit naměřená data, jsou definovány v závislosti na proměnné x , ačkoliv v našem případě vyšetřujeme závislost na čase. Právě proto, že lze vyšetřovat závislosti různých fyzikálních veličin na jiných fyzikálních veličinách, je v předpisech funkcí použita neutrální proměnná x . Program LoggerPro na základě vestavěné metody pak určil hodnoty koeficientů vystupujících ve vztahu (1) tak, jak jsou zobrazeny na obr. 1. Tyto hodnoty jsou uvedeny v nenásobných a nedílčích jednotkách dané fyzikální veličiny, kterou jednotlivé koeficienty zastupují.



obr. 3

Nyní můžeme vyzvat žáky, aby provedli další analýzu proměřeného děje a určili:

1. amplitudu výchylky;
2. frekvenci kmitání tělesa na pružině;
3. počáteční fázi kmitání;
4. čas, ve kterém oscilátor poprvé projde rovnovážnou polohou;
5. tuhost použité pružiny.

Vztah (1) připomíná vztah pro okamžitou výchylku y harmonického oscilátoru v závislosti na čase, který se žákům odvozuje (resp. ukazuje) ve tvaru

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

kde φ_0 je počáteční fáze kmitání a ω je úhlová frekvence kmitavého pohybu definovaná vztahem

$$\omega = 2\pi f. \quad (3)$$

Ve vztahu (3) f značí frekvenci daného kmitavého pohybu.

Je nutné upozornit na drobné zanedbání, kterého se dále dopustíme, ale které nebude mít podstatný vliv na dále počítané charakteristiky pohybu. Kmitání probíhalo ve vzduchu, a proto na pohybující se těleso působila kromě jiných sil (viz dále) i odporová síla vzduchu. Vzhledem ke krátké době měření (5 s) se tato síla příliš neprojevila a můžeme její působení na oscilátor tedy zanedbat. To lze vysledovat i na grafu závislosti okamžité výchylky na čase zobrazeném na obr. 1: amplituda výchylky je během celého měření téměř konstantní. Proto dále budeme předpokládat, že naměřená data popisují pohyb netlumeného harmonického oscilátoru.

Porovnáním vztahů (1) a (3) zjistíme, že v každém z nich jsou použity jiné proměnné, ale principiálně jsou stejné; pouze ve vztahu (1) je navíc člen D . Význam tohoto členu by měli

žáci snadno vysvětlit: je to vzdálenost rovnovážné polohy kmitajícího tělesa od čidla polohy. Pomocí pravítka (nebo jiného délkového měřidla) je velmi snadné ověřit, že hodnota koeficientu D odpovídá skutečnosti. Význam ostatních koeficientů je již zřejmý.

Koeficient A odpovídá amplitudě y_m kmitavého pohybu, tj. platí $y_m \doteq 7,1 \text{ cm}$. Koeficient B odpovídá úhlové frekvenci definované vztahem (3). Proto pro frekvenci f kmitavého pohybu můžeme psát $f = \frac{7}{2\pi} \text{ Hz} = 1,11 \text{ Hz}$. Počáteční fáze je pak určena koeficientem C , tj. platí $\varphi_0 \doteq 2,54 \text{ rad}$.

Čas t_0 , ve kterém projde oscilátor poprvé rovnovážnou polohou, určíme na základě řešení rovnice (2). V rovnovážné poloze je okamžitá výchylka y nulová, a tedy rovnice (2) přejde na tvar $0 = y_m \sin(\omega t_0 + \varphi_0)$, která je ekvivalentní s rovnicí

$$\sin(\omega t_0 + \varphi_0) = 0. \quad (4)$$

Řešení rovnice (4) můžeme psát ve tvaru $\omega t_0 + \varphi_0 = k \frac{T}{2}$, odkud pro t_0 dostáváme

$$t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega} + k \frac{T}{2}, \quad (5)$$

kde T je perioda daného kmitavého pohybu a $k \in \mathbb{N}$. Proměnnou k záměrně vybíráme z přirozených čísel, neboť fyzikální smysl mají pouze kladné hodnoty časů t_0 a z nich hledáme ten nejmenší.

Vzhledem k tomu, že fyzikální veličiny φ_0 a ω jsou obě kladné, získáme hledaný čas t_0 volbou $k = 1$ a dostaneme: $t_0 = -\frac{2,54}{7} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,11} \text{ s} = 0,09 \text{ s}$. Tento čas je plně v souladu s grafem závislosti okamžité výchylky na čase, který je zobrazen na obr. 1. Na zobrazeném grafu sice není okamžitá výchylka v tomto čase rovna nule, ale je nutné si uvědomit, že graf je posunut po ose y o hodnotu $D \doteq 62 \text{ cm}$. Přímka daná rovnicí $y = D$ odpovídá tedy v našem případě rovnovážné poloze. A zobrazený graf tuto přímku protíná právě v čase t_0 .

