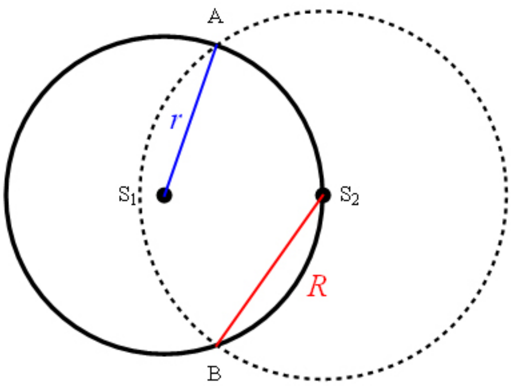
Koza se pase na polovině zahrady

Zadání úlohy

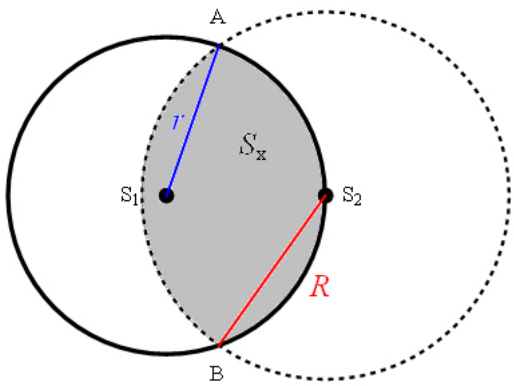
Zahrada kruhového tvaru má poloměr $r = 10$ m. Do zahrady umístíme kozu, kterou přivážeme provazem ke kolíku zatlučenému v obvodu zahrady. Jakou délku musí mít provaz, aby koza spásla trávu právě z poloviny plochy zahrady?

Matematické řešení

Situace je zobrazená na obr. 1, na kterém je označena písmenem R hledaná délka lana. Bude-li koza přivázána ke kolíku, vypase (za ideálních podmínek) plochu kruhu. V případě, že je její pohyb omezen hranicí původní zahrady, bude to jen část plochy kruhu. Tato část je vyšrafována na obr. 2 a je zřejmé, že výpočet jejího obsahu S_x nebude příliš jednoduchý. A tento obsah znát musíme, neboť podle zadání úlohy má být právě tento obsah poloviční ve srovnání s obsahem celé kružnice.



obr. 1

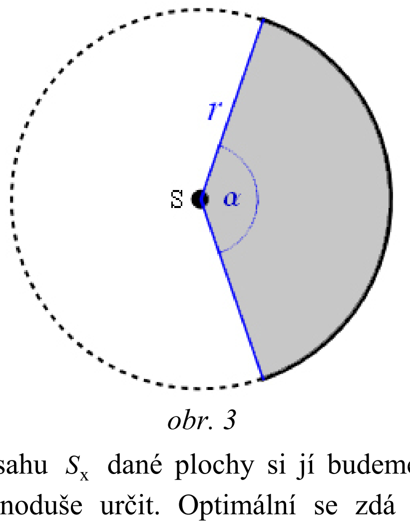


obr. 2

Má tedy platit

$$S_x = \frac{\pi r^2}{2}, \tag{1}$$

kde r je zadaný poloměr zahrady.



obr. 3

Pro výpočet hledaného obsahu S_x dané plochy si jí budeme muset rozdělit na takové části, jejichž obsah budeme umět jednoduše určit. Optimální se zdá rozdělení na kruhové výseče a trojúhelníky, neboť výpočet obsahů ploch těchto útvarů je jednoduchý. Pro obsah trojúhelníka, ve kterém známe jeho stranu a a výšku v kolmou na tuto stranu, platí

$$S_\Delta = \frac{av}{2} \tag{2}$$

a pro obsah kruhové výseče kruhu o poloměru r omezené vnitřním úhlem α (viz obr. 3) platí vztah

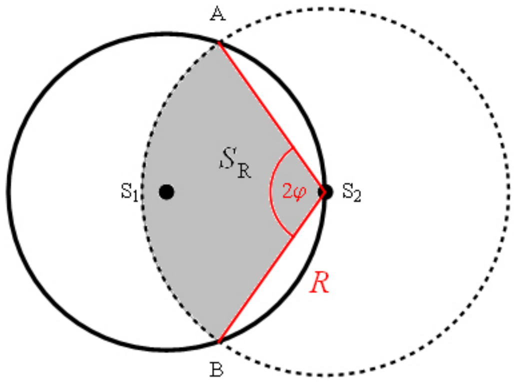
$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \tag{3}$$

Úhel α je přitom nutné udávat v radiánech, tj. v obloukové míře.