Tuhost použité pružiny lze určit dvěma nezávislými způsoby. Tím lze nejen propojit příslušné fyzikální vědomosti žáků, ale také ověřit, zda měření bylo či nebylo přesné. První způsob určení tuhosti pružiny vyplývá ze vztahu pro úhlovou frekvenci ω vlastního kmitání tělesa zavěšeného na pružině, který můžeme psát ve tvaru

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6)$$

Ve vztahu (6) značí m hmotnost kmitajícího tělesa a k tuhost použité pružiny. Ze vztahu (6) lze vyjádřit tuhost pružiny ve tvaru

$$k = m\omega^2. \quad (7)$$

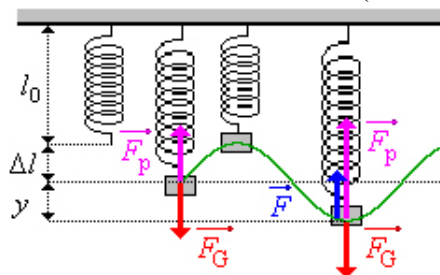
Úhlovou frekvenci ω jsme již určili při rozboru rovnice (2) pro okamžitou výchylku v závislosti na čase; hmotnost použitého tělesa lze určit pomocí vah, siloměru (buď klasického nebo siloměru firmy Vernier) nebo prostě použít předmět známé hmotnosti. V našem případě jsme použili jedno závaží ze sady pro rovnoramenné váhy, které má hmotnost $m = 0,2 \text{ kg}$. Dosazením do vztahu (7) dostaneme $k = 0,2 \cdot 7^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 9,8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Druhá metoda určení tuhosti použité pružiny vyplývá z rozboru sil, které působí na těleso zavěšené na dané pružině. Na toto těleso, které je zavěšeno na pružině klidové délky l_0 , působí tíhová síla \vec{F}_G a síla pružnosti \vec{F}_p (viz obr. 4). Po zavěšení tělesa na pružinu se pružina působením tíhové síly prodlouží o délku Δl . V rovnovážné poloze pak jsou velikosti obou těchto sil stejné.

V rovnovážné poloze proto platí vztah $F_G = F_p$, který lze rozepsat do tvaru

$$m \cdot g = \Delta l \cdot k_2, \quad (8)$$

kde g je velikost tíhového zrychlení a k_2 je tuhost použité pružiny. Index je použit proto, abychom odlišili tuhost pružiny určenou na základě rozboru sil působících na pružinu od metody určení tuhosti na základě kinematického rozboru (viz vztah (7)).



obr. 4

Tuhost použité pružiny můžeme tedy na základě vztahu (8) psát ve tvaru

$$k_2 = \frac{m \cdot g}{\Delta l}. \quad (9)$$

Nyní tedy stačí určit klidovou délku pružiny l_0 . Tu určíme pravítkem tak, že změříme délku nezatížené pružiny; v našem případě je $l_0 = 15,5$ cm. Pak změříme délku zatížené pružiny se závažím v rovnovážné poloze, což je (dle obr. 4) délka $l_0 + \Delta l$; v našem případě je $l_0 + \Delta l = 35,0$ cm. Dostáváme tak prodloužení pružiny způsobené tíhovou silou: $\Delta l = 35,0 - 15,5$ cm = 19,5 cm. Dosazením do vztahu (9) dostaneme:

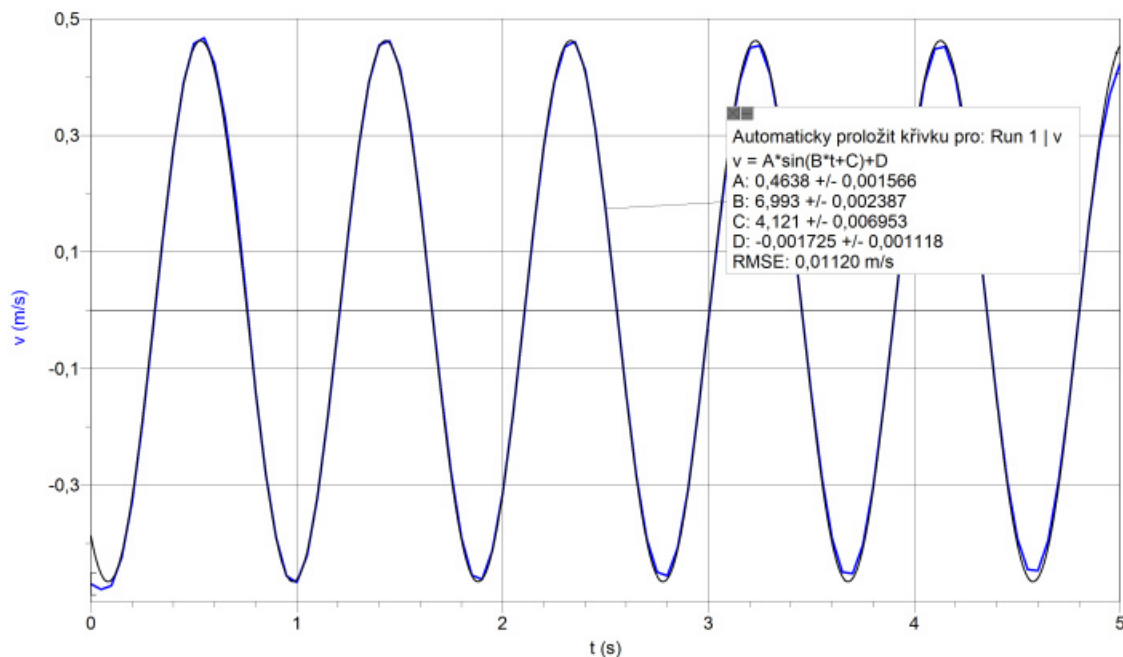
$k_2 = \frac{0,2 \cdot 9,81}{0,195} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} = 10,06 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Porovnáme-li hodnotu tuhosti pružiny k s hodnotou k_2 je zřejmé, že chyba v určení tuhosti se pohybuje v řádu procent, což je pěkný výsledek.

Určování tuhosti pružiny nejen, že vedlo žáky k opakování a utřídění nabytých poznatků o kmitavém pohybu, ale zároveň ukázalo na praktickém příkladě řádovou hodnotu tuhosti pružiny. Použitá pružina se zdá při zkušebním protažení o několik centimetrů jako slabá, přesto na ní optimálně kmitá závaží o hmotnosti 200 g. To může být pro některé z žáků překvapivý výsledek. A přitom řada z nich se zajímá ve volném čase o cyklistiku, automobilismus a další technické obory, v nichž se s vlastnostmi pružin setkávají. Tlumiče u řídicích kol, tlumiče v automobilech a další pružné mechanismy lze při matematicko-fyzikálním popisu modelovat pružinou o vhodné tuhosti bez ohledu na to, zda je v daném zařízení použita skutečná pružina, stlačený vzduch nebo kapalina.

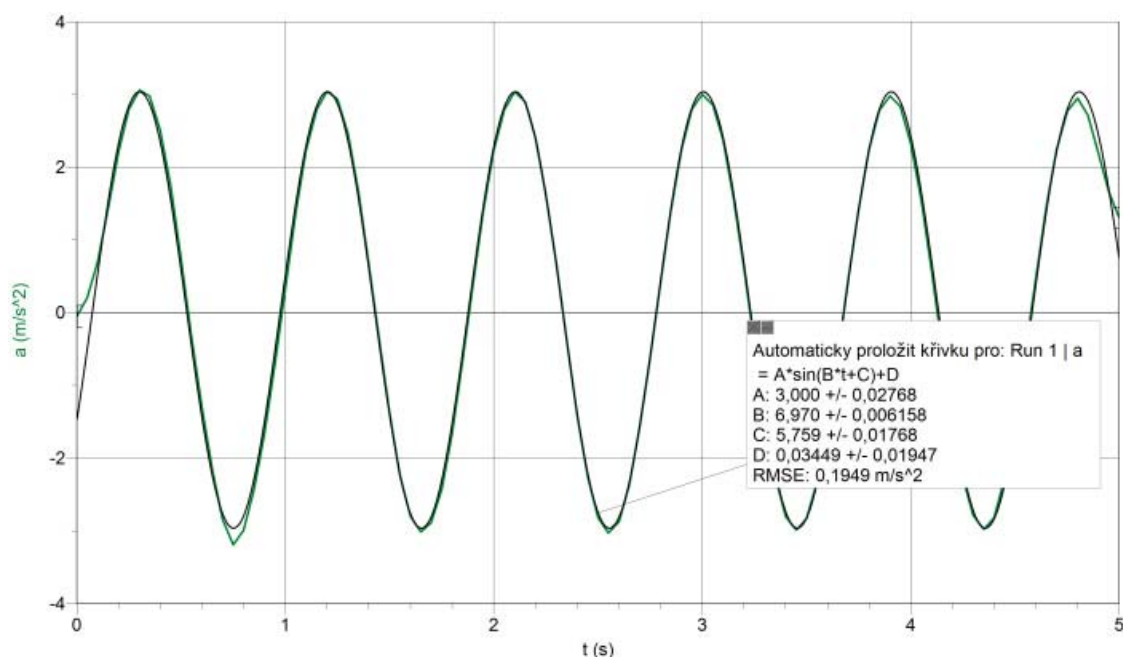
Čidlo polohy, které jsme použili k naměření dat a vykreslení grafu závislosti okamžité výchylky na čase zobrazeného na obr. 1, na základě naměřených dat polohy pomocí numerické derivace určuje i velikost okamžité rychlosti a velikost okamžitého zrychlení. Tyto veličiny jsou sice zatíženy chybou vyplývající z použité numerické metody, přesto v tomto jednoduchém případě jsou vypočtená data fyzikálně použitelná.