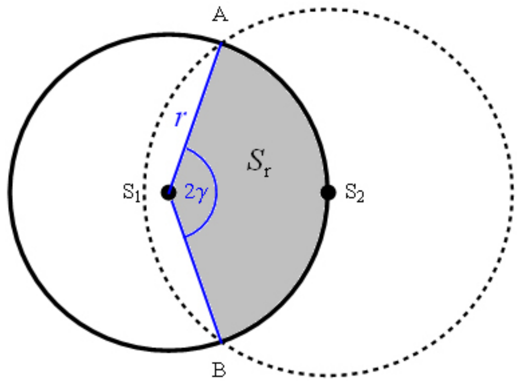
Obsah S_x hledané plochy určíme na základě obsahů dvou kruhových výsečí a obsahu trojúhelníka. Na obr. 4 je zobrazena kruhová výseč o obsahu S_R, která je dána středem S_2, poloměrem R a úhlem 2φ. Na obr. 5 je pak zobrazena kruhová výseč o obsahu S_r daná středem S_1, poloměrem r a úhlem 2γ. Dále je nutné vzít do úvahy obsah trojúhelníků, které jsou ohraničeny poloměry zobrazených kružnic (obr. 6). Pro obsah S_x hledané plochy pak bude platit vztah

$$S_x = S_R + S_r - 2S_\Delta, \tag{4}$$

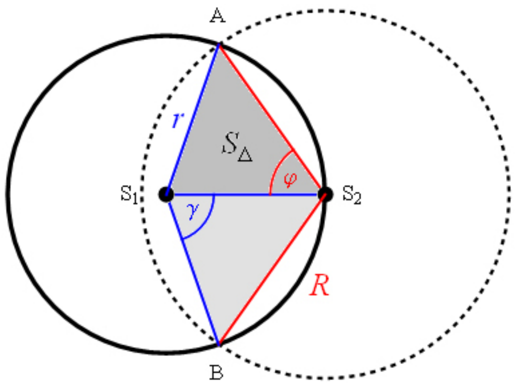
kde S_Δ je obsah jednoho z trojúhelníků zobrazených na obr. 6.



obr. 4



obr. 5



obr. 6

Nyní je nutné určit hledané obsahy S_R, S_r a S_Δ, abychom mohli podle vztahu (4) určit obsah S_x. Pro obsah S_R můžeme na základě vztahu (3) a obr. 4 psát

$$S_R = \frac{2\varphi R^2}{2} = \varphi R^2. \tag{5}$$

Analogicky můžeme pro obsah S_r s využitím vztahu (3) a obr. 5 psát

$$S_r = \frac{2\gamma r^2}{2} = \gamma r^2. \tag{6}$$

Hodnoty úhlů φ a γ lze určit na základě obr. 7. V pravoúhlém trojúhelníku S_1S_2P s pravým úhlem při vrcholu P můžeme psát

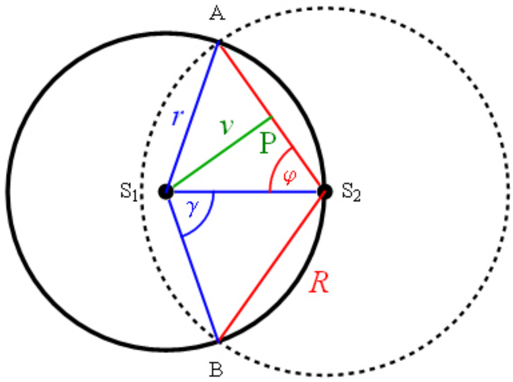
$$\cos\varphi = \frac{\frac{R}{2}}{r} = \frac{R}{2r}, \tag{7}$$