Na obr. 5 je tedy zobrazen graf závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase pohybujícího se tělesa a na obr. 6 je graf závislosti velikosti okamžitého zrychlení na čase téhož tělesa. U obou grafů je též zobrazena aproximační křivka a její rovnice. Hodnota RMSE (*root mean square error* - chyba aproximace při použití metody nejmenších čtverců) uvedená u každé tabulky s koeficienty aproximační funkce vypovídá o přesnosti aproximace. Graf zobrazený na obr. 6 má tuto hodnotu relativně vysokou, nicméně naměřená (resp. vypočtená) data stále dobře odpovídají teoretickému modelu.

Obdobným postupem, jakým jsme analyzovali graf zobrazený na obr. 1, lze analyzovat i grafy zobrazené na obr. 5 a na obr. 6. Tuto analýzu ovšem v tomto článku již nebudeme provádět.



obr. 5



obr. 6

Za velmi důležité pokládám z didaktického hlediska vzájemné porovnání grafů zobrazených na obr. 1, obr. 5 a na obr. 6. V našem případě je jev, o kterém mluvíme, nejlépe pozorovatelný v čase 3 s ve všech grafech. Podíváme-li se na okamžité hodnoty veličin zobrazených v těchto třech grafech právě v čase 3 s, zjistíme, že:

1. okamžitá výchylka je rovna záporné amplitudě;
2. okamžitá velikost rychlosti je nulová;
3. okamžitá velikost zrychlení je rovna kladné amplitudě.

Tato zjištění jsou plně v souladu s matematickým popisem kmitavého pohybu (s rovnicemi pro okamžitou výchylku, pro okamžitou velikost rychlosti i pro okamžitou velikost

zrychlení). Plně též odpovídají fyzikálnímu popisu provedeného experimentu: nachází-li se těleso v amplitudě svého pohybu, je velikost rychlosti nulová (v amplitudě se těleso zastaví) a velikost zrychlení je maximální (mění se totiž směr vektoru rychlosti na opačný). Vektor zrychlení přitom míří proti původnímu směru pohybu, kterým se těleso do amplitudy dostalo (tj. vektor zrychlení má opačný směr než výchylka). Pokud o tom můžeme žáky přesvědčit nejen detailním rozбором reálného experimentu, ale také pomocí zobrazených grafů, je velká naděje, že pochopí probíranou problematiku lépe.

V programu LoggerPro (resp. LoggerLite) je možné zobrazit najednou všechny tři grafy a pomocí volby menu *Stránka - Automatické rozvržení stránky* je zarovnat pod sebe.

Závěr

Vím, že existují učitelé fyziky, kteří zásadně nesouhlasí s využíváním počítače v hodinách fyziky. Na jednu stranu to chápu, protože kvalita některých apletů, které se v hodinách fyziky používají převážně, volně dosažitelných na internetu je velmi špatná a tyto aplety tak mohou v myslích žáků vytvořit velmi nesprávné fyzikální představy. Použití počítače ve spojení s reálným experimentem považují ovšem za velmi zdařilé. Žáci vidí reálný experiment, jehož průběh mohou sami ovlivnit (větší počáteční výchylka, změna kmitajícího tělesa, změna pružiny, změna vzdálenosti čidla polohy od tělesa zavěšeného na pružině v rovnovážné poloze, ...), a na plátně vidí vykreslování daného grafu. Velkou výhodou podobných dataloggerů, které byly použity v tomto experimentu, je ta skutečnost, že na počítači (resp. na obraze vytvořeném dataprojektorem) se zobrazují data v reálném čase. Stačí tedy do kmitajícího závaží t'uknout nebo dupnout na podlahu nedaleko stolu, na němž je celá experimentální aparatura postavena, a v grafu se okamžitě tyto vnější vlivy projeví.

Proto tento experiment považují za velmi užitečný. A jeho provedení je přitom jednoduché.