odkud můžeme vyjádřit přímo hodnotu úhlu φ pomocí cyklometrické funkce ve tvaru

$$\varphi = \arccos\frac{R}{2r}. \tag{8}$$

S využitím vztahů (5) a (8) můžeme pro obsah S_R psát

$$S_R = R^2 \arccos\frac{R}{2r}. \tag{9}$$



obr. 7

Trojúhelníky BS_2S_1 a S_2AS_1 jsou shodné rovnoramenné; jejich shodnost vyplývá z věty *sss* - strany obou trojúhelníků mají délky rovné poloměrům obou uvažovaných kružnic. Uvědomíme-li si, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven (vyjádřeno v obloukové míře) π, můžeme pro hodnotu úhlu γ psát

$$\gamma = \pi - 2\varphi \tag{10}$$

a po dosazení ze vztahu (8) dostaneme

$$\gamma = \pi - 2\arccos\frac{R}{2r}. \tag{11}$$

Pro obsah S_r na základě vztahů (6) a (11) tedy můžeme psát

$$S_r = r^2\left(\pi - 2\arccos\frac{R}{2r}\right). \tag{12}$$

Nyní zbývá určit délku výšky v v trojúhelníku S_2AS_1, kterou budeme potřebovat pro výpočet obsahu S_Δ tohoto trojúhelníka. Vzhledem k tomu, že trojúhelník S_2AS_1 je rovnoramenný a že výška v je výškou na jeho základnu S_2A, půlí pata výšky P základnu S_2A. Na základě Pythagorovy věty aplikované na pravoúhlý trojúhelník S_1S_2P s pravým úhlem při vrcholu P můžeme psát

$$v = \sqrt{r^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}. \tag{13}$$

Nyní můžeme dosadit do vztahu (2) pro výpočet obsahu trojúhelníka a vypočítat obsah trojúhelníka BS_2S_1 resp. trojúhelníka S_2AS_1. Délka jeho základny je R a délka výšky je dána vztahem (13). Dosazením do vztahu (2) tedy dostaneme

$$S_\Delta = \frac{1}{2}R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}. \tag{14}$$

Pro vyjádření hledaného obsahu S_x podle vztahu (4) tedy již máme vše připraveno. Do vztahu (4) tedy postupně dosadíme vyjádření obsahů příslušných kruhových výsečí daných vztahy (9) a (12) a obsah uvažovaného trojúhelníka popsaného vztahem (14). Postupně tak dostaneme:

$$S_x = R^2\arccos\frac{R}{2r} + r^2\left(\pi - 2\arccos\frac{R}{2r}\right) - 2.\frac{1}{2}R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = R^2\arccos\frac{R}{2r} + \pi r^2 - 2r^2\arccos\frac{R}{2r} - R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}};$$

tedy

$$S_x = \left(R^2 - 2r^2\right)\arccos\frac{R}{2r} + \pi r^2 - R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}. \tag{15}$$

Vztah (15) vyjadřuje obsah hledáno útvaru na základě geometrických vlastností tohoto útvaru, vztah (1) vyjadřuje obsah téhož útvaru na základě podmínky ze zadání úlohy. Můžeme tedy psát rovnost $\left(R^2 - 2r^2\right)\arccos\frac{R}{2r} + \pi r^2 - R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\pi r^2}{2}$, z níž po úpravě dostaneme rovnici

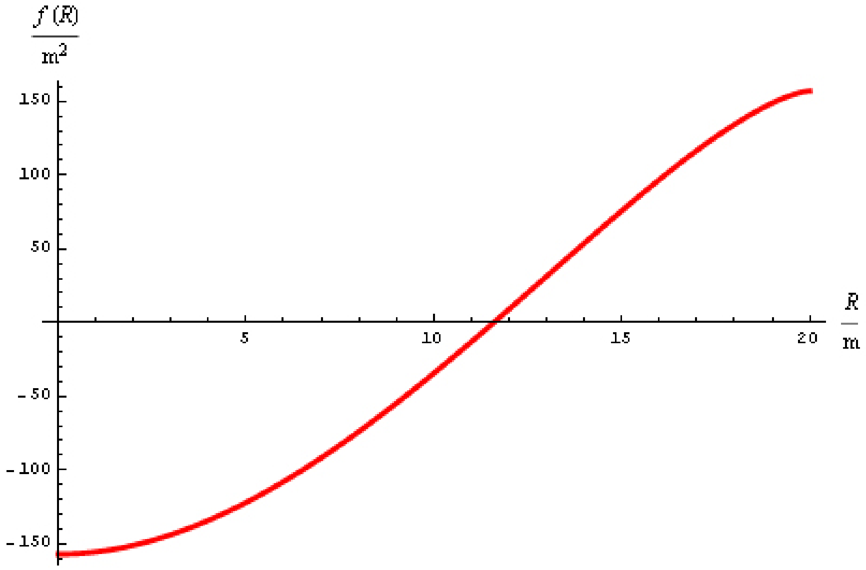
$$\left(R^2 - 2r^2\right)\arccos\frac{R}{2r} - R\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}} + \frac{\pi r^2}{2} = 0. \tag{16}$$

Rovnice (16) s neznámou R je nealgebraická rovnice, kterou není možné řešit analyticky, tj. vyjádřením neznámé R pomocí algebraických úprav dané rovnice. Tuto rovnici je nutné řešit numericky - např. pomocí software Mathematica. Před vlastním řešením definujeme funkci, jejíž předpis bude mít stejný tvar, jako má levá strana rovnice (16):

$$f(R)=\left(R^2-2r^2\right)\arccos\frac{R}{2r}-R\sqrt{r^2-\frac{R^2}{4}}+\frac{\pi r^2}{2}. \tag{17}$$

Funkce definovaná předpisem (17) je funkce proměnné R, neboť právě v závislosti na této proměnné nabývá funkce f různých hodnot. Vzhledem k tomu, že původně jsme dospěli k rovnici (16) (resp. k funkčnímu předpisu (17)) na základě úvah o obsazích plošných útvarů, má význam funkce pouze na tom intervalu, na kterém nabývá nezáporných hodnot. Nicméně graf funkce f je na obr. 8 vykreslen pro všechna $R\in\langle 0;2r\rangle$. Meze tohoto intervalu mají svá opodstatnění:

1. Dolní mez intervalu rovna nule vyplývá z faktu, že proměnná R reprezentuje poloměr kružnice, a tedy nemůže nabývat záporných hodnot. Pokud bychom chtěli být zcela korektní, měl by být interval ze strany čísla 0 otevřený. Otevřený interval ale není možné zadat do software Mathematica jako interval, na kterém má být vykreslen graf funkce.
2. Horní mez intervalu rovna hodnotě $2r$ vyplývá z definičního oboru funkce f dané předpisem (17). Jak pro druhou odmocninu vystupující ve vztahu (13) definujícím délku výšky v v trojúhelníku S_2AS_1, tak pro funkci $y=\arccos\frac{R}{2r}$ může proměnná R nabývat hodnot pouze menších nebo rovných hodnotě $2r$.



obr. 8

Graf funkce f je vhodné sestrojit proto, že na základě něj můžeme snadno odhadnout hledaný poloměr R, který je řešením rovnice (16). S využitím definice funkce vztahem (17) budeme místo rovnice (16) řešit rovnici

$$f(R)=0. \tag{18}$$

Na základě grafu funkce f, který je zobrazen na obr. 8, můžeme tedy odhadnout řešení rovnice (16) resp. (18). Z rovnice (18) vyplývá, že hledáme průsečík grafu funkce f s vodorovnou osou, tj. s osou R. Na základě grafu funkce f je tedy zřejmé, že hledaný kořen je $R\doteq 12\ \mathrm{m}$. Přesnější hodnotu kořenu získáme s využitím software Mathematica: $R = 11{,}587$ m.

Délka provazu, který odpovídá zadání úlohy, je přibližně 11,59 metru.

Použité funkce programu Mathematica

V programu Mathematica jsou podstatné pro řešení této úlohy dva příkazy se základními parametry:

1. `Plot[funkce[R],{R,0,2r}]` - vykreslí funkci danou předpisem (17) pro $R \in \langle 0; 2r \rangle$;
2. `FindRoot[funkce[R]==0,{R,r}]` - s využitím numerické Newtonovy metody tečen najde kořen zadané rovnice s neznámou R v okolí bodu r.

Další funkce, které jsou uvedeny v notebooku s řešením zadané úlohy, byly použity pro vykreslení obrázku se zobrazenými objekty, s nimiž se počítalo. Stejně tak výše citované funkce systému Mathematica lze použít s více parametry, které doplňují výstup dané funkce (např. ve funkci `Plot[]` lze nastavit barvu vykreslované čáry, tloušťku čáry, popis os grafu, …).